北大燕园

2015年 李正元·李永乐

考研数学4

数学

数学一

历年试题解析

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

2015年李正元·李永乐考研数学

数学

数学一

历年试题解析

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 范培华

中国政法大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2015年李正元·李永乐考研数学．数学历年试题解析．数学一/李正元,李永乐,范培华主编．—北京:中国政法大学出版社,2014.1
ISBN 978-7-5620-5229-6

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①李…　②李…　③范…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第010928号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址	北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　址	http://www.cuplpress.com(网络实名:中国政法大学出版社)
电　话	010-58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　印	北京旺都印务有限公司
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	25
字　数	660千字
版　次	2014年1月第1版
印　次	2014年1月第1次印刷
定　价	39.80元

前　　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了2000年~2014年全国硕士研究生入学统考数学一试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学一试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地察出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学一的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学二、三以及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了 1998 年（含）以前数学一相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学一的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后部归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读**《考研数学复习全书》（数学一）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2 ~3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2014 年 1 月

目　　录

第一篇　2014年考研数学一试题及答案与解析

第二篇　2000～2013年考研数学一试题

第三篇　2000～2013年考研数学一试题分类解析

第一篇　2014 年考研数学一试题及答案与解析

2014 年考研数学一试题

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.　　(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$.　　(D) $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$.　　【　】

(2) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x) = f(0)(1 - x) + f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$.　　(B) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$.　　(D) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant g(x)$.　　【　】

(3) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x =$

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$.　　【　】

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1\cos x - b_1\sin x)^2\,\mathrm{d}x = \min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2\,\mathrm{d}x\right\}$，则 $a_1\cos x + b_1\sin x =$

(A) $2\sin x$.　　(B) $2\cos x$.　　(C) $2\pi\sin x$.　　(D) $2\pi\cos x$.　　【　】

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad - bc)^2$.　　(B) $-(ad - bc)^2$.　　(C) $a^2d^2 - b^2c^2$.　　(D) $b^2c^2 - a^2d^2$.

【　】

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k, l，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的

(A) 必要非充分条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.　　【　】

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B) = 0.5$，$P(A - B) = 0.3$，则 $P(B - A) =$

(A) 0.1.　　(B) 0.2.　　(C) 0.3.　　(D) 0.4.　　【　】

(8) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \dfrac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$，随机变量 $Y_2 = \dfrac{1}{2}(X_1 + X_2)$，则

(A) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$.　　(B) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$.

(C) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$.　　(D) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$.　　【　】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 曲面 $z = x^2(1-\sin y) + y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x) = 2(x-1), x \in [0,2]$,则 $f(7) =$ ________.

(11) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ ________.

(12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L z\,dx + y\,dz =$ ________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是________.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.若 $c\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计,则 $c =$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(**本题满分 10 分**)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_1^x \left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) - t\right]dt}{x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(**本题满分 10 分**)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定,求 $f(x)$ 的极值.

(17)(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数,$z = f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x\cos y)e^{2x}$.

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(**本题满分 10 分**)

设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leqslant 1)$ 的上侧,计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3\,dy\,dz + (y-1)^3\,dz\,dx + (z-1)\,dx\,dy.$$

(19)(**本题满分 10 分**)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \dfrac{\pi}{2}, 0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(Ⅰ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;(Ⅱ)证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20)(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)(**本题满分 11 分**)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;(Ⅱ)求 EY.

(23)(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$

其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 EX 与 EX^2;(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(Ⅲ)是否存在实数 a,使得对任何 $\varepsilon>0$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$?

2014 年考研数学一试题答案与解析

一、选择题

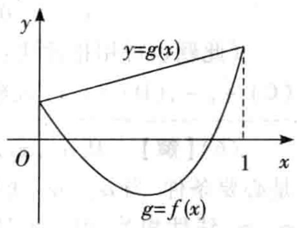
(1)【**分析**】 显然这几条曲线均无垂直与水平渐近线,就看哪条曲线有斜渐近线. 对于(C).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\Big/x\right)=1,\ \lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$$

故有斜渐近线 $y=x$. 选(C).

