

高級中學用

平面三角學

汪桂榮編

上海民智書局發行

中華民國二十二年八月初版

高級中學適用

平面三角學（一冊）

（每冊定價大洋六角五分）

（外埠酌加郵費匯費）

編輯者

汪

桂

榮

印刷者

民

智

印

刷

所

發行者

民

智

書

局

分發行處

民

智

書

局

分售處

海內外各大書坊

總發行所

上海河南路中市
民智書局
二〇〇至二〇二號

編者自序

本書爲高級中學必修平面三角學程而編，其注意點約略言之於下。

第一關於教材問題，注重應用略及理論，一般美國之三角教本，大都淺近實用，但大陸之三角教本則不然，材料豐富，理論精深，余以爲高中必修算學，乃一種普通訓練，祇應講算學中之家常便飯，不應講算學中之裝飾品，故美國式教本，較爲適用，本書乃根據美國出名我國通用之 Granville 三角，略爲增減編譯而成，其目標在

- (一) 使學者對於三角形解法十分熟練。
- (二) 使學者對於有效數字及精密程度透澈了解。
- (三) 使學者知用三角解決實用問題。
- (四) 使學者對於恆等式證明方程式解法均能

熟練。

(五)使學者略知測量術。

(六)使學者略知高等三角學。

本書材料除原書中所有者外，增加聯立三角方程及消去法大意，又最末一章，留教者伸縮餘地。

第二關於組織問題，採的心理次序，而不打破論理系統，由近代教育家之研究，編製課程，當用心理次序代替舊式之論理次序，關於算學本身，當然爲論理的，但爲學者學習之便利起見，則以用心理次序編纂教本爲宜，故本書先講直角三角形及斜三角形解法之淺近實用部分，次講恆等式及方程式之較深理論部分，最後略講高等三角學大意，在第一章中講銳角三角函數之定義後即講直角三角形解法，使學者略知三角即能應用，此種一針見血編法，使學者起頭即充滿興趣，本書次序大致與原書相同，但對數提至第二章，斜三角形解法提至

第四章，前者取法於 Wentworth Smith 書，後者取法於 Moritz 書。

第三關於練習問題，使學者有充分之練習，養成學者推理能力減少形式訓練，舊式教本中之習題少而難，新式教本中之習題則多而易，蓋難題乃算學中一種裝飾品，大多數學者不能自行解答多賴教師幫助，對於學者自身之思考能力毫無效益，余以爲對於基本練習，當使學者十分熟練，打成極牢固之感應結，對於理解習題，當指導學者幾條大路，使學者能自行研求，較難習題當多用預備習題以引導之，如是則學者頗有興趣而不生厭惡之心，對於思考能力自能增進，而不限於形式訓練，本書習題大都與原書相同，除有少數習題移至總復習題內，又關於三角形解法習題太多，實際學者不能全演，除便教師指定功課外無大用處，乃略減少，最後之總復習題，務使學者多加練習。

此外所注意之點，爲第四注重函數觀念及圖解表示，因中學算學教學最要緊之點在養成學者函數觀念，在三角教學上，使學者對於函數觀念最易明瞭，本書起頭即說明函數之意義，自始至終均貫輸函數觀念，更用圖解表明之，第五頭緒力求清楚，解說力求簡明，因教本與參考書不同，參考書不厭求詳，又教本與專門著作不同，專門著作往往詳於一部分而略他部分，但教本則不然，務使學者曉得三角上有幾處重要，關於最重要之處，宜簡要說明，使學者注意更便於記憶，第六公式之證明祇用最適當之一法，解問題不用特別方法，有些教本中往往一個公式用幾種證明法，解問題常用特別方法，對於學者之學習及思考方面無大效益。

又原書用四位表本書用五位表，此亦不同之點。

民國二十一年八月江都汪桂榮序

平面三角學

目 錄

第一章 銳角三角函數及直角三角形

解法

1. 銳角三角函數之定義 習題一 2. 互爲餘角之三角函數 習題二 3. 45° 之三角函數 4. 30° 及 60° 之三角函數 習題三 5. 三角函數表之用法 習題四 6. 直角三角形解法 7. 解直角三角形之步驟 習題五 8. 等腰三角形解法 習題六 9. 正多角形解法 習題七 10. 補插法 習題八 11. 測量上所用名辭 12. 航海用羅盤針 習題九

