学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·北师大课标版·

数学

九年级（上）

主编／于军生

东北师范大学出版社

学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·北师大课标版·

数学

九年级㊤

主编／于军生

东北师范大学出版社·长春

□本册主编：于军生
□编　　者：于军生　于培冰　杜晓霞　于秋生　于培冰　王　瑛　孙　杰
张　晔　孙永艳　郭　洁　初晓明　柳国光　衣美青　任　喆
蒋声华　于建春　孙奎波　宫明义　孙景晓　孙春红　夏文玲

图书在版编目（CIP）数据

学考第一．教材同步点拨．九年级数学．上：北师大课标版 / 于军生主编．—长春：东北师范大学出版社，2005.4
ISBN　7-5602-4080-1

Ⅰ．学...　Ⅱ．于...　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634

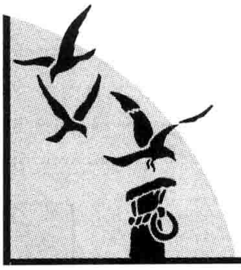
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 019594 号

□总策划：第二编辑室
□责任编辑：徐　江　□封面设计：魏国强
□责任校对：刘云飞　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
电话：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http://www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
广告许可证：吉工商广字 2200004001001 号
东北师范大学出版社激光照排中心制版
延边新华印刷有限公司印装
吉林省延吉市河南街 818 号（133001）
2005 年 6 月第 1 版　2005 年 6 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：13　字数：399 千
印数：00 001—20 000 册

定价：15.60 元

如发现印装质量问题，影响阅读，可直接与承印厂联系调换



目 录

第一章 证 明(二)

第一节 你能证明它们吗

基础知识归纳

1. 三角形全等的判定定理

❶两边及其夹角对应相等的两个三角形全等.(SAS)

❷两角及其夹边对应相等的两个三角形全等.(ASA)

❸两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等.(AAS)

❹三边对应相等的两个三角形全等.(SSS)

2. 全等三角形的性质

❺全等三角形的对应边相等、对应角相等.

3. 等腰三角形的性质

❻等腰三角形的两个底角相等.(等边对等角)

❼等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合.(三线合一)

❽等边三角形的三个角都相等,并且每个角都等于 $60°$.

❾有两个角相等的三角形是等腰三角形.(等角对等边)

❿有一个角等于 $60°$ 的等腰三角形是等边三角形.

⓫在直角三角形中,如果一个锐角等于 $30°$,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

重点知识讲解

1. 运用三角形全等的判定定理时注意对应.

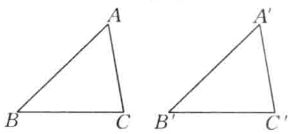


图 1 - 1

比较难掌握的是 AAS 这条定理. 必须是相等的角对的边相等,不可理解成"有两角相等,再有一边相等". 如图 1 - 1 所示,当 $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, 且 $AC=A'C'$ 时, $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$, 而若 $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $AC=A'B'$ 时,则不能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等,因为 AC 边的对角是 $\angle B$, $A'B'$ 边的对角是 $\angle C'$,因而不属于对应边. 要想用好定理,"对应"最为关键.

2. 等腰三角形中三线合一.

能够由其中一种线迅速联想到其他两种线,这往往是解题成功的关键.

3. 在直角三角形中,如果一个锐角等于 30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

对这条定理要注意:①条件"在直角三角形中"非常重要,没有这个条件,结论就不成立,初学时往

往易忽略;②在解题时,遇到线段之间有“一半”或“$\frac{1}{2}$”字眼时,要往这条定理上联想,$\frac{1}{2}$是这条定理的最明显的特征.

4. 运用“反证法”证题时,一般的步骤是:

①作出与结论相反的假设.②在假设条件下推理,得出与已知条件矛盾或与学过的定理、公理矛盾的结论.③假设不正确,得出正确结论.尤其要注意的是:作相反假设时,不能简单地加上“不”字即可,应注意全面考虑,如“大于”的反面不仅是“小于”,还包括“等于”.

典型例题

例1 如图1-2,B,F,C,D四点共线,若$\angle B=\angle D$,$\angle A=\angle E$,$BF=CD$.求证:$AC=EF$.

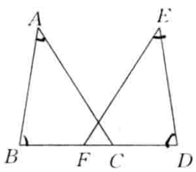


图1-2

证明:$\because BF=CD$,

$\therefore BF+FC=CD+FC$.

$\therefore BC=FD$.

在$\triangle ABC$和$\triangle EDF$中,$\angle A=\angle E$,$\angle B=\angle D$,$BC=FD$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle EDF$(AAS).

$\therefore AC=EF$(全等三角形对应边相等).

评注 欲证明线段AC与EF相等,可观察图形,看AC与EF分别包含在哪两个三角形中.由图1-2不难发现,AC包含在$\triangle ABC$中,EF包含在$\triangle EDF$中,这两个三角形已有$\angle B=\angle D$,$\angle A=\angle E$两组角对应相等,要想证明它们全等,只要有一边对应相等即可,这一条件可由$BF=CD$得到,因为不难发现BF,CD分别加上公共部分FC,即可得到$BC=FD$.

例2 如图1-3,$AB=AC$,$AD=AE$,$\angle BAD=\angle CAE$,求证:$BE=CD$.

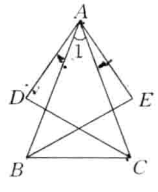


图1-3

证明:$\because \angle BAD=\angle CAE$,

$\therefore \angle BAD+\angle 1=\angle CAE+\angle 1$.

$\therefore \angle DAC=\angle EAB$.

在$\triangle DAC$和$\triangle EAB$中,

$AD=AE$,$\angle DAC=\angle EAB$,$AC=AB$.

$\therefore \triangle DAC\cong\triangle EAB$(SAS).

$\therefore BE=CD$(全等三角形对应边相等).