---

(2)【**分析一**】 $y=f(x)$ 在$[0,1]$上是凹函数(设 $f(x)$ 在$[0,1]$二阶可导,不妨$f''(x)>0$),$y=g(x)$ 是连接$(0,f(0))$与$(1,f(1))$的线段. 由几何意义知 $f(x)\leqslant g(x)(x\in[0,1])$. 选(D).



【**分析二**】 令 $w(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow w(0)=f(0)-f(0)=0,w(1)=f(1)-f(1)=0$

在$[0,1]$上,当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$w''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)\geqslant 0\Rightarrow w(x)\leqslant 0$,即 $f(x)\leqslant g(x)$. 选(D).

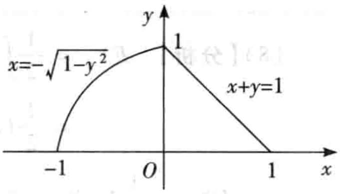
评注 由 $w(x)$ 的条件及罗尔定理,$\exists c\in(0,1)$,$w'(c)=0$,由 $w'(x)$ 在$[0,1]$单调不减,

$$\Rightarrow w'(x)\begin{cases}\leqslant w(c)=0\ (x\in[0,c]) \\ \geqslant w(c)=0\ (x\in[c,1])\end{cases}\Rightarrow w(x)\begin{cases}\leqslant w(0)=0\ (x\in[0,c]) \\ \leqslant w(1)=0\ (x\in[c,1])\end{cases}$$

$\Rightarrow w(x)\leqslant 0(x\in[0,1])$

---

(3)【**分析**】 $I\xlongequal{\text{记}}\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)dx=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,$D$ 如图



$(D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1-y\}$. 若改为先 y 后 x 的积分顺序,(**A**)、(**B**)均不对. 故改为极坐标变换,此时 $x+y=1$ 的极坐标方程是 $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$,于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

选(D).

(4)【分析】 考察二元函数 $f(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 dx$,由

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)(-\cos x) dx = 2a\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)(-\sin x) dx = -4\int_0^{\pi} x\sin x dx + 2b\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= 4\int_0^{\pi} x d\cos x + 2b\pi = 4x\cos x \Big|_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} \cos x dx + 2b\pi = -4\pi + 2b\pi = 0$$

$\Rightarrow b = 2$.

由于 $f(a,b)$ 在全平面存在最小值 $\Rightarrow f(0,2) = \min\limits_{a,b\in R} f(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - 2\sin x)^2 dx$

因此 $a_1\cos x + b_1\sin x = 2\sin x$. 选(A).

评注 求 $f(a,b)$ 的偏导数时可以在积分号下求偏导数,上述解法就是这样. 当然,我们也可把被积表达式的平方项展开:

$$f(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - 2ax\cos x - 2bx\sin x + 2ab\cos x\sin x) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx + \pi a^2 + \pi b^2 - 2b\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx$$

同样可求得 $\frac{\partial f}{\partial a}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial b}$.

(5)【解】 计算出这个行列式. 比较好的方法为先交换第2,3两行,再把第1列和第2,3列邻换:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2.$$

(此题也可用排除法:4个选项中都有 a^2d^2 和 b^2c^2,但是前面的符号不同,(A)都是 +,(B)都是 −,(C) +, −,(D) −, +. 观察完全展开式中它们的系数都是 −,可排除(A)、(C)、(D).

(6)【解】 从 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关容易得到 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关(可用定义或计算秩),因此是必要条件. 当 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,并且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$ 时对于任意常数 $k, l, \boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,因此不是充分条件.

