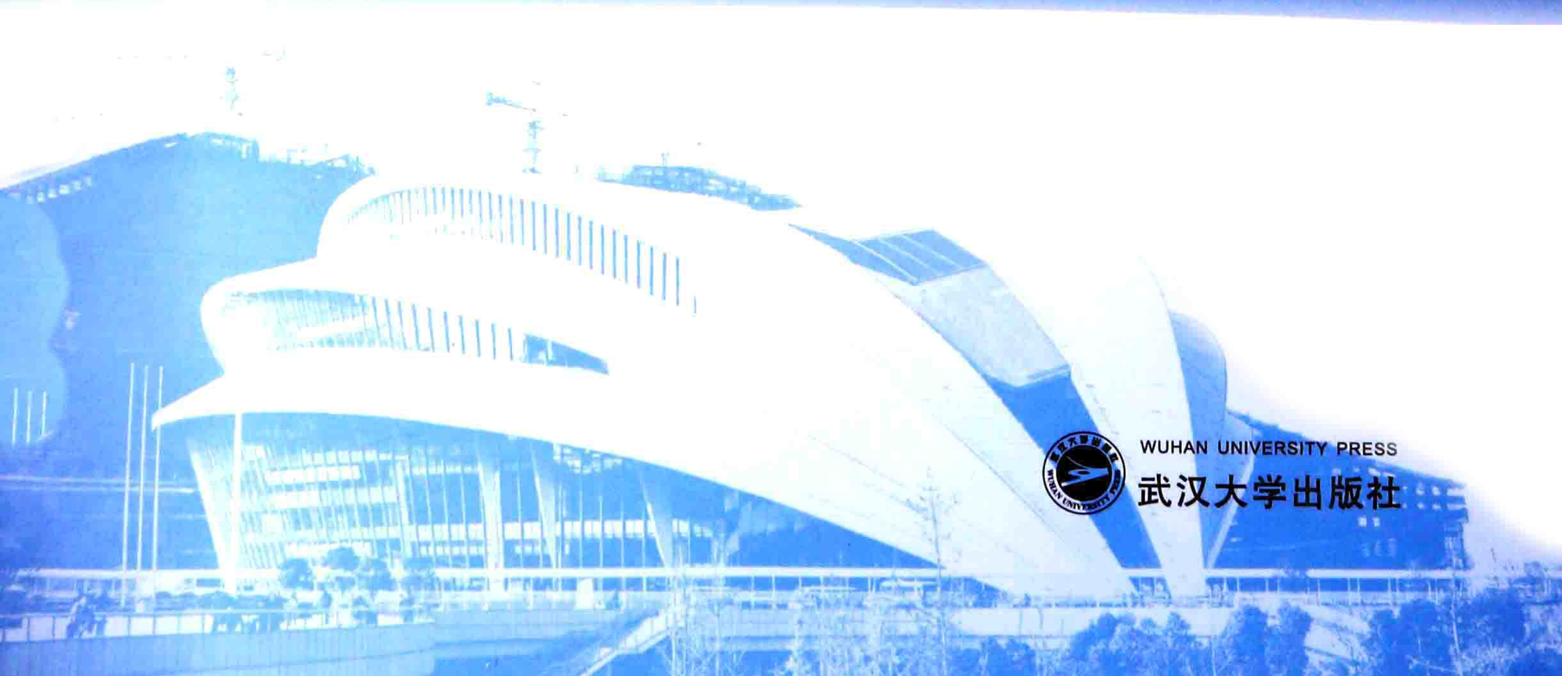
高等学校土木工程专业“十二五”系列规划教材·应用型

工程力学

◎ **主编** 魏泳涛 罗特军 **主审** 李章政



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校土木工程专业"十二五"系列规划教材·应用型

工程力学

主　编　魏泳涛　罗特军
副主编　王　刚　刘科元
主　审　李章政

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程力学/魏泳涛,罗特军主编. —武汉:武汉大学出版社,2013.12
高等学校土木工程专业“十二五”系列规划教材·应用型
ISBN 978-7-307-12471-4