第二章 對數及直角三角形之對數解

法

29

13. 對數之定義 習題十 14. 對數之性質
習題十一 15. 常用對數 16. 決定指標之規則
17. 尾數之定理 18. 對數之加減乘除 19. 對
數表之用法 習題十二 20. 對數之應用 21.
餘對數 習題十三 22. 對數底之變換 23. 常
用對數與自然對數之關係 習題十四 24. 三角
對數表之用法 習題十五 25. 直角三角形之對
數解法 26. 計算之準確度 習題十六

第三章 任意角三角函數……………59

27. 角之產生 28. 點之坐標 29. 一點對於
原點之距離 習題十七 30. 任意角三角函數之
定義 31. 任意角三角函數之正負 32. 已知一
函數求其餘諸函數 習題十八 33. 三角函數用
線表示法 34. 三角函數之變跡 習題十九 35.
角之單位 36. 弧度角公式 習題二十 37. 第

二象限角之函數之化法 習題二十一 38. 第三象限角之函數之化法 習題二十二 39. 第四象限角之函數之化法 習題二十三 40. 負角三角函數之化法 習題二十四 41. 任意角三角函數化爲銳角三角函數之普通規則 習題二十五

第四章 斜三角形解法.....95

42. 正弦定律 43. 正弦定律之推廣 44. 正弦定律之應用 45. 兩可情形 習題二十六 46. 餘弦定律 47. 餘弦定律之應用 習題二十七 48. 正切定律 49. 正切定律之應用 習題二十八 50. 三角形之面積 習題二十九 51. 半角公式 52. 半角公式之應用 習題三十

第五章 三角函數之關係及恆等式

證明法 123

53. 三角函數之關係 54. 任一函數以其餘五
函數表之 55. 三角恆等式證明法 習題三十一

第六章 和較角之三角函數 131

56. 和角之正弦餘弦及正切 57. 公式之推廣
習題三十二 58. 較角之正弦餘弦及正切 習題
三十三 59. 倍角之三角函數 習題三十四 60
. 半角之三角函數 習題三十五 61. 函數之和
較 習題三十六 62. 三角恆等式證明法 習題
三十七 63. 三角形邊角之關係 習題三十八

第七章 反三角函數 159

64. 反三角函數之定義 習題三十九 65. 正
弦或餘割相同之諸角求其普遍值 66. 餘弦或正
割相同之諸角求其普遍值 67. 正切或餘切相同
之諸角求其普遍值 習題四十 68. 反三角函數

之恆等式證明法 習題四十一 69. 反三角函數
之方程式解法 習題四十二

第八章 三角方程式及消去法 … 171

70. 三角方程式之定義 71. 單角之三角方程式 習題四十三
72. 複角之三角方程式 習題四十四 73. 聯立三角方程式 習題四十五 74.
消去法 習題四十六

第九章 三角極限 …… 187

75. 求 $\frac{\sin x}{x}$ 及 $\frac{\tan x}{x}$ 當 $x = 0$ 時之極限 76.
近于 0° 之三角函數 77. 近于 90° 之三角函數
78. 近于 0° 之三角函數之對數 79. 近于 90° 之
三角函數之對數 習題四十七

第十章 n 角和 n 倍角之三角函數及

三角級數 194

80. 虛數 81. i 之乘方 82. 雜數 83. 雜數
定理 84. 虛數之圖解 85. 雜數之圖解 86. 雜
數之三角形式 習題四十八 87. 雜數之相乘 8
8. 雜數之乘方 89. 雜數之相除 90. 雜數之開方
習題四十九 91. n 角和之三角函數 92. r 倍
角之三角函數 習題五十 93. 三角級數 習題
五十一 94. 指數級數 95. 尤拉公式 習題五十

