工科研究生教材·数学系列

应用数理统计基础

YINGYONG SHULI TONGJI JICHU

YINGYONG SHULI TONGJI JICHU

第四版

庄楚强 何春雄 编著

YINGYONG SHULI TONGJI JICHU

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

工科研究生教材·数学系列

应用数理统计基础

（第四版）

庄楚强　何春雄　编著

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
·广州·

内 容 简 介

本书介绍经典的数理统计理论与方法，内容包括初等概率论知识的复习、抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和试验设计，还简要介绍数据挖掘及统计学习、R 软件等较为现代的统计方法和工具. 书中有较多例题并附有例题求解的 R 软件参考程序，各章配有习题，书末附有习题答案.

本书适用于了解概率论基础知识和具有使用计算机软件基本经验的读者阅读. 可作为高等院校非数学专业硕士研究生数理统计课程的参考教材，也可供在自然科学、管理科学、社会科学、经济与金融科学等诸多研究领域中用到统计科学的科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

应用数理统计基础/庄楚强，何春雄编著．—4 版．—广州：华南理工大学出版社，2013.8

工科研究生教材. 数学系列

ISBN 978－7－5623－4008－9

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①庄…　②何…　Ⅲ. ①数理统计－研究生－教材　Ⅳ. ①O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 182765 号

应用数理统计基础(第四版)

庄楚强　何春雄　编著

出 版 人：韩中伟
出版发行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
http://www.scutpress.com.cn　E-mail:scutc13@scut.edu.cn
营销部电话：020－87113487　87111048（传真）
责任编辑：詹志青
印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印张**：27.25　**字数**：705 千
版　　次：2013 年 8 月第 4 版　2013 年 8 月第 17 次印刷
印　　数：48001～51000 册
定　　价：46.00 元

总　　序

研究生教材建设是研究生教育的基础工程，是提高研究生培养质量的重要环节。自1978年恢复研究生招生以来，我校先后编写了供工科研究生使用的数学教材或教学参考书，其中一些教材出版后，不仅本校使用，许多兄弟院校也选作教材或教学参考书，受到读者好评；另有一些教材则采用讲义形式在校内印发、使用。为适应研究生教育事业迅速发展的需求，我校决定在原有“工科研究生用书”的基础上，通过修订和新编，出版“工科研究生教材·数学系列”。

现代科学技术的发展，特别是计算机技术的高度发展，使得数学科学在人类生产、管理及科学研究中发挥越来越突出的促进作用，也使得人类社会生活的各个领域使用数学技术成为可能。“工科研究生教材·数学系列”作为工科硕士研究生和博士研究生公共课的选用教材，我们希望每本教材既要介绍该学科分支的历史沿革与发展、基本理论和方法，又能反映该学科分支的最新成果。对于后者，主要是从基本思想和实际运用技巧方面进行概括和阐述。这就要求每本教材既要有严谨的解析论证，又要有概括性的分析和介绍，不宜过分追求教材内容的自我完备。

我校研究生教材建设（特别是公共数学课程教材建设）还处在不断完善过程中，限于学术水平和教学经验，本系列教材难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正，以便日后修订时加以更正。

华南理工大学研究生院

2005年6月

第四版前言

本版是第三版的修订版，基本保留第三版的结构和内容，对第三版的个别不妥、疏漏和谬误之处做了修改、补充和订正.

另外，鉴于当前计算机知识与应用的普及和人们计算机软件运用能力的提高，加之实用统计技术的实现离不开数值计算，笔者认为，读者在掌握数理统计原理和方法的同时，了解和熟悉一种统计计算软件使用的入门知识，不仅尤为必要而且完全可能. 所以，本版中新增了附录B，其中简要介绍R软件的核心内容，并对书中有关统计计算的大部分例子添加了R软件的参考程序（由于浮点运算精度与手工计算的差别，程序的计算结果与答案稍有不同. 另外，所附程序只是示例，未必是最精练的）. 由于R软件为一种自由软件，可在其官方网站免费下载，且有丰富的在线帮助资源，读者只需粗读附录B，就可理解有关程序的功能，或利用在线帮助进一步了解，所以书中对参考程序的有关语句只略作解释. 读者在尝试执行这些程序后，会对R软件的功能有初步感性认识，这对读者在研究和解决实际应用问题时运用统计方法及计算软件很有益处.