Ⅰ.工… Ⅱ.①魏… ②罗… Ⅲ.工程力学—高等学校—教材 Ⅳ.TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 306848 号

责任编辑:王亚明 孙 丽　　责任校对:王 蕾　　装帧设计:吴 极

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:whu_publish@163.com 网址:www.stmpress.cn)
印刷:荆州市鸿盛印务有限公司
开本:850×1168 1/16　印张:15.25　字数:410 千字
版次:2013 年 12 月第 1 版　2013 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-12471-4　定价:30.00 元

高等学校土木工程专业“十二五”系列规划教材·应用型

编审委员会

特别提示

教学实践表明，有效地利用数字化教学资源，对于学生学习能力以及问题意识的培养乃至怀疑精神的塑造具有重要意义。

通过对数字化教学资源的选取与利用，学生的学习从以教师主讲的单向指导的模式而成为一次建设性、发现性的学习，从被动学习而成为主动学习，由教师传播知识而到学生自己重新创造知识。这无疑是锻炼和提高学生的信息素养的大好机会，也是检验其学习能力、学习收获的最佳方式和途径之一。

本系列教材在相关编写人员的配合下，将逐步配备基本数字教学资源，其主要内容包括：

课程教学指导文件

(1)课程教学大纲；

(2)课程理论与实践教学时数；

(3)课程教学日历：授课内容、授课时间、作业布置；

(4)课程教学讲义、PowerPoint 电子教案。

课程教学延伸学习资源

(1)课程教学参考案例集：计算例题、设计例题、工程实例等；

(2)课程教学参考图片集：原理图、外观图、设计图等；

(3)课程教学试题库：思考题、练习题、模拟试卷及参考解答；

(4)课程实践教学(实习、实验、试验)指导文件；

(5)课程设计(大作业)教学指导文件，以及典型设计范例；

(6)专业培养方向毕业设计教学指导文件，以及典型设计范例；

(7)相关参考文献：产业政策、技术标准、专利文献、学术论文、研究报告等。

基本数字教学资源网站链接：http://www.stmpress.cn

前　　言

本书为“高等学校土木工程专业‘十二五’系列规划教材·应用型”系列教材之一。

本书是根据高等学校土木工程学科专业指导委员会颁布的《高等学校土木工程本科指导性专业规范》的基本要求，结合以培养应用型人才为主的普通高等学校土木工程本科专业的需求编写的。为适应应用型本科高等学校的实际情况，本书紧扣教学基本要求，精简内容，突出重点，以达到在有限学时内能充分讲述与土木工程密切相关的力学基本概念、基本理论和基本方法的目的，从而满足应用型本科高等学校人才培养的要求。

本书由刚体静力学和材料力学两部分组成。刚体静力学研究物体的受力与平衡规律。本书的刚体静力学部分，从力系等效原理出发，采用了从一般到特殊的逻辑关系。这样做既减少了内容的重复，又可使体系的主线比较清晰，使学生对刚体静力学的基本概念有更完整的了解。材料力学研究杆件在外力作用下的变形与破坏(或失效)的规律，为合理设计构件提供了有关强度、刚度与稳定性分析的基础理论与方法。材料力学部分主要涉及轴向拉伸与压缩、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态分析、组合变形、压杆稳定等内容。

为突出应用，本书在注重基本概念讲述的基础上，并不过分追求理论的严密与完整，适度精简和压缩了理论推导。在例题安排上由易到难，注意在题目中体现基本理论和方法的应用，引导学生用所学的力学知识分析和解决问题。

本书由四川大学魏泳涛、罗特军担任主编，成都理工大学工程技术学院王刚、中国矿业大学银川学院刘科元担任副主编，四川大学锦江学院许信、中国矿业大学银川学院姚宇峰担任参编。

