上海大学出版社

2007年上海大学博士学位论文 9

非线性规划中的罚函数及填充函数方法

● 作者：韩伯顺

● 专业：运筹学与控制论

● 导师：张连生

上海大学出版社

2007年上海大学博士学位论

非线性规划中的罚函数及填充函数方法

● 作 者：韩 伯 顺

● 专 业：运 筹 学 与 控 制 论

● 导 师：张 连 生

图书在版编目(CIP)数据

2007年上海大学博士学位论文.第1辑/博士学位论文编辑部编著.—上海:上海大学出版社,2010.9
ISBN 978-7-81118-650-5

Ⅰ.①2… Ⅱ.①博… Ⅲ.①博士—学位论文—汇编—上海市—2007 Ⅳ.①G643.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第132864号

2007年上海大学博士学位论文

——第1辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路99号 邮政编码200444)

(http://www.shangdapress.com 发行热线66135110)

出版人:姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本890×1240 1/32 印张311.75 字数8390千

2010年9月第1版 2010年9月第1次印刷

印数:1~400

ISBN 978-7-81118-650-5/G·543 定价:1200.00元(60册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2007)

The Penalty Function and Filled Function Methods in Nonlinear Programming

Candidate: Han Boshun
Major: Operations Research & Cybernetics
Supervisor: Zhang Liansheng

Shanghai University Press
· Shanghai ·

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单：
（工作单位职称）

主任：	王哲民	教授，复旦大学	200433
委员：	唐国春	教授，上海第二工业大学	201209
	孙世杰	教授，上海大学	200436
	徐以汎	教授，复旦大学	200433
	鲁习文	教授，华东理工大学	200237
导师：	张连生	教授，上海大学	200436

答辩日期：2006 年 12 月 23 日

评阅人名单：

韩继业	教授，中科院应用数学所	100049
夏尊铨	教授，大连理工大学应用数学系	116024
濮定国	教授，上海同济大学应用数学系	200092

答辩委员会对论文的评语

韩伯顺的论文，对有约束全局最优的罚函数及填充修正打洞函数法，进行了深入的探讨。

有约束最优化问题及全局最优化问题都是数学规划中的重要研究课题，有广泛的应用，近年来虽有长足进展，但仍有不少问题有待深入探讨，因此对它的研究是十分有意义的。

本文主要是对有约束最优化问题的求解途径、乘子精确罚函数和全局近似精确光滑罚函数进行相当深入的探讨，并给出了很好的结果，此外，还给出了一个求解全局最优解的既是填充函数又是修正打洞函数的填充修正打洞函数，把填充函数和打洞函数作了重要的补充。

从全文看，作者对有关专业基础知识有充分的掌握，并有较强的科研和创新能力，是一篇优良的博士论文。

答辩委员会表决结果

答辩委员会一致通过答辩，并建议授予博士学位。

答辩委员会主席：王哲民

2006 年 12 月 23 日

摘　　要

最优化理论和方法的出现可以追溯到十分古老的极值问题，然而，它成为一门独立的学科还是在 20 世纪 40 年代末. Dantzing 在 1947 年提出求解一般线性规划问题的单纯形算法之后，随着工业革命、信息革命的不断深化，以及计算机技术的巨大发展，至今短短的几十年，它得到了迅猛的发展. 现在，解线性规划、非线性规划以及随机规划、非光滑规划、多目标规划、几何规划、整数规划等各种最优化问题的理论研究发展迅速，新方法不断涌现，在经济、军事、科学技术等方面得到了广泛的应用，成为一门十分活跃的学科.

约束非线性规划问题广泛见于工程、国防、经济等许多重要领域. 求解约束非线性规划问题的主要方法之一是把它化成无约束非线性规划问题，而罚函数方法和拉格朗日对偶方法是将约束规划问题无约束化的两种主要方法. 罚函数方法通过求解一个或多个罚问题来得到约束规划问题的解，如果当罚参数充分大时，求单个罚问题的极小点是原约束规划问题的极小点，则称此罚问题中的罚函数为精确罚函数，否则称为序列罚函数. 针对传统罚函数的定义而言，若罚函数是简单的、光滑的，则它一定是不精确的；若罚函数是简单的、精确的，则它一定是不光滑的；若罚函数是精确的、光滑的，则它一定是复杂的. 因此我们的工作是对传统罚函数进行了改造，主要是引入了指数型罚函数和对数型罚函数，并在改造后的罚函数中增添了乘子参数，使之成为既是简单的、光滑的，又是精确的结果.