(7)【分析】 由于事件 A 与 B 独立,故有

$$\boldsymbol{P}(A - B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B) = 0.5\boldsymbol{P}(A) = 0.3$$

从而 $\boldsymbol{P}(A) = 0.6$

$$\boldsymbol{P}(B - A) = \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B) = 0.5 - 0.3 = 0.2.$$

所以选(B).

(8)【分析】 $\boldsymbol{E}Y_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y[f_1(y) + f_2(y)] dy = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x f_2(x) dx\right]$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}X_1 + \boldsymbol{E}X_2)$$

$$\boldsymbol{E}Y_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(X_1 + X_2) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}X_1 + \boldsymbol{E}X_2)$$

故　$EY_1 = EY_2$.

$$DY_2 = \frac{1}{4}(DX_1 + DX_2)$$

$$\begin{aligned} DY_1 &= EY_1^2 - (EY_1)^2 = \frac{1}{2}(EX_1^2 + EX_2^2) - \frac{1}{4}(EX_1 + EX_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}EX_1^2 + \frac{1}{2}EX_2^2 - \frac{1}{4}[(EX_1)^2 + (EX_2)^2 + 2EX_1EX_2] \\ &= \frac{1}{4}\{[EX_1^2 - (EX_1)^2] + [EX_2^2 - (EX_2)^2]\} + \frac{1}{4}(EX_1^2 + EX_2^2 - 2EX_1EX_2) \\ &= \frac{1}{4}(DX_1 + DX_2) + \frac{1}{4}D(X_1 - X_2) > \frac{1}{4}(DX_1 + DX_2) \end{aligned}$$

由于　$EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$，故选(D).

评注　作为选择题，可以用简单的方法加以判断：

不妨设 X_1, X_2 独立同分布，且服从标准正态分布 $N(0,1)$，则

$$Y_1 \sim N(0,1),\ Y_2 \sim N\left(0,\frac{1}{2}\right),\ EY_1 = EY_2 = 0,\ DY_1 = 1,\ DY_2 = \frac{1}{2},$$

故选(D).

二、填空题

(9)【分析】　记 $F(x,y,z) = x^2(1-\sin y) + y^2(1-\sin x) - z \Rightarrow F(1,0,1) = 0$，点$(1,0,1)$在曲面 $F(x,y,z) = 0$ 上.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x(1-\sin y) - y^2\cos x,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x^2\cos y + 2y(1-\sin x),\ \frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\bigg|_{(1,0,1)} = (2,-1,-1)$$

$\Rightarrow$ 曲面 $F(x,y,z) = 0$ 在$(1,0,1)$处的切平面方程为 $2(x-1) - y - (z-1) = 0$，即 $2x - y - z - 1 = 0$.

(10)【分析】　由 $f'(x) = 2(x-1), x \in [0,2]$，又 $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x\ (x \in [0,2])$

$\Rightarrow\ f(7) = f(3) = f(-1) = -f(1) = -[1^2 - 2] = 1$.

(11)【分析】　这是齐次微分方程：$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，令 $u = \frac{y}{x}\ (y = ux)$，

原方程化为　$u + x\frac{du}{dx} = u\ln u$，即 $x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1)$

分离变量得　$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$，即 $\frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \ln x + c_1$

积分得　$\ln|\ln u - 1| = \ln x + c_1$，即 $\ln u - 1 = cx, u = e^{cx+1}, y = xe^{cx+1}$.

由　$y(1) = e^3 \Rightarrow c = 2, y = xe^{2x+1}$.

(12)【分析一】　易写出 L 的参数方程：$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = -\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi]$，将曲线积分化为定积分得

$$I \xlongequal{\text{记}} \oint_L z\,dx + y\,dz = \int_0^{2\pi} [-\sin t(-\sin t) + \sin t(-\cos t)]dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\cos t\,dt = \pi$$

【分析二】　用斯托克斯公式. L 在平面 $y + z = 0$ 上围成部分记为 Σ，按右手法则法向朝上，Σ 的单位法向量　$\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

由斯托克斯公式 $I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$

Σ 的面积记为 σ, Σ 在 xy 平面上投影面积为 π, $\sigma\cdot\cos\gamma=\pi$, $\sigma=\sqrt{2}\pi$. 因此 $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma=\pi$.

