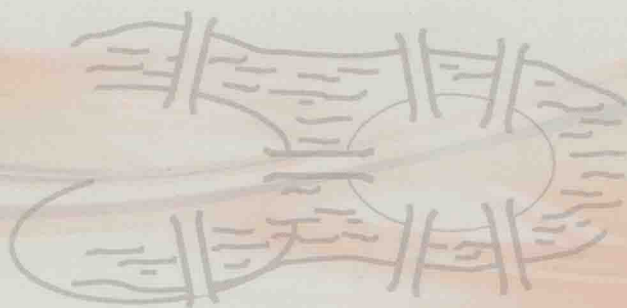


图论 及其应用

TULUN Jiqi Yingyong

魏丽侠 王 涛 主编



中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

图论及其应用

主 编 魏丽侠 王 涛
副主编 杨 戍 苗文静 隋丽丽

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书主要介绍了图的基本概念、图的连通性、树、欧拉图和哈密尔顿图、图的染色及网络流等内容。在介绍图论基本概念和基本理论的同时,还强调了图论算法,这样既能为学生学习后续专业课程打下良好的数学基础,又能增强学生的抽象思维能力,启迪学生研究算法的智慧,从而达到培养学生创造力的教学目标。

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/魏丽侠,王涛主编. —徐州:中国
矿业大学出版社,2012.12
ISBN 978-7-5646-1737-0

I. ① 图… II. ① 魏… ② 王… III. ① 图论
IV. ① O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 293878 号

书 名 图论及其应用
主 编 魏丽侠 王 涛
责任编辑 陈振斌
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
(江苏省徐州市解放南路 邮编 221008)
营销热线 (0516)83885307 83884995
出版服务 (0516)83885767 83884920
网 址 <http://www.cumtp.com> E-mail: cumtpvip@cumtp.com
印 刷 淮安淮海印务有限公司
开 本 787×960 1/16 印张 8 字数 152 千字
版次印次 2012 年 12 月第 1 版 2012 年 12 月第 1 次印刷
定 价 19.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前 言

1736 年,瑞士数学家欧拉(Euler)在他的一篇论文中讨论了哥尼斯城堡七桥问题,由此诞生了一门新兴数学分支——图论.如今,图论已广泛地应用于物理、化学、运筹学、计算机科学、电子学、信息论、控制论、网路理论、管理科学、社会科学等几乎所有学科领域.同时这些学科的发展,特别是计算机科学的快速发展,也促进了图论的发展.

进入 21 世纪,国内许多高等院校都把图论列为数学、计算机、电子、信息、管理等专业的必修专业课程.国内越来越多的高校,为与国际接轨,拓展学生的知识面、增强学生的竞争能力,增设了许多新的课程,同时又大大压缩了各门课程的教学学时,因此,在较少学时的情况下,如何提高学生的应用能力,是我们面临的一个新课题.正是针对这种情况,参考国内外一些优秀图论著作,结合作者的教学经验,形成了本书.

本书充分体现了图论在研究离散量的结构和相互关系的独到之处.在内容安排上,各章之间既相互联系,具备系统性和科学性,同时又相互独立,自成系统,给读者的学习提供了极大方便.另外,在介绍图论基本概念和基本理论的同时,还强调了图论算法.因为算法的研究是计算机科学的核心,因而既能为学生学习后续专业课程打下良好的数学基础,又能增强学生的抽象思维能力,启迪学生研究算法的智慧,从而达到培养学生创造力的教学目标.

本书由魏丽侠、王涛主编.书中第 1 章、第 5 章由王涛编写,第 2 章由隋丽丽编写,第 3 章由魏丽侠编写,第 4 章由杨戍编写,第 6 章由苗文静编写.本书由刘瑞芹教授主审.

由于编者水平有限及编写时间仓促,书中难免有错误和疏漏之处,衷心希望同行专家和读者批评指教.