本次修订由何春雄独立完成. 由于作者水平有限，错误或不当之处在所难免，恳请同行和读者指正. 作者电子邮箱地址为machxhe@ scut. edu. cn（何春雄）.

编　者

2013年8月

第一版前言

数理统计是应用数学中最重要、最活跃的学科之一，它的应用越来越广泛深入，在国民经济和科学技术中的地位越来越显得重要。因此，作为科学和工程技术人员，特别是工科硕士研究生，应该具备数理统计的基本知识。本书是根据工科硕士研究生的特点，结合我校十多年来对该门课程的教学实践编写而成的。本书可作为工科硕士研究生应用数理统计课程的教材，也可作为工科院校大学生学习数理统计课程的教学参考书，还可作为科学、工程技术人员的自学读物。

本书着重介绍各种基础的、常用的数理统计方法，特别注意讲明各种方法的背景、应用条件及数学结论的实际含义，给出必要的数学推导，力求解释清楚，便于自学。各种方法都举出应用实例，并详细解答。每章后附有一定数量的练习题，书末给出了答案。

本书 3.4、5.4 两节由吴亚森执笔，其余由庄楚强执笔。书稿虽经多次修改，但限于编者的水平，仍会有缺点和错误，敬请专家和读者批评指正。

本书的出版，得到华南理工大学研究生院、数学科学学院的大力支持和鼓励，以及华南理工大学出版社的通力协作。贺德化教授审阅了部分手稿，并提出了宝贵意见。在此一并表示谢意。

编　者

目　　录

1 概率论复习与补充

概率论是数理统计的理论基础,为了使它们能更好地衔接起来,本章扼要地阐述概率论的基本概念、定理与公式,并补充了特征函数等工程数学中不讲授的内容.

1.1 概率空间

1.1.1 基本空间与事件域

设 E 是一个随机试验,E 的每一个不能再分或无须再分的可能结果称为试验 E 的基本事件. 试验 E 的全体基本事件所组成的集合称为基本空间,用 Ω 表示.

事件是基本空间 Ω 的一个子集,但并不是 Ω 的任意一个子集都是事件.

定义 1.1.1 设 Ω 是基本空间,$\mathscr{F}$是由 Ω 的一些子集为元素所组成的集合,如果满足下列条件:

(1)$\Omega\in\mathscr{F}$;

(2)若 $A\in\mathscr{F}$,则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(3)若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

那么,称 $\mathscr{F}$为事件域,$\mathscr{F}$中的元素称为事件,Ω 称为必然事件.

1.1.2 概率的定义与性质

定义 1.1.2 设 Ω 是随机试验的基本空间,A 为随机事件,P 为定义在事件域 $\mathscr{F}$上的实函数,若 P 满足:

(1)对任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2)$P(\Omega)=1$;

(3)可列可加性 对两两互斥的可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots(A_iA_j=\varnothing, i\neq j$,称为 A_i,A_j 互斥),有

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称函数 P 为事件域 $\mathscr{F}$上的概率(测度),$\Omega,\mathscr{F},P$ 三者作为一个有序整体称为概率空间,记作$(\Omega,\mathscr{F},P)$.

概率的性质:

(1)不可能事件$\varnothing$的概率为零,即 $P(\varnothing)=0$;

(2)有限可加性 对两两互斥的有限多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i);$$

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(4) $P(B-A) = P(B-AB) = P(B) - P(AB)$,

若 $A \subset B$,则有 $P(A) \leqslant P(B)$;

(5)加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

1.1.3 条件概率与事件的独立性

1. 条件概率

定义 1.1.3 设 A,B 是两个随机事件,且 $P(B)>0$,则定义

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

称 $P(A \mid B)$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

关于条件概率有三个重要公式:

(1)概率的乘法公式

若 $P(B)>0$,则 $P(AB)=P(B)P(A \mid B)$.