---

(13)【解法一】 用配方法:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$$
$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2.$$

由负惯性指数为1,得 $(4-a^2)\geqslant 0$, $-2\leqslant a\leqslant 2$.

【解法二】 此二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$.

设 A 的3个特征值按照大小顺序为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$. 则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. 负惯性指数为1即 $\lambda_1<0\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$. 则 $|A|\leqslant 0$. 反之,如果 $|A|<0$,则特征值一定是2正1负,如果 $|A|=0$,则特征值一定1正1负1个0. 于是负惯性指数为 $1\Leftrightarrow|A|\leqslant 0$. 计算出 $|A|=a^2-4$,得 $-2\leqslant a<2$.

---

(14)【分析】 由于 $E(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)=c\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i^2=cnEX^2=\theta^2$,

又 $$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{2\theta}\frac{2x^3}{3\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{6\theta^2}(16\theta^4-\theta^4)=\frac{5}{2}\theta^2.$$

所以 $c=\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15)【分析与求解】 $x\to+\infty$ 时, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$,用等价无穷小因子替换与洛必达法则得

$$\text{原极限}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

---

(16)【分析与求解】 这是隐函数求极值问题. 先求 $y=f(x)$ 的驻点. 将方程对 x 求导得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0 \qquad ①$$

解出 $y'=-\frac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2}$, $y'=0\Leftrightarrow y^2+2xy=0\Leftrightarrow y+2x=0\Leftrightarrow y=-2x$

代入 $y^3+xy^2+x^2y=-6$,得 $-8x^3+4x^3-2x^3=-6$, $x^3=1$, $x=1$.

$y=f(x)$ 有唯一驻点 $x=1$(相应地 $y=-2$).

再将①式,即 $(3y^2+2xy+x^2)y'=-y(y+2x)$

在 $x=1(y=-2)$ 对 x 求导得

$$(3y^2+2xy+x^2)\Big|_{(1,-2)}y''(1)=-y(y'+2)\Big|_{(1,2)}=4$$

$\Rightarrow y''(1)>0\Rightarrow x=1$ 是极小值点.

因此 $y=f(x)$ 有唯一极值点 $x=1$,是极小值点,极小值 $f(1)=-2$.

(17)【分析与求解】 $z=f(e^x\cos y)$ 是 $z=f(u)$ 与 $u=e^x\cos y$ 的复合函数. 先由复合函数求导法，将 z 对 x,y 的偏导数满足的方程转化为 z 对 u 的导数满足的方程.

$$z=f(u)=f(e^x\cos y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)(-e^x\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y$$

两式相加得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}$

代入原方程得 $f''(u)e^{2x}=(4f(u)+u)e^{2x}$.

求 $f(u)$ 转化为求解初值问题 $\begin{cases}y''-4y=u,\\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases}$ $y=f(u)$.

相应的特征方程 $\lambda^2-4=0$，特征根 $\lambda=\pm 2$，方程有特解 $y^*=-\frac{1}{4}u$，于是通解为

$$y=c_1e^{2u}+c_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$$

由初值得 $c_1=\frac{1}{16}$，$c_2=-\frac{1}{16}$，因此 $y=f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u})-\frac{u}{4}$.