评注 欲证明线段$BE=CD$,观察图形可知:BE在$\triangle ABE$中,CD在$\triangle ACD$中.由已知条件可以发现,这两个三角形的边AD与AE,AB与AC对应相等,若有夹角$\angle DAC$与$\angle EAB$相等,就可以证明这两个三角形全等.因为$\angle BAD$与$\angle CAE$已经相等,分别加上公共部分$\angle 1$,就可得到$\angle DAC=\angle EAB$,问题也就解决了.

例3 已知:如图1-4,$AB=AC$,$\angle B=\angle C$,$\angle 1=\angle 2$,求证:$AD=AE$.

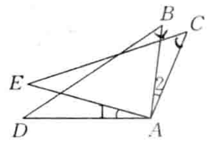


图1-4

证明:$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle 1+\angle EAB=\angle 2+\angle EAB$.

$\therefore \angle DAB=\angle EAC$.

在$\triangle DAB$和$\triangle EAC$中,$\angle B=\angle C$,$AB=AC$,$\angle DAB=\angle EAC$,

$\therefore \triangle DAB\cong\triangle EAC$(ASA).

$\therefore AD=AE$(全等三角形对应边相等).

评注 由前两题的证明,我们可以探索出证明线段相等的一种方法——搭建三角形法.本题中,欲证$AD=AE$,可由AD,AE为一边,搭建$\triangle ADB$和$\triangle AEC$.而在这两个三角形中,已有$\angle B=\angle C$,边$AB=AC$,只需再证出$\angle DAB=\angle EAC$即可.这可由$\angle 1$,$\angle 2$分别加上公共部分$\angle EAB$得到.须要注意的是:由已知等量分别加上公共量得到新等量相等,是解决此类问题的重要方法之一.

例4 已知:如图1-5,$\triangle ABC$中,D为BC延长线上一点,且$CD=AC$,F为AD的中点,CE平分$\angle ACB$.求$\angle ECF$的大小.

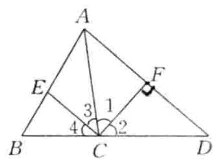


图1-5

解:$\because CA=CD$,

$\therefore \triangle ACD$为等腰三角形.

$\because F$为AD的中点,

$\therefore CF$平分$\angle ACD$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because CE$平分$\angle ACB$,

$\therefore \angle 3=\angle 4$.

$\because \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$,

$\therefore \angle 1+\angle 3=90^\circ$.

即$\angle ECF=90°$.

评注 熟练掌握定理,由F为AD中点联想到CF也是等腰三角形ACD的顶角平分线,是解题的关键.

例 5 已知:如图 1-6,$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D为AB上一点,$DE\perp BC$于E,ED的延长线交CA的延长线于F.求证:$AD=AF$.

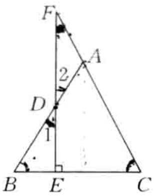


图 1-6

证明:$\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because DE\perp BC$,

$\therefore \angle 1+\angle B=90°$,

$\angle C+\angle F=90°$.

$\therefore \angle 1=\angle F$.

$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle F=\angle 2$.

$\therefore AF=AD$.

评注 证明两条线段相等时,若两条线段位于两个三角形中,可以考虑证明两个三角形全等;若两条线段位于一个三角形中,则可以考虑"等角对等边"这条定理.

例 6 如图 1-7,$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$于D,$\angle A=30°$,$AC=6\sqrt{3}$,求BC和BD的长.

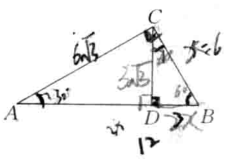


图 1-7

解:在$Rt\triangle ACD$中,

$\because \angle A=30°$,

$\therefore CD=\frac{1}{2}AC$.

$\because AC=6\sqrt{3}$,

$\therefore CD=3\sqrt{3}$.

$\because \angle ACB=90°$,$\angle A=30°$,

$\therefore \angle B=60°$.

$\therefore \angle DCB=30°$.

$\therefore BD=\frac{1}{2}BC$.

设$BD=x$,则$BC=2x$,

$\because BC^2=BD^2+CD^2$(勾股定理),

$\therefore 4x^2=x^2+27$,

$3x^2=27$,

$x^2=9$,

$x=3$.

$\therefore BC=2x=6$,

$BD=x=3$.

评注 图 1-7 中有 3 个直角三角形($Rt\triangle ACB$,$Rt\triangle ACD$,$Rt\triangle BCD$),以AC作斜边的直角三角形是$Rt\triangle ACD$,由此可以求出CD.要求的BC,BD与CD恰好又构成$Rt\triangle BCD$,且能计算出$\angle 1=30°$,这样可以得到BC与BD之间的数量关系,结合勾股定理,问题就解决了.

例 7 已知:如图 1-8,BE和CF是$\triangle ABC$的高,H是BE和CF的交点,$HB=HC$,$\angle A=60°$.求证:$\triangle ABC$是等边三角形.

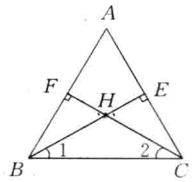


图 1-8

证明:$\because HB=HC$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because BE\perp AC$,$CF\perp AB$,

$\therefore \angle BEC=\angle CFB$.

在$\triangle BCE$和$\triangle CBF$中,

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 2,\\ \angle BEC=\angle CFB,\\ BC=CB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE\cong\triangle CBF$.

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形.

$\because \angle A=60°$,

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

评注 证明等边三角形的方法有:①证三角形的三边都相等;②证三角形的三个角都相等或证有两个角为60°;③证三角形有两边相等,且有一个角等于60°.

教材例题习题的变形题

例 1 (**P9—1**)如图 1-9,$\triangle ABC$中,$AB=AC$,AD平分$\angle BAC$的外角.求证:$AD/\!/BC$.

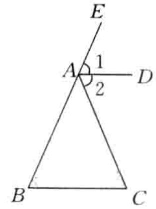


图 1-9

证明:$\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because AD$平分$\angle CAE$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because \angle BAC+\angle B+\angle C=180°$,

$\angle BAC+\angle 1+\angle 2=180°$,

$\therefore \angle B+\angle C=\angle 1+\angle 2$.

即 $2\angle 1=2\angle B$.

$\therefore \angle 1=\angle B$.