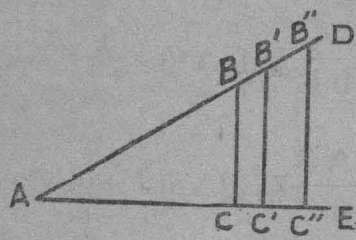
二

高中平面三角學

第一章

銳角三角函數及直角三角形解法

1. 銳角三角函數之定義



如圖DAE 爲一銳角，
于AD上任取B, B', B''.... 作
BC, B'C', B''C''垂直於AE. 如
是得一羣相似三角形BAC,

B'AC', B''AC'',

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \dots, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC''}{AB''}$$

$$= \dots, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''}$$

A 角不變時，各比之值亦不變，若A 角變時，

高中平面三角學

則各比之值亦隨之而變，故各比均爲A角之函數，

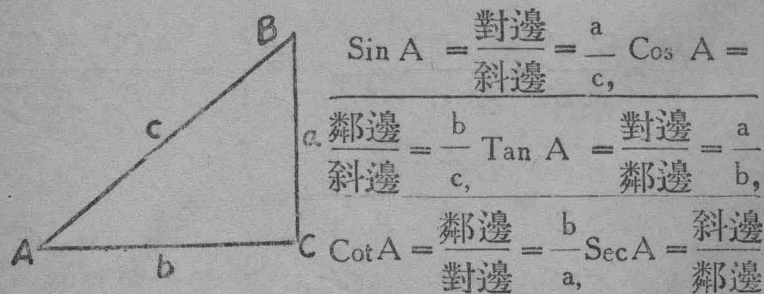
取直角三角形任意兩邊而求其比，共得六種不同之比，故A角之三角函數亦有六種，其名稱如下。

$\frac{BC}{AB}$ 稱爲A角之正弦 Sin, $\frac{AC}{AB}$ 稱爲A角之餘弦 Cos

$\frac{BC}{AC}$ 稱爲A角之正切 Tan, $\frac{AC}{BC}$ 稱爲A角之餘切 Cot

$\frac{AB}{AC}$ 稱爲A角之正割 Sec, $\frac{AB}{BC}$ 稱爲A角之餘割 Csc

由是得六種銳角三角函數之定義如下。

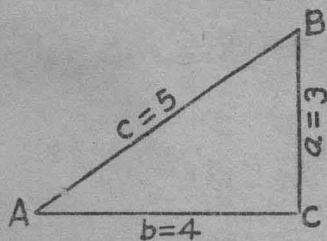


$$= \frac{c}{b}, \quad \text{斜邊} \\ \text{對邊} = \frac{c}{a}$$

由上之定義可知六種三角函數之中，有三者爲其餘三者之倒數。

$$\text{Cot } A = \frac{1}{\text{Tan } A}, \quad \text{Sec } A = \frac{1}{\text{Cos } A}, \quad \text{Csc } A = \frac{1}{\text{Sin } A}$$

例一 已知 $a=3, b=4$ 求 A 角之三角函數

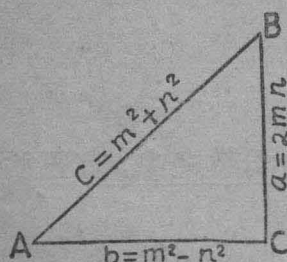


$$\text{解 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\text{Sin } A = \frac{3}{5}, \quad \text{Cos } A = \frac{4}{5},$$

$$\text{Tan } A = \frac{3}{4}, \quad \text{Csc } A = \frac{5}{3}, \quad \text{Sec } A = \frac{5}{4}, \quad \text{Cot } A = \frac{4}{3}$$

例二 已知 $a=2mn, b=m^2-n^2$ 求 A 角之三角函數。



解 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= \sqrt{(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2}$$

$$= \sqrt{m^4 + 2m^2n + n^4} = m^2 + n^2$$

$$\sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

$$\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$$

例三 已知 $\sin A = \frac{4}{5}$, $a = 80$ 求 c

解 $\because \sin A = \frac{a}{c}, \therefore \frac{4}{5} = \frac{80}{c}$ 解之得 $c = 100$

習 題 一

1. 已知 $b = 2, c = \sqrt{11}$ 求 A 角之三角函數
2. 已知 $a = 40, c = 41$ 求 B 角之三角函數
3. 已知 $a = p, b = q$ 求 A 角之三角函數