(18)【分析与求解一】 直接化为二重积分，投影到 xy 平面上，Σ 在 xy 平面上投影区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1(z=0)$，由 $z=x^2+y^2$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y$

代公式得 $$I=+\iint_D\left[(x-1)^3\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+(y-1)^3\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+(x^2+y^2-1)\right]dxdy$$

$$=-2\iint_D[(x-1)^3x+(y-1)^3y]dxdy+\iint_D(x^2+y^2-1)dxdy$$

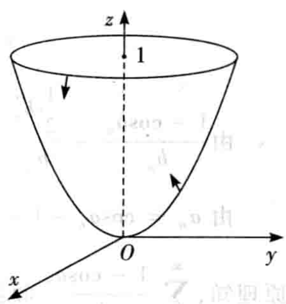
$$=-4\iint_D(x-1)^3xdxdy+\iint_D(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=-4\iint_D(x^4-3x^3+3x^2-x)dxdy+\iint_D(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=-4\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^4\cos^4\theta\cdot rdr\right]-5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr-\pi$$

$$=-4\cdot\frac{1}{6}\cdot 4\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}-5\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}-\pi=-4\pi.$$

【分析与求解二】 用高斯公式. Σ 不封闭，添加辅助面 $\Sigma_1:z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，法向量朝下. Σ 与 Σ_1 围成区域 Ω，边界取内法向.



将 $$I\xlongequal{\text{表成}}\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

先求辅面 Σ_1 上的积分，由于 Σ_1 垂直 yz 平面与 zx 平面，又 Σ_1 上 $z=1$，于是

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$$

现由高斯公式得

$$I=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

$$=-\iiint_\Omega[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dV$$

$$= -3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,dV + 6\iiint_{\Omega}(x+y)\,dV - \iiint_{\Omega}7\,dV$$

$$= -3\int_0^1 dz \iint_{D(z)} r^2\cdot r\,dr\,d\theta - 7\int_0^1 dz\iint_{D(z)} dx\,dy \quad \left(\begin{array}{l} D(z): x^2+y^2 \leqslant z, \\ \text{即 } 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{z}\end{array}\right)$$

$$= -3\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}} r^3\,dr - 7\int_0^1 \pi z\,dz$$

$$= -3\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 z^2\,dz - \frac{7}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{7}{2}\pi = -4\pi.$$

---

(19)**【分析与求解】** （Ⅰ）**证法一** 由于 $a_n, b_n \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单调下降，$a_n = \cos a_n - \cos b_n > 0$，即 $\cos a_n > \cos b_n \Rightarrow 0 < a_n < b_n$，因 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，因此 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

证法二 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

令 $f(x) = \cos x - x$，则 $f'(x) = -\sin x - 1 < 0\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\searrow$，$f(0)=1$，$y=f(x)$ $\exists$ 反函数记为 $x = f^*(y)$，它也连续，且 $f^*(1) = 0$.

记 $z_n = f(a_n) = \cos a_n - a_n = \cos b_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}\cos b_n = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} f^*(z_n) = f^*(1) = 0.$$

（Ⅱ）利用条件，建立级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的联系.

证法一 $0 < \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n} = \dfrac{2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n} < \dfrac{2\,\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{b_n^2-a_n^2}{b_n} = \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}\,\frac{a_n^2}{b_n},$$

又 $0 < \dfrac{a_n^2}{b_n} < \dfrac{b_n^2}{b_n} = b_n$（题（Ⅰ）的证明），于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{a_n^2}{b_n}$ 均收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

证法二 因 $a_n = \cos a_n - \cos b_n \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos a_n - 1 + 1 - \cos b_n}{b_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos a_n - 1}{b_n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n},$$

由 $\dfrac{1-\cos b_n}{b_n} \sim \dfrac{\frac{1}{2}b_n^2}{b_n} = \dfrac{1}{2}b_n$，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n}$ 收敛.

由 $a_n = \cos a_n - 1 + 1 - \cos b_n > 0 \Rightarrow 0 < 1-\cos a_n < 1 - \cos b_n$，$0 < \dfrac{1-\cos a_n}{b_n} < \dfrac{1-\cos b_n}{b_n}$ 及比较原理知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos a_n}{b_n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos a_n - 1}{b_n}$ 收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

---

(20)**【解】** （Ⅰ）用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为简单阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组：$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4. \end{cases}$

求得一个非零解 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$，它构成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

（Ⅱ）所求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 应该是 4×3 矩阵. 一种做法是把 $\boldsymbol{B}$ 的3个列向量分别作为3个线性方程组 $\boldsymbol{AX}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{AX}=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{AX}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 的解来计算. 下面的方法比较简单.