$\therefore AD/\!/BC$.

评注 证明两线平行的方法有：①同位角相等，两直线平行；②内错角相等，两直线平行；③同旁内角互补，两直线平行；④平行于同一条直线的两直线平行；⑤垂直于同一条直线的两条直线平行. 本题由已知条件可观察出，同位角或内错角的信息比较丰富，故应采用证同位角相等或内错角相等的方法.

例 2 **(P12 例 2)** $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，CD 为一腰上的高，$CD=2a$，且 CD 与底边的夹角为 $75°$，求 $S_{\triangle ABC}$.

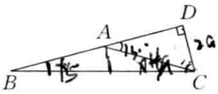


图 1 - 10

解：如图 1 - 10，

$\because \angle DCB=75°$，$CD\perp BD$，

$\therefore \angle B=15°$.

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle 1=15°$.

$\therefore \angle DAC=30°$.

在 Rt$\triangle ADC$ 中，

$\because CD=2a$，

$\therefore AC=4a$.

$\therefore AB=4a$.

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 4a\times 2a=4a^2$.

评注 本题能按题意作出正确的图形很重要. 一般我们是先作出了图 1 - 11 这样的图形，$\because \angle 1=75°$，$\therefore \angle B=15°$，$\angle ACB$ 也应为 $15°$. 这就形成了 $\angle DCB>\angle ACB$ 的矛盾. 由此，我们可以判断出，这个三角形不应是锐角三角形，于是想到是钝角三角形. 有了准确的图形，问题就迎刃而解了.

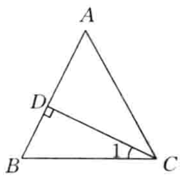


图 1 - 11

例 3 **(P14—2)** 如图 1 - 12，把矩形 $ABCD$ 对折，设折痕为 MN，再把点 B 叠在折痕线上，得到 Rt$\triangle ABE$，沿着 EB 线折叠，得到 $\triangle EAF$，判断 $\triangle EAF$ 的形状.

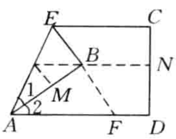


图 1 - 12

解：$\because$ 把矩形对折的折痕为 MN，

且把点 B 折在 MN 上，

$\therefore \angle EBA=90°$，$EB=BF$.

$\because$ 在 $\triangle EBA$ 和 $\triangle FBA$ 中，

$$\begin{cases}EB=BF,\\ \angle EBA=\angle FBA=90°,\\ AB=AB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle EBA\cong\triangle FBA$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore AE=AF$.

$\because \angle 1$ 与折叠在 $\angle 1$ 下面的角相等，

$\therefore 2\angle 1+\angle 2=90°$.

$\therefore 3\angle 1=90°$.

$\therefore \angle 1=30°$.

$\therefore \angle EAF=60°$.

又 $\because AE=AF$，

$\therefore \triangle EAF$ 为等边三角形.

评注 注意：①折叠前后的图形关于折痕对称(或者折叠前后的图形全等)；②折叠前后对应的线段、角相等；③折叠后有被盖住的部分.

学科内综合题

例 1 如图 1 - 13，C 是线段 AB 上一点，在 AB 同侧作等边三角形 ADC 和等边三角形 BCE. 求证：$AE=DB$.

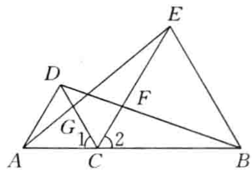


图 1 - 13

证明：$\because \triangle ADC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle 1=60°$，$AC=DC$.

$\because \triangle ECB$ 为等边三角形，

$\therefore \angle 2=60°$，$EC=BC$.

$\therefore \angle 1+\angle DCE=\angle 2+\angle DCE$.

$\therefore \angle ACE=\angle DCB$.

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$$\begin{cases}AC=DC,\\ \angle ACE=\angle DCB,\\ CE=BC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle DCB$.

$\therefore AE=DB$.

评注 以 AE 为边能找到 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AEB$，以 BD 为边能找到 $\triangle BDC$ 和 $\triangle BDA$，可以发现

$\triangle AEC$ 和 $\triangle BDC$ 有全等的可能. 结合等边三角形的性质,全等的条件就容易找到.

例 2 如图 1-14, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, AD 是 $\angle CAB$ 的平分线. 过点 B 作 $BE\perp AD$, 交 AD 的延长线于点 E. 求证: $BE=\frac{1}{2}AD$.

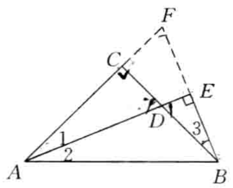


图 1-14

证明:延长 AC, BE 交于点 F.

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$, $\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because AE\perp BE$, $\therefore \angle AEB=\angle AEF=90^\circ$.

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AEF$ 中,

$\angle 1=\angle 2$, $AE=AE$, $\angle AEB=\angle AEF$,

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle AEF(ASA)$.

$\therefore AF=AB$.

$\because AE\perp BF$, $\therefore BF=2BE$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$\angle 1=\angle 3$, $AC=BC$, $\angle ACD=\angle BCF$,

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle BCF(ASA)$.

$\therefore BF=AD$, $\therefore 2BE=AD$.

$\therefore BE=\frac{1}{2}AD$.

评注 解答此类题目,从结论入手分析,容易打开思路. 要证明 $BE=\frac{1}{2}AD$,其实就是证明 $2BE=AD$. 图中只有 BE, $2BE$ 在哪里呢? 我们自然有想再延长出一倍 BE 的想法,是否可行呢? 通过条件"$AE\perp BE$ 且 AE 平分 $\angle CAB$",发现 AE 这条线的特征——既是垂线,又是角的平分线,很容易联想到等腰三角形中的"三线合一",AE 能够成为某个等腰三角形的高线,于是找到了解题思路. 结合我们曾经用折纸得知折痕能将一个等腰三角形分成两个全等三角形的经历,不妨将这种添加辅助线的方法归纳为"垂线角分线,翻转全等连".

例 3 如图 1-15, $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle A$ 的平分线, P 是 AD 上任意一点. 试比较 $AB-AC$ 与 $PB-PC$ 的大小.