具体编写分工为：

四川大学，魏泳涛(前言、第 10 章、第 11 章)；

四川大学，罗特军(第 1 章)；

成都理工大学工程技术学院，王刚(第 5 章、第 7 章)；

中国矿业大学银川学院，刘科元(第 6 章、第 8 章、第 9 章、第 12 章)；

四川大学锦江学院，许信(第 2 章、第 3 章)；

中国矿业大学银川学院，姚宇峰(第 4 章、附录)。

本书由四川大学李章政担任主审。

本书在编写过程中参阅了有关书籍，在此对这些书籍的作者表示衷心的感谢。

书中如有不妥之处，敬请读者指正。

编　者

2013 年 11 月

目　　录

上篇　静力学

下篇　材料力学

上 篇

静力学

静力学研究物体在力系的作用下相对于惯性系静止的力学规律。静力学以理想化的力学模型——**刚体**为研究对象。所谓刚体,是指在力的作用下不变形的物体。换句话说,刚体上任意两点之间的距离永远保持常数。在实际生活中,完全不变形的物体并不存在,刚体不过是实际物体和构件的抽象和简化。简化的条件除了要求物体的变形不大之外,更重要的是这种变形对我们所研究问题的结果产生的影响要足够小。例如,建筑物中的梁在荷载和自重的作用下会发生弯曲,但其轴线下垂的位移与梁的跨度相比是很微小的。这种小变形对于两端支承力的影响是微不足道的,因此在计算两端的支承力时,梁可简化为刚体。但是在研究梁的强度和变形问题时,显然就不能再将它简化为刚体了。

作用于同一刚体的一组力称为**力系**。力系中各力的作用线都在同一平面内的力系称为**平面力系**。平面力系是工程应用中最常见的力系,是静力学研究的重点。

如果两个不同的力系对同一刚体产生相同的作用,则称此二力系互为**等效力系**,与一个力系等效的力称为该力系的**合力**。

当一个力系作用于刚体时,若刚体原有的运动状态不会发生改变,则称该力系为**平衡力系**。显然,并非任何力系都是平衡力系,平衡力系必须要满足一定的条件。我们把平衡力系所要满足的数学条件称为**平衡条件**。

静力学主要研究以下三个基本问题:①物体的受力分析;②力系的等效替换及简化;③力系的平衡条件及其应用。

静力学是工科力学的基础,在工程中有非常广泛的应用。

1 静力学基础

【内容提要】

本章的主要内容包括：静力学的基本概念、基本假设，物体的受力分析，力和力矩、力系等效原理，力偶和力偶矩。

【能力要求】

通过本章的学习，学生应掌握力的概念、力在坐标轴上的投影、力对点的矩和力对轴的矩、力系的主矢和主矩、力偶的概念、约束和约束力概念，力系等效原理及其推论，物体受力分析；熟练掌握平面力系中力的投影和力矩的计算，以及物体的受力分析。

1.1 力和力矩

1.1.1 力的概念

力是指物体间的相互作用，作用结果使物体的运动状态发生改变，或使物体产生变形。对刚体而言，力的作用只改变其运动状态。

力对物体的作用效果取决于力的大小、方向和作用点，其称为**力的三要素**。力不但有大小和方向，而且两个共点力的合成满足平行四边形法则，因此**力是矢量**。考虑到力的作用效果与其作用点的位置有关，因而可以更确切地说力是**定位矢量**。本书用粗斜体字母来标记矢量，例如 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{r}$ 等，对应的细斜体字母 F、L、r 等用以表示同一矢量的模。当在书写中不便用粗斜体字母来表示矢量时，可在字母上方加一带箭头的横线来表示，例如$\vec{F}$、$\vec{L}$、$\vec{r}$等。必须注意矢量和标量是两类不同类型的物理量，标记的符号应加以严格区别，不可混淆。在图中通常用有向线段来表示力，如图 1-1 所示，箭头表示力的方向，线段的起点或终点为**力的作用点**，线段所在的直线称为**力的作用线**。