编者

2012 年 9 月

目 录	
前言	1
第 1 章 图的基本概念	1
§ 1 图论的基本概念	1
§ 2 图的同构	4
§ 3 顶点的度	8
§ 4 子图与图的运算	14
§ 5 图的矩阵表示	16
习题	19
第 2 章 图的连通性	21
§ 1 路和回路	21
§ 2 连通图	27
§ 3 连通度	34
习题	42
第 3 章 树	43
§ 1 无向树	43
§ 2 根树及其应用	49
§ 3 最佳二元树的定义及性质	54
§ 4 最佳二元树的构造	59
习题	66
第 4 章 欧拉图和哈密尔顿图	68
§ 1 欧拉图	68
§ 2 中国邮路问题	74
§ 3 哈密尔顿图	78

§ 4 旅行售货员问题.....	84
习题	85
第 5 章 图的染色	88
§ 1 平面图.....	88
§ 2 顶点染色.....	95
§ 3 边染色.....	98
§ 4 全染色与邻强边染色	100
习题.....	103
第 6 章 网络流.....	104
§ 1 网络与网络流的基本概念	104
§ 2 网络的最大流问题	108
§ 3 最小费用流问题	115
习题.....	120

第1章 图的基本概念

§1 图论的基本概念

随着图论学科的发展和壮大,它已作为一门独立的数学分支,越来越受到人们的关注.目前,图论在各个学科领域都有广泛的应用.

图论起源于200年前,但在近几十年才逐步发展壮大起来.欧拉(Euler)在1736年解决了当时颇为有名的一个数学难题,即哥尼斯城堡七桥问题,从而使他成了图论和拓扑学的创始人.哥尼斯城堡位于现在俄罗斯的加里宁格勒,历史上曾是德国东普鲁士省的省会,普雷格尔河横穿城堡,河中有两个小岛A、B,并有七座桥连接岛与河岸及岛与岛(图1-1).当地居民想知道如果从家出发,通过每一座桥恰好一次,是否又能返回家.

欧拉把这个问题转化为一个数学问题来解决.他认为这种走法是否存在与两岸和两个岛的大小形状及桥的长短、曲直都没有关系,重要的是两块陆地之间有几座桥连接.所以他用一个点表示一块陆地的区域,用连接相应顶点的线段表示各座桥,这样就得出图1-2所示的图.

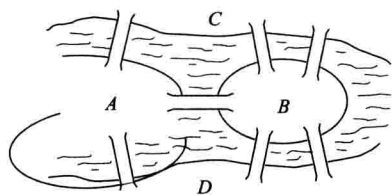


图 1-1

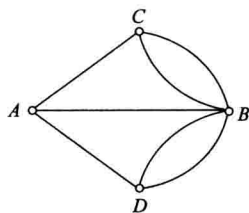


图 1-2

七桥问题就转化为“在这个图中,是否能从某一点出发经过每条线段恰好一次再回到出发点”的遍历问题.容易知道,每当我们到达并离开一块陆地时,要通过两座连接到这个地区的桥.我们也可以把出发的第一座桥和返回地区的最后一座桥作为一对.这样所需的遍历要求每块陆地与偶数座桥相连.这个必要条件在哥尼斯城堡七桥问题中是不存在的.1736年,欧拉论证了在这个图中,如此

走法是不存在的,并且推广了这个问题,给出了在一般条件下的判别法则.

欧拉为讨论哥尼斯城堡七桥问题提出了一个通用的图的模型.这里所讨论的图并不是几何学中的图形,而是客观世界中某些具体事物间联系的一个数学抽象,用顶点(小圆点)代表事物,用边表示各事物间的二元关系,如果所讨论的事物之间有某种二元关系,我们就把相应的顶点连成一条边.这种由顶点及连接这些顶点的边所组成的图就是我们图论中所研究的图.

定义 1 设 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ 是一个非空有限集合, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ 是与 $V(G)$ 不相交的有限集合. 一个图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \phi_G)$, 其中 ϕ_G 是关联函数, 它使 $E(G)$ 中每一元素对应于 $V(G)$ 中的无序元素对.

通常我们将图 $G = (V(G), E(G), \phi_G)$ 简记为 $G = (V(G), E(G))$ 或 $G = (V, E)$ 或 G .

在图 $G = (V(G), E(G), \phi_G)$ 中, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别称为 G 的顶点集和边集. $V(G)$ 中的元素称为 G 的顶点(或点), $E(G)$ 中的元素称为 G 的边. $p(G) = |V(G)|$ 和 $q(G) = |E(G)|$ 分别称为 G 的顶点数(或阶)和边数.