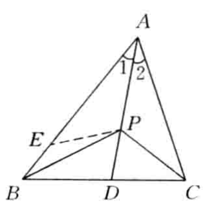


图 1-15

解:在 AB 上取一点 E,使 $AE=AC$.

$\because AD$ 是 $\angle A$ 的平分线,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle ACP$ 中,

$AE=AC$, $\angle 1=\angle 2$, $AP=AP$,

$\therefore \triangle AEP\cong\triangle ACP(SAS)$.

$\therefore PE=PC$.

$\therefore AB-AC=AB-AE=BE$,

$PB-PC=PB-PE$.

在 $\triangle PBE$ 中,

$PB-PE<BE$,

$\therefore PB-PC<AB-AC$.

评注 要比较线段和、差的大小,可以借助于三角形三边之间的关系:两边之和大于第三边,两边之差小于第三边. 这就要求把要比较的线段移到同一个三角形中,怎样移动呢? 通过"AD 是 $\angle A$ 的平分线"这个条件,结合折纸的经历,想到以 AD 为轴,可以把较小的三角形翻折到较大的三角形中,由于翻折前后的三角形是全等的,于是得到了辅助线的作法.

例 4 已知:如图 1-16, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 为腰 AB 上一点, E 为腰 AC 延长线上一点, $BD=CE$. 求证: DE 被 BC 二等分.

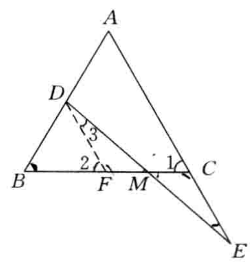


图 1-16

证明:过 D 点作 $DF\parallel AC$ 交 BC 于 F.

$\because DF\parallel AC$,

$\therefore \angle 2=\angle 1$.

$\because AB=AC$, $\therefore \angle B=\angle 1$.

$\therefore \angle B=\angle 2$. $\therefore DB=DF$.

$\because BD=CE$, $\therefore DF=CE$.

$\because DF\parallel CE$, $\therefore \angle 3=\angle E$.

在 $\triangle DFM$ 和 $\triangle ECM$ 中,

$\angle 3=\angle E$, $\angle DMB=\angle CME$, $DF=CE$,

$\therefore \triangle DFM\cong\triangle ECM(AAS)$.

$\therefore DM=ME$.

$\therefore BC$ 平分 DE 于点 M.

评注 这道题中,要证 $DM=ME$,容易想到证明 DM 和 EM 所在的三角形全等. EM 在 $\triangle EMC$ 中(没有别的选择), DM 所在的 $\triangle DMB$ 显然不能与 $\triangle EMC$ 全等,故考虑添加辅助线. 辅助线应具备的条件是应等于 CE,且能带来角相等的新条件,结合 $\triangle ABC$ 为等腰三角形这个条

件,发现作腰的平行线能满足上述要求.

例 5 已知:如图 1 - 17,$\triangle ABC$ 中,D 是 BC 中点,$ED \perp DF$,DE,DF 分别交 AB,AC 于 E,F. 试比较 $BE+FC$ 与 EF 的大小.

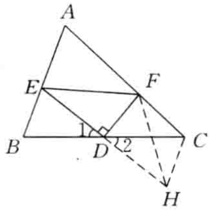


图 1 - 17

解:延长 ED 至 H,使 $DH=ED$,连接 CH,FH.

在$\triangle EBD$ 和$\triangle HCD$ 中,

$BD=DC$,$\angle 1=\angle 2$,$ED=DH$,

$\therefore \triangle EBD \cong \triangle HCD$.

$\therefore EB=CH$,$EF=FH$.

在$\triangle FCH$ 中,

$\because CH+FC>FH$,

$\therefore BE+FC>EF$.

评注 比较线段之和与某条线段大小时,可以利用"三角形两边之和大于第三边."这一定理. 在本题中,就要求把 BE,CF,EF 集中到同一个三角形中. 集中的方法是利用平移变换,有两种常用图形需熟悉,如图 1 - 18,当 D 为$\triangle ABC$ 一边中点时,我们经常将过中点的线段延长一倍,构成$\triangle ABD \cong \triangle ECD$(或$\triangle EBD \cong \triangle FCD$),这样 AB(或 EB)就能平移到 EC(或 CF)所在的位置,为成功解题准备了条件.

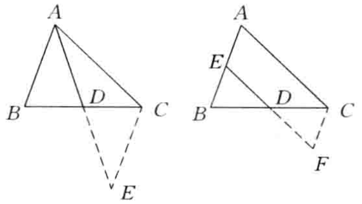


图 1 - 18

综合应用题

例 1 工人师傅常用角尺平分一个任意角,作法如图 1 - 19 所示:$\angle AOB$ 是一个任意角,在边 OA,OB 上分别取 $OM=ON$,移动角尺,使角尺两边相同的刻度分别与 M,N 重合,过角尺顶点 P 的射线 OP 便是$\angle AOB$ 的平分线,根据作法,结合图形,写出已知、求证并证明.

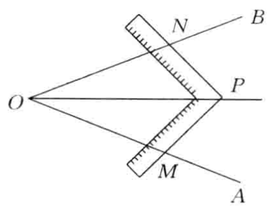


图 1 - 19

解析 因为已知 $OM=ON$,角尺两边相同的刻度分别与 M,N 重合,所以 $PN=PM$;而 OP 为公共边,容易得到$\triangle OPN \cong \triangle OPM$,所以$\angle BOP=\angle AOP$.

已知:如图 1 - 19,$OM=ON$,$PM=PN$. 求证:$\angle BOP=\angle AOP$.

证明:在$\triangle OPN$ 和$\triangle OPM$ 中,

$ON=OM$,$PN=PM$,$OP=OP$,

$\therefore \triangle OPN \cong \triangle OPM$(SSS).

$\therefore \angle BOP=\angle AOP$.

$\therefore OP$ 平分$\angle AOB$.