量度力大小的单位，在国际单位制(SI)中用牛顿(N)或千牛顿(kN)。

应用我们熟知的求合矢量的平行四边形法则可以求得两个共点力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$，如图 1-2(a)所示。有时也可将其中任意一个分力平移到它的对边构成一个三角形，如图 1-2(b)所示。这种求合力的方法称为力的三角形法则。但要注意应用力的三角形法则仅仅是为了方便地表示出各力的大小和方向，并不表示力(例如图中 $\boldsymbol{F}_1$)的作用位置已经改变。

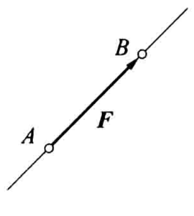


图 1-1 力在图中的表示方法

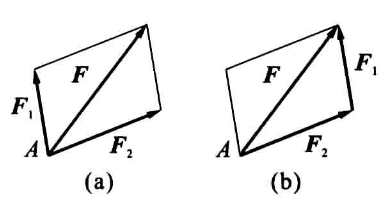


图 1-2 力的平行四边形法则和力的三角形法则

力的另一重要性质是由**牛顿第三定律**所描述的作用力和反作用力之间的关系，即两个物体之

间的作用力与反作用力总是同时存在，且大小相等、方向相反、沿同一直线，并分别作用在两个不同的物体上。

物体之间的相互作用力有**分布力**和**集中力**两种。连续作用于物体某一面积上或体积内的力分别称为**表面力**和**体积力**，它们都是分布力。例如，建筑物外墙所受的风压力是表面力，物体的重力是体积力。分布力又有均匀分布与非均匀分布的区别，例如，立方体水池底面所受的水压力是均匀分布的（**均布荷载**），而侧壁所受的水压力与深度成正比，是非均匀分布的（**非均布荷载**）。

集中作用于物体上一点的力称为集中力。实际上，要经一个几何点来传递作用力是不可能的，一切真实力都是分布力。集中力只是分布力在一定条件下的简化，能否进行这种简化主要取决于我们所研究问题的性质。

考虑平面力系中的任意力 $\boldsymbol{F}$，在力 $\boldsymbol{F}$ 所在的平面内任取直角坐标系 Oxy，应用平行四边形法则将力沿 x 轴和 y 轴进行正交分解，如图 1-3 所示，可得

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y$$

设沿 x 轴和 y 轴的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，则可将上式写成

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j} \tag{1-1}$$

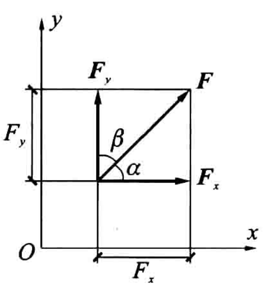


图 1-3　平面力系中力在坐标轴上的投影

式(1-1)为力 $\boldsymbol{F}$ 的解析表达式，式中的 F_x 和 F_y 分别表示力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影。为了求出式中的 F_x 和 F_y，分别用单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 去点乘式(1-1)两边，即有

$$\left.\begin{aligned}F_x&=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i}=F\cos\alpha\\F_y&=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}=F\cos\beta\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

式(1-2)中，F 为力 $\boldsymbol{F}$ 的大小，$\boldsymbol{F}$ 的方位角 α 和 β 分别为力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴和 y 轴正方向间的夹角。式(1-2)表明，**力在某轴上的投影等于力矢量与沿该轴正向的单位矢量的标积，即等于力的大小乘以力与该轴正向间夹角的余弦**。由于方向余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 可正可负，故**力在坐标轴上的投影是代数量**。力在坐标轴上投影的正负号也可直观地判断如下：当力的起点在轴上的投影至力的终点在轴上的投影的方向与轴的指向一致时为正，反之为负。