(2)全概率公式

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,且 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega, P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$,则对任一事件 B 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

注意,把 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 换为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 或者把 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ 换为 $B \subseteq \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$(或 $B \subseteq \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$),全概率公式仍然成立.

(3) Bayes 公式

在全概率公式的条件下,若 $P(B)>0$,则

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

全概率公式中的注意事项,对 Bayes 公式也适用.

2. 事件的独立性

定义 1.1.4 对两个事件 A,B,若有

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A,B 相互独立(简称独立).

定义 1.1.5 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若对任意的 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 和任意一组 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$,都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立,则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立.

对事件序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,若它们之中的任意有限个事件独立,则称事件序列 A_1,

$A_2,\cdots,A_n,\cdots$独立.

事件独立性的性质:

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立,则

(1)$A_1',A_2',\cdots,A_m'$ 独立,其中 $A_k'=A_k$ 或 $\overline{A}_k$,$k=1,2,\cdots,m$,$2\leqslant m\leqslant n$;

(2)将事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分成 k 组(不重不漏),设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 分别由第 $1,2,\cdots,k$ 组内的 A_i 经过并、积、差、求余等运算所得,则 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 独立.

1.2 随机变量及其分布

1.2.1 一维随机变量的分布

定义 1.2.1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间,而 $\xi=\xi(\omega)(\omega\in\Omega)$是定义在基本空间 Ω 上的单值实函数,若对任一实数 x,基本事件 ω 的集合 $\{\omega:\xi(\omega)<x\}$ 都是一随机事件,即$\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in\mathscr{F}$,则称 ξ 为一个随机变量或随机变数.

随机变量本书常用 ξ,η,ζ 等希腊字母表示.

1. 分布函数及其性质

定义 1.2.2 对于随机变量 ξ,令

$$F(x)=P\{\xi<x\},\quad \forall x\in(-\infty,\infty),$$

则称 F 为 ξ 的分布函数,其中及下文中 $P\{\xi<x\}$ 为 $P(\{\omega:\xi(\omega)<x\})$的简写.

由定义 1.2.2 易得:

$0\leqslant F(x)\leqslant 1$,其中 $-\infty<x<+\infty$;

$P\{x_1\leqslant\xi<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$,其中 $-\infty<x_1\leqslant x_2<+\infty$.

分布函数具有如下三条基本性质:

(1)单调不减:若 $x_1<x_2$,则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$;

(2)记 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$,$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$,那么

$$F(-\infty)=0,\quad F(+\infty)=1;$$

(3)左连续:对于 $-\infty<x_0<+\infty$,有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}F(x)=F(x_0)$.

这三条性质不但是分布函数的必要条件,还可以证明,它们一起构成函数 F 成为某一随机变量的分布函数的充分条件.

2. 离散型随机变量及其分布列

若随机变量的所有可能取的值是有限多个或可列无限多个,则称这种随机变量为离散型随机变量. 离散型随机变量的概率分布规律通常用分布列表示.

设离散型随机变量 ξ 的所有可能取的值为 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$,$\xi$ 取各个 x_i 相应的概率为 p_i,即

$$P\{\xi=x_i\}=p_i\quad(i=1,2,\cdots),$$

或列成表

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

$P\{\xi=x_i\}=p_i$ 或它的表称为离散型随机变量 ξ 的分布列、分布律、概率函数．由概率的定义可知分布列(概率函数)有性质:

(1)$p_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots$;

(2) $\sum\limits_{i=1} p_i = 1.$

离散型随机变量的分布函数 F 可用 p_i 表示为

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{x_i<x} P(\xi = x_i).$$

3. 连续型随机变量及其分布密度

定义 1.2.3 若随机变量 ξ 的分布函数 F 能够表示为某个非负可积函数 p 在区间 $(-\infty,x)$ 上的积分,即

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t,$$

则称 ξ 为连续型随机变量,称 p 为 ξ 的分布密度、密度函数(简称密度)或概率函数.