评注 解答应用题,关键是要从现实的背景中抽象出"纯数学"的条件,从本质上讲,几何应用题其实就是一般的几何证明或计算题. 本题中的"使角尺的两边相同的刻度分别与 M,N 重合",其实提供的就是 $PM=PN$ 这个条件.

例 2 如图 1 - 20,李明同学把一块三角形的玻璃打成了三块,现要到玻璃店去配一块完全一样的玻璃,那么最省事的方法是( ).

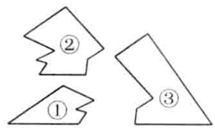


图 1 - 20

A. 带①去　　　B. 带②去

C. 带③去　　　D. 带①和②去

解析 要配完全一样的玻璃,实际就是新的三角形与原三角形全等,③中包含两角和一边,容易确定与它全等的三角形,所以应带③去.

答案 C

评注 本题初看似乎难以入手,其实从生活中的经历得知:配玻璃的本质就是寻求全等. 能决定两个三角形全等的条件有:①边角边;②角边角;③角角边;④边边边. 带哪块玻璃去最省事,其实是看哪块碎片中包含了上述四个条件中的一个. 观察图形,不难发现,碎片③正好符合"角边角"这个条件,所以带③去.

例 3 如图 1 - 21,王平要测量小口瓶下半部分的内径,他把两根相等的钢条 AA',BB' 中点连在一起,可活动 A,B 两点,使 A',B' 卡在瓶的内壁上,然后量出 AB 间的长度,就可测量出小口瓶下半部分的内径,请说明为什么?

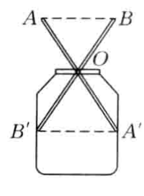


图 1 - 21

解:在$\triangle AOB$ 和$\triangle A'OB'$ 中,

$\begin{cases} OA=OA', \\ \angle AOB=\angle A'OB', \\ OB=OB', \end{cases}$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'OB'$.

$\therefore AB=A'B'$.

$\therefore AB$ 间的长度就是小口瓶下半部分的内径.

评注 量出 AB 间的长度就可测量出小口瓶下半部分的内径，从数学的角度来讲就是 $AB=A'B'$. 证明两条线段相等的方法，自然可以考虑证明三角形全等.

例 4 如图 1 - 22，修建南疆铁路时，需开挖一条隧道，为了加快施工进度，要在山的两边同时施工，从 AC 上取一点 B，使 $\angle ABD=150°$，$BD=5\ 200$ m，$\angle D=60°$，那么开挖点 E 离 D 多远正好使 A,C,E 成一条直线？

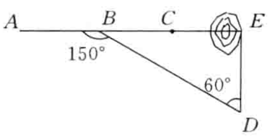


图 1 - 22

解：$\because \angle ABD=150°$，$\angle D=60°$，

$\therefore \angle BED=90°$.

$\because \angle EBD=30°$，

$\therefore ED=\frac{1}{2}BD=2\ 600$ m.

评注 要求开挖点 E 离 D 的距离，实际上就是在 $\triangle BED$ 中求边 ED 的长度. 不被"工程、隧道"等字眼迷惑，分离出纯数学信息，判断出 $\triangle BED$ 的形状，是解好这道题的关键.

创新题

例 1 (信息题)

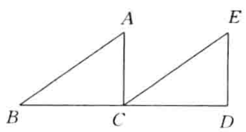


图 1 - 23

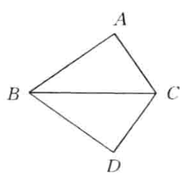


图 1 - 24

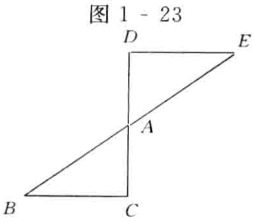


图 1 - 25

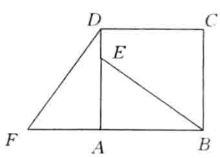


图 1 - 26

如图 1 - 23，把 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 平行移动线段 BC 的长度，可以变到 $\triangle ECD$ 的位置.

如图 1 - 24，以 BC 为轴把 $\triangle ABC$ 翻折 180°，可以变到 $\triangle DBC$ 的位置.

如图 1 - 25，以点 A 为中心，把 $\triangle ABC$ 旋转 180°，可以变到 $\triangle AED$ 的位置.

像这样，其中一个三角形是由另一个三角形按平行移动、翻折、旋转等方法变成的，这种只改变位置，不改变形状大小的图形变换，叫作三角形的全等变换.

回答下列问题：(1)在图 1 - 26 中，可以通过平行移动、翻折、旋转中的哪一种方法，使 $\triangle ABE$ 变到 $\triangle ADF$ 的位置？(2)指出图 1 - 26 中线段 BE 与 DF 之间的关系.

解析 在图 1 - 26 中，平行移动 $\triangle DAF$ 时，FA 与 AB 无法重合；无论沿 AD 还是 AF 翻折，也不能使两个三角形重合；当把 $\triangle DAF$ 绕点 A 旋转 90°之后，AD 与 AB 重合，AF 与 AE 重合，$\triangle ADF \cong \triangle ABE$，对应边 BE 与 DF 相等.

评注 阅读类的题目，要注意从文字信息中理解新定义或新名称的实质，避免生搬硬套. 注意：翻折时不一定只能上下方向折，左右也可以；旋转时不一定要转 180°，只要是以某一个点为中心旋转一定的角度且能与要求的图形重合，就是符合要求的.

例 2 (探究题) B 为线段 AD 上一动点，以 AB 和 BD 为边向同一方向作等边三角形，如图 1 - 27，得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$. 连接 AE 和 DC 交于点 F，在 B 左右运动过程中(B 不与 A,D 重合)，$\angle AFD$ 的大小是否保持不变？说明理由.

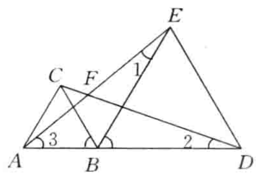


图 1 - 27

解：$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 是等边三角形，

$\therefore AB=BC$，$BD=BE$，

$\angle CBA=\angle EBD=60°$.