反过来，如果已知力在各坐标轴上的投影，则力矢量就已经完全确定了，即可求得力的大小和它相对于各坐标轴的方向余弦：

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2} \tag{1-3}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i})&=\frac{F_x}{F}\\\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{j})&=\frac{F_y}{F}\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

应当注意力在坐标轴上的投影 F_x 和 F_y 是代数量，而分力 $\boldsymbol{F}_x=F_x\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{F}_y=F_y\boldsymbol{j}$ 是矢量，两者并不等同。特别是当 x 轴不垂直于 y 轴时，分力 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_y$ 在数值上也不等于力在 x 轴和 y 轴上的投影 F_x 和 F_y。

下面我们将上述平面力沿直角坐标轴的分解及在坐标轴上的投影推广到三维的情况。引入空间固定直角坐标系 $Oxyz$，设各坐标轴的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则力矢量 $\boldsymbol{F}$ 可表示为

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k} \tag{1-5}$$

式(1-5)中，F_x、F_y 和 F_z 分别表示力 $\boldsymbol{F}$ 在各个坐标轴上的投影，如图 1-4 所示，即有

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = F\cos\alpha \\ F_y &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j} = F\cos\beta \\ F_z &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k} = F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

式(1-6)中，F 为力矢量 $\boldsymbol{F}$ 的模，α、β、γ 分别为 $\boldsymbol{F}$ 与三个坐标轴正方向间的夹角，即力矢量 $\boldsymbol{F}$ 的方位角。

在计算力在坐标轴上的投影时，应用**二次投影法**常常很方便，即先将力矢量投影到坐标平面上，然后再投影到坐标轴上。如图 1-5 所示，已知角 γ 和 φ 时有

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{xy}\cos\varphi = F\sin\gamma\cos\varphi \\ F_y &= F_{xy}\sin\varphi = F\sin\gamma\sin\varphi \\ F_z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

式中 F_{xy}——力 $\boldsymbol{F}$ 在 Oxy 平面上的投影矢量 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 的大小；

φ——投影矢量 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 与 x 轴正方向的夹角。

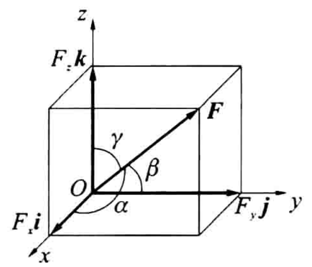


图 1-4 空间力系中力在坐标轴上的投影

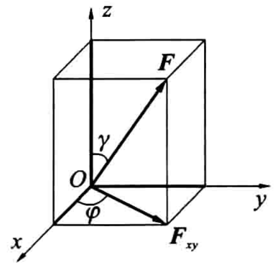


图 1-5 二次投影法

在图 1-4 和图 1-5 中，选取了坐标系的原点与力的作用点相重合，但这并不是必须的。当它们不重合时，力在坐标轴上的投影表达式式(1-6)和式(1-7)的形式仍旧保持不变。

已知力 $\boldsymbol{F}$ 在各坐标轴上的投影，则可求得力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和它相对于各坐标轴的方向余弦，即

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{1-8}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i}) &= \frac{F_x}{F} \\ \cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{j}) &= \frac{F_y}{F} \\ \cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{k}) &= \frac{F_z}{F} \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

1.1.2 力对点的矩

静止的刚体在力的作用下，不但可能产生移动的效果，还可能产生转动的效果，或同时产生这两种效果。我们已经知道，在平面问题中可应用**力矩**来量度力使物体产生转动的效应。如图 1-6 所示，在力 $\boldsymbol{F}$ 所在的平面内任取一点 O，称为**矩心**，O 点到力作用线的垂直距离 h 称为**力臂**，则在平面上力对点的矩定义为

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fh \tag{1-10}$$

即在平面上力对点的矩是一个代数量，它的数值等于力乘以力臂，正、负号用于区别转向，通常规定力使物体绕矩心逆时针转动时为正，反之为负。

但在空间问题中，这个定义已不足以反映力使物体产生转动的效应。如图 1-7 所示，假设杆 OA 可绕固定点 O 在空间自由转动，则当杆的 A 端受到力 $\boldsymbol{F}$ 作用时，原来处于静止的杆将产生绕