密度 p(概率函数)具有性质:

(1)$p(x)\geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$;

(3)对于 x 轴上的任意区间 S,有 $P\{\xi \in S\} = \int_S p(x)\,\mathrm{d}x$;

(4)对于 p 的连续点 x,有

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{x\leqslant \xi < x+\Delta x\}}{\Delta x},$$

从而也有(当 $\Delta x>0$ 且 Δx 很小)

$$P\{x\leqslant \xi < x+\Delta x\} \approx p(x)\Delta x.$$

注意,为了方便,我们引入了一个对离散型或连续型两种情况通用的概念——概率函数 p:若 ξ 是离散型,则 p 是 ξ 的分布列;若 ξ 是连续型,则 p 是 ξ 的分布密度.

4. 一些常用的概率分布

离散型:

(1)二项分布 $B(n,p)$,$0<p<1$,概率函数为

$$p(x) = P\{\xi = x\} = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \qquad (x = 0,1,2,\cdots,n);$$

(2)0－1 分布 $B(1,p)$,$0<p<1$,概率函数为

$$p(x) = P\{\xi = x\} = p^x(1-p)^{1-x} \qquad (x = 0,1);$$

(3)Poisson 分布 $P(\lambda)$,$\lambda>0$,概率函数为

$$p(x) = P\{\xi = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad (x = 0,1,2,\cdots);$$

连续型:

(4) 均匀分布 $U[a,b]$ $(a<b)$ 的概率函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{当 } a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{其它}\end{cases};$$

(5) 指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ $(\lambda>0)$ 的概率函数为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{当 } x\geqslant 0\\ 0 & \text{当 } x<0\end{cases};$$

(6) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\quad(\text{其中 } \sigma>0,\ \mu\in(-\infty,+\infty)).$$

特别地，称 $N(0,1)$ 为标准正态分布，它的分布函数记为 Φ，它的数值可以从书末的附表查到或用 R 软件的语句 pnorm 得到.

正态分布概率计算公式：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

①$F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$；

②$P\{a\leqslant\xi<b\}=\Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$；

③$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

1.2.2　多维随机变量及其分布

1. n 维随机变量及其分布

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是定义在同一个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 n 个随机变量，把 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 看成一个有序整体，称为一个 n 维随机变量（一个 n 维随机向量），记为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$.

定义 1.2.4　设 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是 n 维随机变量，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是任意 n 个实数，则 n 元函数

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=P\{\omega:\bigcap_{i=1}^{n}\xi_i(\omega)<x_i\}\\&=P\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\cdots,\xi_n<x_n\}\end{aligned}$$

称为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的 n 维联合分布函数.

定义 1.2.5　若 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的 n 维联合分布函数可以表示为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p(t_1,t_2,\cdots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n,$$

其中 p 是非负可积函数，则称 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为 n 维连续型随机变量，p 称为 n 维联合分布密度或 n 维联合概率函数.

对于多维随机变量，这里主要介绍二维随机变量，二维随机变量所讨论的问题都可推广到 n 维随机变量的情形.

2. 二维分布函数及其性质

定义 1.2.6　设 (ξ,η) 是二维随机变量，x,y 是任意两个实数，二元函数

$$F(x,y)=P(\{\omega:\xi(\omega)<x\}\cap\{\omega:\eta(\omega)<y\})$$

$$= P\{\xi < x, \eta < y\}$$

称为(ξ,η)的联合分布函数或称为(ξ,η)的分布函数.