$\therefore \angle CBE=60°$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBD$ 中，

$AB=BC$，$\angle ABE=\angle CBD$，$BE=BD$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD$(SAS).

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because$ 在 $\triangle ABE$ 中，

$\angle 1+\angle 3=\angle EBD=60°$，

$\therefore \angle 3+\angle 2=60^\circ$.

在$\triangle AFD$中,

$\because \angle 2+\angle 3+\angle AFD=180^\circ$,

$\therefore \angle AFD=120^\circ$.

$\therefore \angle AFD$的大小保持不变,为120°.

评注　在有动点的题目中,要判断某些量的变化情况,可以采取定点分析法,即取动点在某一时刻静止的图形进行分析,得出规律.本题思路并不难找,因为$\angle AFD$在$\triangle AFD$中,我们可以探讨$\angle 3$与$\angle 2$的和是否变化,进而可以得出$\angle AFD$是否变化.$\angle 3$在$\triangle ABE$中,$\angle 2$在$\triangle CBD$中,对比分析这两个三角形的条件,可知$\triangle ABE\cong\triangle CBD$,$\angle 2$与$\angle 1$相等,可移到$\triangle ABE$中,这样$\angle 3$,$\angle 2$之和就变为$\angle 1$与$\angle 3$之和,由外角定理知,$\angle 1+\angle 3=\angle EBD=60^\circ$,问题得到解决.

例3　(开放题)$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是底边BC所在直线上任一点,过D点分别作两腰的高DE,DF,BG是AC边上的高.试确定三条线段DE,DF,BG之间的数量关系.

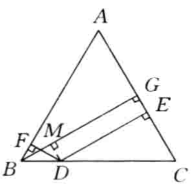


图1-28

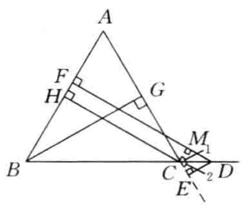


图1-29

解:D是BC边所在直线上的一点,D可能在底边BC上,可能在底边BC外,由此作出图1-28和图1-29.

如图1-28所示,D在BC上,过D作$DM\perp BG$于M,

四边形$DEGM$为矩形,$DE=MG$.

$\because DM\parallel AC$,

$\therefore \angle MDB=\angle C$.

在$\triangle BMD$和$\triangle DFB$中,

$$\begin{cases}\angle BFD=\angle BMD,\\ \angle ABD=\angle MDB=\angle C,\\ BD=BD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BMD\cong\triangle DFB$(AAS).

$\therefore BM=DF$.

$\because BG=BM+MG$,

$\therefore BG=DE+DF$.

如图1-29所示,D在BC外,过C作$CM\perp DF$于M,$CH\perp AB$,四边形$HCMF$为矩形.

$\therefore HC=MF$.

$\because CM\parallel AB$,$\therefore \angle 1=\angle B$.

$\because \angle 2=\angle ACB$,$\therefore \angle 1=\angle 2$.

在$\triangle CMD$和$\triangle CED$中,

$$\begin{cases}\angle CMD=\angle CED,\\ \angle 1=\angle 2,\\ CD=CD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle CMD\cong\triangle CED$,$\therefore MD=DE$.

$\because DF-DM=HC$,

$\therefore DF-DE=CH$.

$\because$等腰三角形两腰上的高相等,

$\therefore BG=CH$.

$\therefore BG=DF-DE$.

评注　本题要特别注意"D是底边BC所在直线上一点"这个条件,它暗示了D可能在线段BC上,也可能在线段BC外,这为结论的开放性准备了条件.根据题意作图很关键,特别是图1-29中,过D点作AC边上的高时,垂足应落在AC边的延长线上.在探索BG,DE,DF之间的数量关系时,在图1-28中,BG最长,可联想是否$BG=DE+DF$.在图1-29中,DF最长,可联想是否$BG=DF-DE$.通过仔细研究条件,再回忆一下证明线段和差的方法——截长法(把长线段截为两部分),思路就打开了.

例4　(阅读题)用反证法证明一个命题时,一般有三个步骤.现把用反证法证明命题"一个三角形中不能有两个直角"的过程归纳为下列三个步骤:

①因为$\angle A+\angle B+\angle C=90^\circ+90^\circ+\angle C>180^\circ$,这与三角形内角和定理矛盾,所以$\angle A=\angle B=90^\circ$不成立.

②所以一个三角形中不能有两个直角.

③假设$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$中有两个是直角,不妨设$\angle A=\angle B=90^\circ$.

其证明顺序正确的是(　　).

A.③,①,②　　B.③,②,①

C.①,②,③　　D.②,③,①

解析　反证法证明一个命题的三个步骤是:

①提出与结论相反的假设;

②在假设条件下推理,得出矛盾;

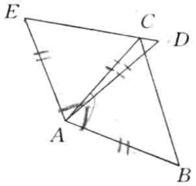
③假设不正确,得出正确结论.按照这个步骤,容易选出正确答案.

答案　A

评注 解答阅读题时，要注意把阅读获得的信息与学过的知识相联系，判断题目考的是哪部分知识，进而作出正确的解答.

中考题

例 1 **(2000 年吉林卷)** 如图1－30，已知 $AE=AC$，$AD=AB$，$\angle EAC=\angle DAB$. 求证：$\triangle EAD\cong\triangle CAB$.



SAS

图 1－30

证明： $\because \angle EAC=\angle DAB$，

$\therefore \angle EAC+\angle CAD=\angle DAB+\angle CAD$.

即 $\angle EAD=\angle CAB$.

$\because AE=AC, AD=AB$，$\therefore \triangle EAD\cong\triangle CAB$(SAS).

评注 要证明两个三角形全等，就要找这两个三角形中对应相等的边和角，本题中已知 $AE=AC$，$AD=AB$，AE，AD 在 $\triangle EAD$ 中，AC，AB 在 $\triangle CAB$ 中，既然已有两组边对应相等，若夹角也相等，三角形就会全等，题目中给出的 $\angle EAC=\angle DAB$ 是夹角 $\angle EAD$ 和 $\angle CAB$ 上的一部分，而另一部分是公共角 $\angle CAD$，利用等量加等量和相等可得出夹角 $\angle EAD=\angle CAB$.