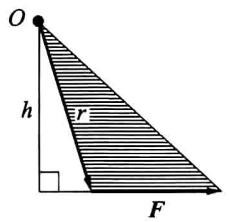


图 1-6　平面上力对点的矩

ON 轴的转动，ON 轴垂直于由 O 点与力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线所确定的平面。显然，这时仅仅知道转动效应的大小和转向是不够的，还必须要明确 ON 的方位。于是，我们引进一个包含上述大小、转向和转轴方位等要素的矢量来作为力 $\boldsymbol{F}$ 对空间任意一点 O 的力矩定义（图 1-8）：

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1-11}$$

式(1-11)中，O 点为矩心，$\boldsymbol{r}$ 为矩心 O 引至力 $\boldsymbol{F}$ 作用点 A 的矢径，即**力对点的矩**定义为矩心到该力作用点的矢径与力矢的矢量积。

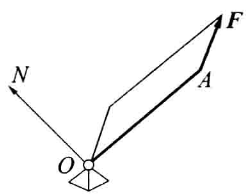


图 1-7　力 F 使 OA 杆绕 ON 转动

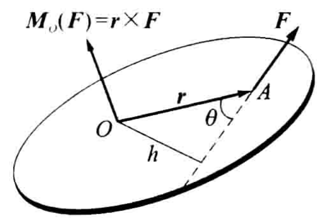


图 1-8　力对点的矩

$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$通常被看作一个定位矢量，习惯上总是将它的起点画在矩心 O 处，但并没有 O 点为 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 作用点的意思。**力矩矢的三要素**为大小、方向和矩心。$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$的大小即它的模为

$$|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = Fr\sin\theta = Fh \tag{1-12}$$

式(1-12)中，θ 为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 正方向间的夹角，h 为力臂。$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$的方向垂直于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 所确定的平面，指向由**右手定则**（Right Hand Rule）确定，即从矢量的箭头端沿着矢量看过去，力矩的转向是逆时针的。

力矩的单位在国际单位制（SI）中为牛顿·米（N·m）或千牛顿·米（kN·m）。

对于平面力系，由于矩心与力矢在同一个特定的平面内，力矩矢总是垂直于该平面，即力矩的方向不变，指向可用正、负号区别，故由式(1-10)定义的平面力矩成为了代数量。这样，平面力矩的定义作为特殊情况被包含在了空间力对点的矩的定义之中。

为了计算力矩矢在坐标轴上的投影，以矩心 O 为原点引进直角坐标系 $Oxyz$，并用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示沿各坐标轴的单位矢量（图 1-9），设力 $\boldsymbol{F}$ 在各个坐标轴上的投影为 F_x、F_y 和 F_z，力 $\boldsymbol{F}$ 作用点的坐标为(x, y, z)，则

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

于是

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

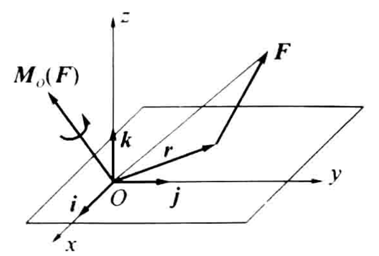


图 1-9　力对点的矩在坐标轴上的投影

$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \tag{1-13}$$

由此可知，力矩矢量 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$在三个坐标轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox}(\boldsymbol{F}) &= yF_z - zF_y \\ M_{Oy}(\boldsymbol{F}) &= zF_x - xF_z \\ M_{Oz}(\boldsymbol{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