注意,图的两条边可能会有一个交叉点,但交叉点不一定是顶点.

一个图 $G = (V(G), E(G), \phi_G)$ 可以用平面上一个图形表示;用平面上的小圆圈表示 G 的顶点,用点与点之间的连线表示 G 中的边.图的图形表示使得抽象定义的图具有直观性,有助于我们进行思考和理解图的性质.明显地,同一个图可以有許多形状不同的图形表示方式.

例 1 设图 $G = (V(G), E(G), \phi_G)$, 其中 $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, $\phi_G(e_1) = v_3 v_3$, $\phi_G(e_2) = v_3 v_2$, $\phi_G(e_3) = v_2 v_1$, $\phi_G(e_4) = v_2 v_1$, $\phi_G(e_5) = v_1 v_4$, $\phi_G(e_6) = v_4 v_3$, $\phi_G(e_7) = v_4 v_2$. 这个图 G 是具有 4 个顶点, 7 条边的图. 其图形如图 1-3 所示.

在一个图 G 中, 如果 $\phi_G(e) = uv$, 则称 u 和 v 是 e 的端点, 也称 u 和 v 相邻, 同时也称 u (或 v) 与 e 关联. 与同一个顶点关联的若干条边称为是相邻的. 两个端点重合为一个顶点的边称为环. 如图 1-3 的边 $\phi_G(e_1) = v_3 v_3$ 是 G 的一个环. 关联于同一对顶点的两条或两条以上的边称为平行边或者多重边. 如图 1-3 中的边 $\phi_G(e_3) = v_2 v_1$ 和 $\phi_G(e_4) = v_2 v_1$ 是 G 的平行边.

一个图 G 如果没有环和平行边, 则称该图为简单图. 如图 1-4 所示的图是一个简单图.

如果一个图 G 的顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 都是有限集, 则称该图为有限图, 否则称为无限图. 本书仅讨论有限图. 只有一个顶点所构成的图称为平凡图, 其他所有图称为非平凡图. 显然, 至少有一个顶点才能称为图. 所以我们总要求一个图的顶点集合是非空的. 边数为零的图称为空图.

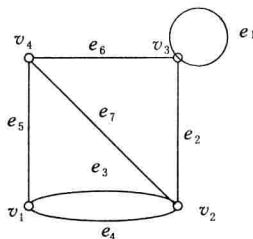


图 1-3

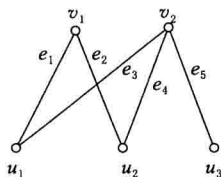


图 1-4

例 2 证明在任意 6 个人的集会上, 要么有 3 个人相互认识, 要么有 3 个人互不认识.

证明 我们用 a, b, c, d, e, f 代表这 6 个人, 其中 2 个认识, 则代表这 2 人的两个顶点之间连 1 条红边; 否则连 1 条蓝边. 于是原来的问题就等价于证明在这样的图中必含有同色三角形.

考察某一顶点, 设为 f , 与 f 关联的边中必有 3 条同色. 不妨设它们是 3 条红边 fa, fb 和 fc . 再观察三角形 abc . 如果它有 1 条红边, 设为 ab , 则 fab 是红边三角形; 如果三角形 abc 没有红边, 则 abc 是蓝边三角形. 证毕

通过前面的讨论可发现, 一个图实质上给出了顶点之间的一种二元关系. 因而在客观世界中, 一些事物间若带有某种二元关系, 就可以用一个图来描述这些事物之间的相互关系. 像人与人之间的朋友关系、同学关系、相互认识关系等均可用一个图来描述. 一般情况下, 用图的顶点表示某个问题中所讨论的主要的对象, 而边表示这些对象之间主要的二元关系, 所构成的图就表示了这些对象之间的二元关系, 我们就可以通过对该图的讨论去解决相应的问题. 但上面所能描述的关系只能是具有对称性的二元关系.

而在现实生活中, 有许多关系是非对称的. 如认识关系, 甲认识乙并不意味着乙认识甲. 在处理交通流问题时, 会碰到单行道路. 像这些就不能简单地用前面所讨论的图来表示. 为此引进有向图的概念.