思路：满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的任何两个解的差都是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的解. 先求出 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的所有解，再求 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的一个特解，就可以得到满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵.

①$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的解是一个 4×3 矩阵，他的每一列都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，因此是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的倍数，通解为

$(c_1\boldsymbol{\alpha},c_2\boldsymbol{\alpha},c_3\boldsymbol{\alpha})$，$c_1,c_2,c_3$ 为任意常数.

② 求 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的一个特解.

用初等行变换化 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})$ 为简单阶梯形矩阵：

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的同解方程 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

得到一个解 $\boldsymbol{B}_0=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

③$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的通解为 $\boldsymbol{B}_0+(c_1\boldsymbol{\alpha},c_2\boldsymbol{\alpha},c_3\boldsymbol{\alpha})$，$c_1,c_2,c_3$ 为任意常数.

---

(21)【证明】 说明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都相似于对角矩阵，并且特征值一样，因此相似.

(1) 求出 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0(n-1$ 重$)$ 和 $n(1$ 重$)$. $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵，特征值为对角线元素，也是 $0(n-1$ 重$)$ 和 $n(1$ 重$)$.

(2)$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B}$ 的 $n-1$ 重特征值0满足等式 重数 $=n-r(\boldsymbol{B}-0\boldsymbol{E})=(n-1)$，因此它也相似于对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

由相似关系的传递性，得到 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

---

(22)【解】 （Ⅰ） $F_Y(y)=\boldsymbol{P}\{Y\leqslant y\}=\boldsymbol{P}\{Y\leqslant y,X=1\}+\boldsymbol{P}\{Y\leqslant y,X=2\}$

$=\boldsymbol{P}\{X=1\}\boldsymbol{P}\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\boldsymbol{P}\{X=2\}\boldsymbol{P}\{Y\leqslant y\mid X=2\}$

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$，

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}y=\dfrac{3}{4}y$，

当 $1 \leqslant y < 2$ 时，$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y$

当 $y \geqslant 2$ 时，$F_Y(y) = 1$

所以 $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3}{4}y, & 0 \leqslant y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y, & 1 \leqslant y < 2, \\ 1, & y \geqslant 2. \end{cases}$$

(Ⅱ) $$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 \leqslant y < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 \leqslant y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{3}{4}y\,dy + \int_1^2 \frac{1}{4}y\,dy = \frac{3}{4}.$$

---

(23)【解】 由分布函数 $F(x)$ 可得密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(Ⅰ) $$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx = -\int_0^{+\infty} x\,de^{-\frac{x^2}{\theta}} = -xe^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$= \sqrt{\theta}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\theta}}\right)^2} d\frac{x}{\sqrt{\theta}} = \sqrt{\theta}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x^3}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx = \theta\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}d\frac{x^2}{\theta}$$

$$\overset{\frac{x^2}{\theta} = t}{=\!=\!=\!=} \theta\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \theta\Gamma(2) = \theta.$$

(Ⅱ) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值，则有似然函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, & x_i \geqslant 0 \\ 0, & x_i < 0 \end{cases}$$

当 $x_i > 0$ 时，$\ln L(\theta) = n\ln 2 + \ln\prod_{i=1}^{n} x_i - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$，得 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

故 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

(Ⅲ) 由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，故 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ 也独立同分布，且期望存在($EX_i^2 = \theta, i = 1, 2, \cdots, n$). 由辛钦大数定律可知，对任意 $\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

而 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \theta$，即存在实数 $a = \theta$，使对 $\forall\varepsilon > 0$，有 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1.$