1.1.3　力对轴的矩

当刚体上有一固定转动轴时，刚体在力的作用下只可能绕该固定轴转动。引入**力对轴的矩**可

用来量度作用于刚体的力对该固定轴的转动效应。

设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于可绕 z 轴转动的刚体上的点 A，如图 1-10 所示。过点 A 且垂直于 z 轴的 Oxy 平面交 z 轴于点 O，将 $\boldsymbol{F}$ 分解为平行于 z 轴的 $\boldsymbol{F}_z$ 和 Oxy 平面内的 $\boldsymbol{F}_{xy}$。由于 $\boldsymbol{F}_z$ 对刚体绕 z 轴的转动没有贡献，于是力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩定义为

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h \tag{1-15}$$

这样，**空间力对轴之矩归结为平面上的力对点之矩**，即力 $\boldsymbol{F}$ 对任一轴 z 之矩，等于这力在垂直于 z 轴平面内的分量 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对该平面和 z 轴交点之矩。式(1-15)中 F_{xy} 是 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 的模，力臂 h 是 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 的作用线到 z 轴的垂直距离，正负号的规定是力矩的转向按右手定则与 z 轴的指向一致时为正，反之为负(图 1-10)。

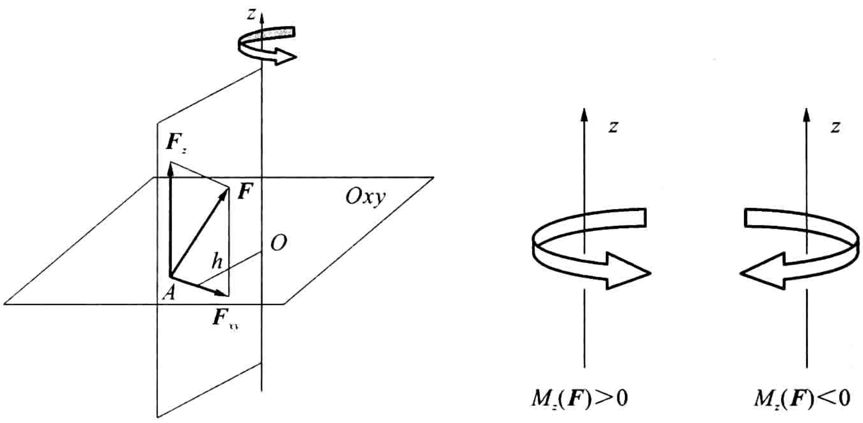


图 1-10　力对轴的矩

固定轴 z 称为**矩轴**，它并不一定必须是刚体上的实际轴，也可以是空间中任何一条设想的直线。当力的作用线与 z 轴平行($\boldsymbol{F}_{xy}=\boldsymbol{0}$)或相交($h=0$)时，或者概括起来讲，**当力与轴共面时，力对轴的矩等于零**。

在引入了力对轴的矩之后，自然会想到它与力对点的矩之间有什么关系。**力矩关系定理**回答了这个问题，即**力对任意轴之矩等于该力对轴上任一点之力矩矢在该轴上的投影**。如图 1-11 所示，点 A 是 z 轴上的一点，则力 $\boldsymbol{F}$ 对点 A 的矩在 z 轴上的投影就等于力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩：

$$M_z(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k} = M_{Az}(\boldsymbol{F}) \tag{1-16}$$

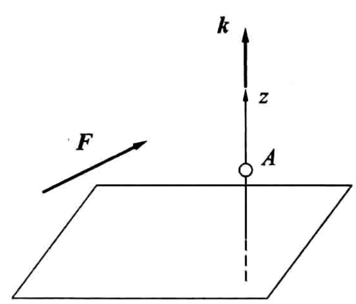


图 1-11　力对点之矩与力对轴之矩的关系

根据力矩关系定理并结合式(1-14)，我们可以得到力对坐标轴之矩的解析表达式

$$\left.\begin{aligned} M_x(\boldsymbol{F}) &= M_{Ox}(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y \\ M_y(\boldsymbol{F}) &= M_{Oy}(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z \\ M_z(\boldsymbol{F}) &= M_{Oz}(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x \end{aligned}\right\} \tag{1-17}$$