显然有 $$0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1.$$

二维分布函数 F 有下面四条基本性质:

(1)$F(x,y)$固定其中任一变量对另一变量都是单调不减;

(2)$F(x,y)$固定其中任一变量对另一变量都是左连续的,即有

$$\lim_{x \to x_0^-} F(x,y) = F(x_0,y), \quad -\infty < x_0 < +\infty,$$

$$\lim_{y \to y_0^-} F(x,y) = F(x,y_0), \quad -\infty < y_0 < +\infty;$$

(3)对任意固定的 x 或 y,有

$$F(-\infty,y) = \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0,$$

$$F(x,-\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0,$$

且有 $$F(-\infty,-\infty) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0,$$

$$F(+\infty,+\infty) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1;$$

(4)对任意(x_1,y_1),(x_2,y_2),$x_1 < x_2$,$y_1 < y_2$,均有

$$F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \geqslant 0.$$

这四个条件一起构成二元函数 F 为二维随机变量的分布函数的充分必要条件.

3. 二维概率函数及其性质

如果(ξ,η)最多只能取有限对或可列无限多对不同数值(x_i,y_j) $(i,j=1,2,\cdots)$,则称(ξ,η)为离散型的二维随机变量.(ξ,η)的概率分布规律可表示为

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$

或表示为 $P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots)$.

$\{p_{ij}\}$ $(i,j=1,2,\cdots)$称为(ξ,η)的联合分布规律或联合概率函数,它有两条基本性质:

(1)$p_{ij} \geqslant 0 \quad (i,j=1,2,\cdots)$;

(2) $\sum\limits_{i=1} \sum\limits_{j=1} p_{ij} = 1$.

定义 1.2.7 设二维随机变量(ξ,η)的分布函数为 F,若存在非负可积函数 p,使得

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称(ξ,η)为二维连续型随机变量,而 p 称为(ξ,η)的联合分布密度、联合密度函数(简称密度)或联合概率函数.

二维连续型随机变量的密度有如下性质:

(1) $p(x,y)\geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$;

(3) $P\{(\xi,\eta)\in D\} = \iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是 xOy 平面上的区域;

(4) $p(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$,

其中 (x,y) 为 p 的连续点.

4. 边缘分布

若 F 是二维随机变量 (ξ,η) 的分布函数,则可由 F 得到 ξ 或 η 的分布函数. 事实上

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi < x,\eta < +\infty\} = F(x,+\infty);$$

同理可得

$$F_\eta(y) = F(+\infty,y).$$

F_ξ,F_η 分别称为 (ξ,η) 关于 ξ 和 η 的边缘分布函数.

设 (ξ,η) 为二维离散型随机变量,联合概率函数为

$$P\{\xi = x_i,\eta = y_j\} = p_{ij}\quad (i,\ j = 1,2,\cdots),$$

则

$$P\{\xi = x_i\} = P\{\xi = x_i,\eta < +\infty\} = \sum_{j=1} p_{ij}\triangle p_{i\cdot}\quad (i = 1,2,\cdots),$$

$$P\{\eta = y_j\} = P\{\xi < +\infty,\eta = y_i\} = \sum_{i=1} p_{ij}\triangle p_{\cdot j}\quad (j = 1,2,\cdots).$$

分别称为二维离散型随机变量 (ξ,η) 关于 ξ 和 η 的边缘分布律.

设 (ξ,η) 为二维连续型随机变量,联合密度为 p,则 (ξ,η) 关于 ξ 和 η 的边缘分布函数分别为

$$F_\xi(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

$$F_\eta(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

从而有

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y,\quad p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x.$$

p_ξ,p_η 分别称为二维连续型随机变量 (ξ,η) 关于 ξ 和 η 的边缘分布密度.

上述表明: (ξ,η) 的联合分布唯一地确定关于 ξ 和 η 的边缘分布. 但边缘分布一般不能确定联合分布.

最常用的二维分布是二维正态分布. 若 (ξ,η) 的密度为

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,r$ 均为常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<r<1$,则称 (ξ,η) 服从二维正态分布,记为 $(\xi,\eta)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;r)$.

容易证明二维正态分布的边缘分布密度为

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\},\quad p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

即 $\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 也就是说,二维正态分布的边缘分布仍为正态分布,这是正态分布的一个重要特性.