例 2 **(2002 年淄博卷)** 如图 1－31，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AB=3$，将 CB 向 CA 方向折过去，使点 B 落 CA 上的 B' 点，并出现折痕 CE，则 $B'E$ 的长为( ).

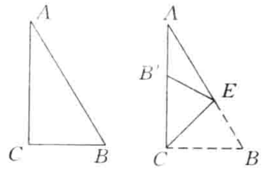


图 1－31

A. $3\sqrt{3}-3$ B. $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$

C. $3-\sqrt{3}$ D. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

解： $\because$ Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$AB=3$，

$\therefore BC=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3^2-(\frac{3}{2})^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\because$ 折叠前 $\triangle CBE\cong$ 折叠后的 $\triangle CB'E$，

$\therefore CB=CB'=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore \angle B'CE=\angle BCE=45°$，$\angle B'EC=\angle CEB$.

$\because \angle B=60°$，

$\therefore \angle B'EC=\angle CEB=180°-60°-45°=75°$.

$\therefore \angle B'EA=180°-\angle B'EC-\angle CEB=180°-75°-75°=30°$.

$\therefore \angle B'EA=\angle A$.

$\therefore AB'=B'E=AC-B'C=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

评注 由于折叠前后的图形是全等的，从而得出 $\triangle CBE\cong\triangle CB'E$. 故有 $B'E=BE$，$\angle B'CE=\angle BCE=45°$，而 $\angle B=60°$，故 $\angle B'EC=\angle CEB=75°$，所以 $\angle B'EA=\angle A=30°$，所以 $AB'=B'E$，再利用直角三角形中 30°角所对的直角边等于斜边的一半及勾股定理求出线段 AB' 即为 $B'E$ 的长.

例 3 **(2002 年济南卷)** 已知：如图 1－32，D 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的一点，E 是 AD 上一点，$EB=EC$，$\angle ABE=\angle ACE$.

求证：$\triangle AEB\cong\triangle AEC$.

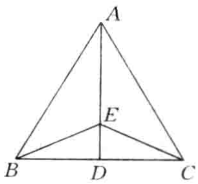


图 1－32

某学生对此题给出如下证明：

证明： 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} EB=EC, \\ \angle ABE=\angle ACE, \\ AE=AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle AEC$.

你认为该学生的证明是否正确？如果正确，请在每一步推理之后写出它的依据，如果不正确，请在下面写出它的正确证明.

该同学的证明不正确.

证明： $\because EB=EC$，

$\therefore \angle EBD=\angle ECD$.

$\because \angle ABE=\angle ACE$，

$\therefore \angle EBD+\angle ABE=\angle ECD+\angle ACE$.

即 $\angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore AB=AC$.

$\because \angle ABE=\angle ACE, BE=EC$，

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle AEC$.

评注 本题考查学生对全等三角形判定定理——SAS 的理解，已知两边对应相等，若需再加上

一组角对应相等，则必须是两对应边的夹角才可.

例 4 (**2002 年北京东城卷**)已知：如图 1 - 33，$CD\perp AB$ 于点 D，$BE\perp AC$ 于点 E，BE，CD 交于点 O，且 AO 平分 $\angle BAC$. 求证：$OB=OC$.

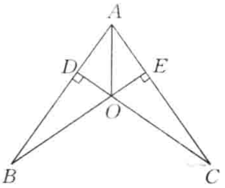


图 1 - 33

证明：$\because CD\perp AB$，$BE\perp AC$，

$\therefore \angle ADO=\angle AEO=90^\circ$.

$\because \angle DAO=\angle EAO$，$AO=AO$，

$\therefore \triangle ADO\cong\triangle AEO$(AAS).

$\therefore DO=OE$，

$\because \angle BDO=\angle CEO=90^\circ$，$\angle DOB=\angle EOC$.

$\therefore \triangle BDO\cong\triangle CEO$(ASA). $\therefore OB=OC$.

评注 要证明 $OB=OC$，可证 OB，OC 所在的 $\triangle BDO$ 与 $\triangle CEO$ 全等，由题目可知：$\angle BDO=\angle CEO=90^\circ$，对顶角 $\angle DOB=\angle EOC$. 再证出 $OD=OE$，则可证 OD，OE 所在的三角形 $\triangle ADO\cong\triangle AEO$.

例 5 (**2004 年陕西卷**)如图 1 - 34，有一腰长为 5 cm. 底边长为 4 cm 的等腰三角形纸片. 沿着底边上的中线将纸片剪开，得到两个全等的直角三角形纸片. 这两个直角三角形纸片可拼成________个不同的四边形.

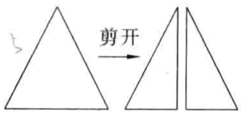


图 1 - 34

解析 如图 1 - 35 所示，可拼成四个.

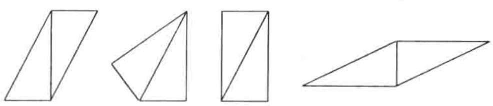


图 1 - 35

答案 4

评注 本题先考虑分别以三条边为对角线可能拼成 6 个不同的四边形，但以直角边作为对角线时，有两个三角形，故共有 4 个.

第一节同步测试

教材基础知识针对性训练●●●

一、选择题.

1. 下列说法正确的是(　　).

A. 全等三角形的角平分线长相等

B. 全等三角形的中线长相等

C. 全等三角形的高相等

D. 全等三角形的面积相等

2. 已知 $AB=AC$，$AE=AD$，那么图 1 - 36 中全等三角形共有(　　)对.

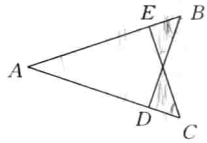


图 1 - 36

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 等腰三角形中，有一个角是 80°，则其顶角度数是(　　).

A. 80°　　B. 50°或 120°

C. 20°　　D. 80°或 20°

4. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，①$AB=A'B'$，②$BC=B'C'$，③$AC=A'C'$，④$\angle A=\angle A'$，⑤$\angle B=\angle B'$，⑥$\angle C=\angle C'$，不能保证 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ 成立的条件是(　　).