我们把这类罚函数称为简单光滑乘子精确罚函数.所谓简单的,即罚函数中包含原问题中的目标函数和约束函数而不包含它们的梯度,若罚函数中包含有原问题中目标函数和约束函数的梯度,则称为是复杂的.

全局最优化是最优化的一个重要分支.全局最优化算法,从算法的构造上大体可以分为确定型算法和随机型算法,例如,填充函数法、打洞函数法属于确定型算法;模拟退火法、遗传算法属于随机型算法.我们在这篇文章中也考虑非线性规划的全局最优化确定型算法.这篇文章的另一个主要目的就是在研究已有确定型算法的基础上,尝试提出一些改进和创新,力图在算法效果方面有所提高,在理论方面有所深化.其详细内容如下:

本论文共五章:在第一章中,简要介绍了目前国内外关于罚函数、精确罚函数、乘子精确罚函数的研究工作;第二章提出一种带有指数、对数性质的乘子罚函数,并进行了一定的数值试验,取得了较好的计算效果;第三章介绍一种光滑的近似精确罚函数,从理论上证明它的近似精确性,为进一步研究打下了基础;第四章介绍了一种全局精确罚函数,在一定的假设下该函数具有全局的精确性;第五章介绍了常见的填充函数法及给出一个新的填充修正打洞函数算法.对于一般无约束全局最优化问题,我们给出一个填充修正打洞函数的定义,它不同于传统的填充函数定义.在此基础上,提出了一个填充修正打洞函数和相应的算法,该算法降低了对参数的依赖,具有较好的可操作性.数值试验显示,该算法是有效和可靠的.

关键词 罚函数,非线性规划,全局最优解,填充函数,精确光滑罚函数

Abstract

Constrained nonlinear programming problems abound in many important fields such as engineering, national defence, finance etc. One of the main approaches for solving constrained nonlinear programming problems is to transform it into unconstrained nonlinear programming problem. Penalty function methods and Lagrangian duality methods are the two prevailing approaches to implement the transformation. Penalty function methods seek to obtain the solutions of constrained programming problem by solving one or more penalty problems. If each minimum of the penalty problem is a minimum of the primal constrained programming problem, then the corresponding penalty function is called exact penalty function. In this thesis, we first give some penalty function, and then we discuss the global exact and approximatively exact penalty property of exact penalty functions, we also discuss smoothing of exact penalty functions.

Global optimization problems abound in economic modelling, finance, networks and transportation, databases, chip design, image processing, chemical engineering design and control, molecular biology, and environmental engineering. Since there exist multiple local optima that differ from the global solution, and the traditional minimization techniques for

nonlinear programming are devised for obtaining local optimal solution, how to obtain the globally optimal solutions is very important topic. In this thesis, we also discuss the filled function methods for global optimization and give a new filled function.

This paper mainly consists of five chapters.

In the first chapter, we give a brief introduction to the existing research work on penalty functions.

In the second chapter, we give an multiplier penalty function and discuss its properties. Based on the penalty function, an algorithm is given.

In chapter three, a kind of smoothing and approximatively exact penalty functions is given, and its approximatively exact property is proved. Finally an algorithm is given.

In chapter four, the global exact penalty function is given, we first prove its properties, then an algorithm is given.

In the last chapter, for global optimization problems, we give a new algorithm called filled modified tunnelling function methods. an auxiliary function called filled modified tunnelling function is first given, it has good properties of filled function and tunnelling function. Then, based on the function, an algorithm is given. The implementation of the algorithms on several test problems is reported with satisfactory numerical results.

Key words nonlinear programming, penalty function, tunnelling function, global optimization, filled function

目　　录

第一章　基础知识及相关结论

1.1　基础知识

考虑如下约束非线性规划问题

$$
\begin{aligned}
(P)\quad & \min f(x) \\
& \text{s. t. } g_i(x) \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\
& x \in X
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

其中 f, g_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ 是定义在 R^n 上的非线性连续可微函数，X 是 R^n 的一个子集，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是 n 维向量. 集合

$$S = \{x \in X \mid g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

表示为问题(P)的可行域，S 中的点称为问题(P)的可行点.