式中　x,y,z——力的作用点的坐标；

　　F_x,F_y,F_z——$\boldsymbol{F}$ 在各坐标轴上的投影。

【例 1-1】　平面力系如图 1-12(a)所示，力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 分别作用于平面上的点 A、B、C 和 D。若 $F_1=F_4=40$ N，$F_2=30$ N，$F_3=45$ N，试求各力在各个坐标轴上的投影以及 $\boldsymbol{F}_1$ 对点 O 的矩(图中的长度单位为 m)。

【解】　根据图 1-12(a)中各力的大小与方向，可求得各力在 x 和 y 轴上的投影：

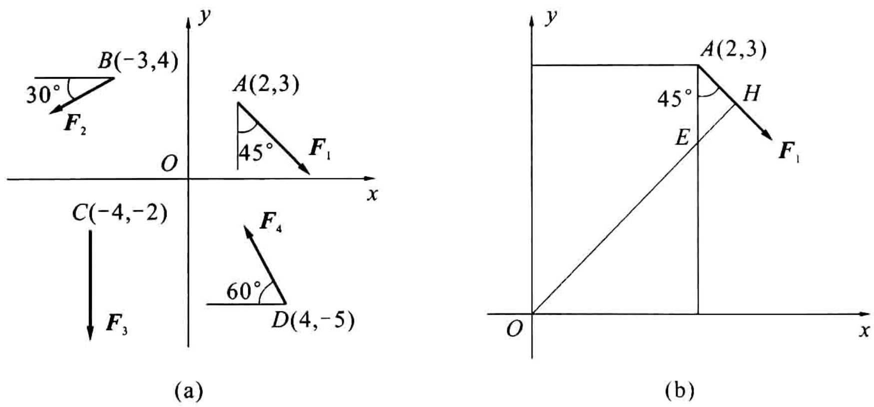


图 1-12 例 1-1 图

$$F_{1x}=F_1\sin45^\circ=20\sqrt{2}\ \mathrm{N},\quad F_{1y}=-F_1\cos45^\circ=-20\sqrt{2}\ \mathrm{N}$$

$$F_{2x}=-F_2\cos30^\circ=-15\sqrt{3}\ \mathrm{N},\quad F_{2y}=-F_2\sin30^\circ=-15\ \mathrm{N}$$

$$F_{3x}=0,\quad F_{3y}=-F_3=-45\ \mathrm{N}$$

$$F_{4x}=-F_4\cos60^\circ=-20\ \mathrm{N},\quad F_{4y}=F_4\sin60^\circ=20\sqrt{3}\ \mathrm{N}$$

要求 $\boldsymbol{F}_1$ 对点 O 的矩，由图 1-12(b)中的几何关系可得力臂

$$h=OE+EH=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{m}$$

故有

$$M_O(\boldsymbol{F}_1)=-F_1h=-100\sqrt{2}\ \mathrm{N\cdot m}$$

负号表示力矩为顺时针转向。

1.2 力系等效原理

1.2.1 力系的主矢和主矩

作用于刚体上的若干个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 构成**空间任意力系**，通常表示为$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$。这 n 个力的矢量和 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ 称为该力系的**主矢量**：

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{1-18}$$

注意力系的主矢量与力系的合力是两个不同的概念。力系的主矢量仅涉及力系中各力的大小和方向，而与其作用点无关，故**力系的主矢量是一个自由矢量，而不是一个力**。任何力系都有主矢量，尽管它可能等于零。但今后我们将会看到，并不是任何力系都有合力。仅仅是在力系有合力的情况下，合力矢才等于该力系的主矢量。

若空间任意力系$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$中各力对某点 O 的矩为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则矢量和

$$\boldsymbol{M}_O=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\text{①} \tag{1-19}$$

① 这里省略了求和符号的上、下限。今后在不致引起混淆的情况下，均作此省略。