A. ①②③　　B. ①②⑤

C. ①③⑤　　D. ②⑤⑥

5. 如图 1 - 37，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC$，点 D 在 AC 上，$\angle CBD=30^\circ$，则 $\dfrac{AD}{DC}=$(　　).

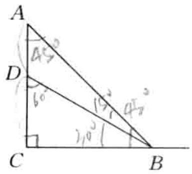


图 1 - 37

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{3}-1$　　D. 不能确定

6. 如图 1 - 38，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAD=\alpha$，$AE=AD$，则 $\angle EDC=$(　　).

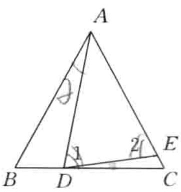


图 1 - 38

A. $\dfrac{1}{2}\alpha$　　B. $\dfrac{1}{3}\alpha$

C. $\dfrac{1}{4}\alpha$　　D. $\dfrac{2}{3}\alpha$

7. 如图 1 - 39，矩形(长方形)$ABCD$ 沿对角线 BD 对折，则(包括实线、虚线)共有全等三角形(　　).

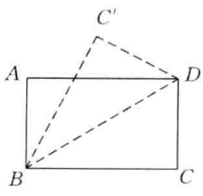


图 1 - 39

A. 2 对　　B. 3 对

C. 4 对　　D. 5 对

8. 等腰三角形两边长为 4 和 9，则周长为(　　).

A. 17　　B. 22

C. 17 或 22　　D. 9

二、填空题.

1. 三角形三内角之比为1:2:3,最小边长为5,那么最大边长为________

2. 如图1-40,$AC=DC$,$\angle 1=\angle 2$,________,$\triangle ABC\cong\triangle DEC$(请填一个已知条件).

3. 在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中,下列三个论断:① $AB=AD$,② $\angle BAC=\angle DAC$,③ $BC=DC$. 将两个论断作为条件,另一个论断作为结论构成一个命题:________.

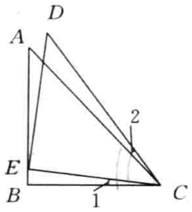


图1-40

4. 若等腰三角形的底角为15°,腰长为2,则腰上的高为________.

5. 如图1-41,若等边$\triangle ABC$的边长为b,且三角形内点P到各边距离分别为h_a,h_b,h_c,则$h_a+h_b+h_c=$________.

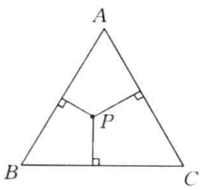


图1-41

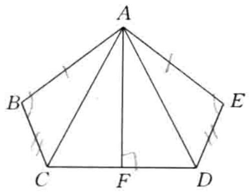


图1-42

三、解答题.

1. 已知:如图1-42,$AB=AE$,$BC=ED$,AF是CD的垂直平分线.求证:$\angle B=\angle E$.

2. 已知:如图1-43,$\angle CAB=\angle DBA$,$AC=BD$,AC交BD于点O.

求证:(1)$\triangle CAB\cong\triangle DBA$;(2)$OC=OD$.

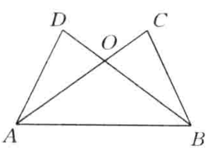


图1-43

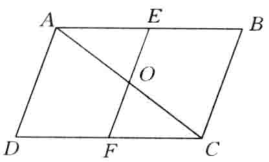


图1-44

3. 已知:如图1-44,$AB/\!/CD$,O是AC中点,过O作EF交AB,DC于E,F.求证:$OE=OF$.

4. $\triangle ABC$中(图1-45),$\angle ABC=90°$,$AB=BC$,D是AC上一点,$CF\perp BD$于F,$AE\perp BD$交BD的延长线于E,求证:$EF=BE-AE$.

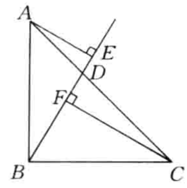


图1-45

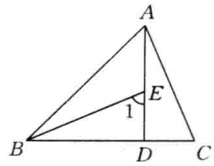


图1-46

5. $\triangle ABC$中(图1-46),$AD\perp BC$于D,$AD=BD$,$DC=DE$.求证:$\angle C=\angle 1$.

探究应用拓展性训练●●●

一、学科内综合题

1. 如图1-47,$\triangle ABC$中,DA平分$\angle BAC$,F为BC中点,$EF/\!/AD$交CA的延长线于E,交AB于G,求证:$GB=CE$.

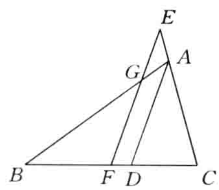


图1-47

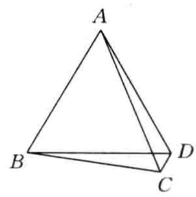


图1-48

2. 如图1-48,$AB=AC$,$\angle ABD=60°$,$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$.求证:$AB=BD+DC$.

3. 如图1-49,设P为等边$\triangle ABC$内一点,且$PA:PB:PC=3:4:5$.求$\angle APB$.

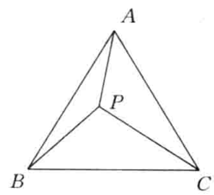


图1-49

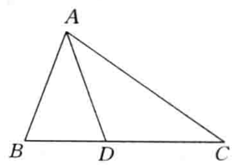


图1-50

4. $\triangle ABC$中(图1-50),$\angle B=2\angle C$,AD是$\angle A$的平分线,求证:$AB+BD=AC$.

二、信息题.

1. 如图1-51,在$\triangle ABC$中,点D,E分别在AB,AC上,给出5个论断:① $CD\perp AB$;② $BE\perp AC$;③ $AE=CE$;④ $\angle ABE=30°$;⑤ $CD=BE$.

(1)如果论断①②③④都成立,那么论断⑤一定成

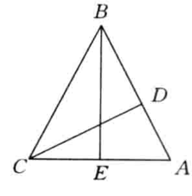


图1-51