设 $x^* \in S$，若存在 x^* 的领域

$$O(x^*, \delta) = \{x \mid \| x - x^* \| < \delta\},$$

使对任意 $x \in S \cap O(x^*, \delta)$成立

$$f(x^*) \leqslant (<) f(x),$$

则称 x^* 为问题(P)的(严格)局部极小点.

设 $x^* \in S$，若对任意 $x \in S$，成立

$$f(x^*) \leqslant (<) f(x),$$

则称 x^* 为问题(P)的(严格)全局极小点. 记 $L(P)$和 $G(P)$分别表示问题(P)的局部极小点和全局极小点的集合.

如何寻求问题(P)的局部极小点和全局极小点的方法是我们需要研究和探讨的课题.

假定问题(P)的可行域 S 为紧集,对任何 $x \in X \subset R^n$,我们定义指标集如下:

$$I(x) = \{i \mid g_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m\},$$

$$I^+(x) = \{i \mid g_i(x) > 0,\ i = 1, 2, \cdots, m\},$$

$$I^-(x) = \{i \mid g_i(x) < 0,\ i = 1, 2, \cdots, m\}.$$

显然 $I(x) \cup I^+(x) \cup I^-(x) = \{1, 2, \cdots, m\}$,问题($P$)的 Lagrange 函数 L: $R^n \times R^m \to R$ 定义为

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x).$$

其中

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^T,$$

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))^T.$$

若对 $x^* \in S$,存在 $\lambda^* \in R_+^m = \{\lambda \in R^m : \lambda_i \geqslant o,\ i = 1, 2, \cdots, m\}$,使得

$$\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m.$$

则称 x^* 为问题(P)的 KKT 点,λ^* 为与 x^* 相对应的 KKT 乘子向量,其中 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_m^*)^T \in R_+^m$, $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m$,称为互补松弛条件. 若对所有 $i \in I(x^*)$, $\lambda_i^* > 0$,则称在 x^* 处严格互补松弛条件成立.

定理 1.1.1 (KKT 必要条件,见文献[11]定理 4.2.13)设在问题(P)中,x^* 为可行点, f, $g_i(i \in I(x^*))$ 在 x^* 可微, $g_i(i \overline{\in} I(x^*))$ 在 x^* 连续,并且 $\nabla g_i(x^*)(i \in I(x^*))$ 线性无关. 若 x^* 是局部极小

点,则存在 $\lambda^* \in R_+^m$ 使得

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

此外若 $g_i(i \bar{\in} I(x^*))$ 在 x^* 也可微,则 KKT 条件可写成

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

$$\lambda_i^* \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

下面,对于凸规划,给出最优解的充分条件.

定理 1.1.2 (见文献[11]定理 4.3.8)设 $f,\ g_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 在 R^n 上连续可微,且设 $f,\ g_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 是凸函数,若在 x^* 处 KKT 必要条件成立,则 x^* 是全局极小点.

定理 1.1.3 (二阶充分条件)(见文献[11]定理 4.4.2)设在问题(P)中,$f,\ g_i\ (i=1,\ 2,\cdots,\ m)$,在 R^n 上二次可微,x^* 为 KKT 点,且 λ_i^* 为 Lagrange 乘子,记

$$I^+ = \{i \in I(x^*) \mid \lambda_i^* > 0\},\ I^0 = \{i \in I(x^*) \mid \lambda_i^* = 0\}.$$

$L(x,\lambda)$在 x^* 的 Hessian 阵为

$$\nabla^2 L(x^*,\ \lambda^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla^2 g_i(x^*).$$

其中$\nabla^2 f(x^*)$,$\nabla^2 g_i(x^*)(i \in I(x^*))$ 分别是 $f,\ g_i(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 在 x^* 的 Hessian 阵.

关于锥

$$C = \{p \mid \nabla g_i(x^*)^T p = 0,\ i \in I^+,\ \nabla g_i(x^*)^T p \leqslant 0,\ i \in I^0\},$$

于是,$\forall\ p \in C$,都有

$$p^T \nabla^2 L(x^*,\ \lambda^*) p > 0,$$