定义 2 设 $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是一个非空有限集合, $A(D) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是与 $V(D)$ 不相交的有限集合. 一个**有向图** D 是指一个有序三元组 $(V(D), A(D), \phi_D)$, 其中 ϕ_D 是关联函数, 它使 $A(D)$ 中的每一元素 (称为边或弧) 对应于 $V(D)$ 中的有序元素 (称为顶点或点) 对 (可以相同).

若 a 是一条弧, 而 u 和 v 是使得 $\phi_D(a) = (u, v) (\neq (v, u))$ 的顶点, 则称 a 从 u 指向 v ; 称 u 是 a 的起点, v 是 a 的终点. 简记为 $a = (u, v)$. 在不引起混淆时, 有时也可用 $uv (\neq vu)$ 表示 (u, v) .

对应于每个有向图 D , 可以在有相同顶点集上作一个图 G_D , 使得对应于 D

的每条弧, G_D 有一条与该弧有相同端点的边与之对应, 这个图称为 D 的**基础图**. 反之, 给定任意图 G , 对于它的每条边, 给其端点指定一个顺序, 从而确定一条弧, 由此得到一个有向图, 这样的有向图称为 G 的一个**定向图**, 记为 $\vec{G}$. 一般情况下, $\vec{G}$ 是不唯一的.

给定一个图 $G = (V, E)$, 可以在有相同顶点集上作一个有向图 $D(G)$, 使对应于 G 中每一条边 uv , $D(G)$ 中有两条方向相反的弧 (u, v) 及 (v, u) 与之对应, $D(G)$ 称为 G 的**对称有向图**. $D(G)$ 中的一些性质、结论可自动地转化为 G 中相应的性质、结论.

和图一样, 有向图也有简单的图形表示, 一个有向图可以用它的基础图连同它的边上的箭头所组成的图形来表示. 图 1-5 表示一个有向图 D 和它的基础图.

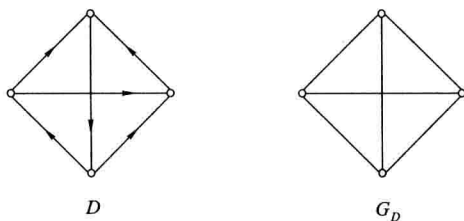


图 1-5

前面一些关于图的概念(点与边等关系)可以自动地应用于有向图. 和简单图相应的, 称一个有向图是严格的, 如果它没有环, 且任意两条弧都不同时具有相同的起点和终点.

本书后面的讨论中, 在没有特殊说明的情况下, 所指的图一般为无向图. 我们很容易地能把无向图中某些概念推广到有向图中.

§ 2 图的同构

从图的定义不难发现, 我们所讨论的图与图的几何形状没有关系, 即与顶点的位置(但两个不同的顶点不能重合)及连接它们的边的曲、直、长、短都没有关系(但一条边除了两个端点外, 不再通过其他顶点). 我们所关注的只是各顶点之间是否有边或有几条边连接. 例如, 图 1-6 中的两个图就不存在本质差别. 我们把这种不存在本质差别的两个图称为是同构的.

定义 1 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 与 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图, 若存在一一对应 $\varphi_1: V_1 \rightarrow V_2$ 及一一对应 $\varphi_2: E_1 \rightarrow E_2$, 使对每条边 $e = uv \in E_1$ 当且仅当 $\varphi_1(u)\varphi_1(v) \in E_2$

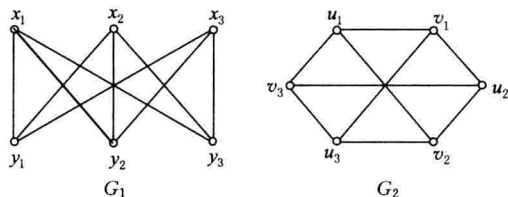


图 1-6

$\in E_2$, 则称 G_1 和 G_2 是同构的. 记为 $G_1 \cong G_2$.

对于两个简单图, 其同构定义可简化为:

定义 2 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 与 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个简单图, 若存在一一对应 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, 使对 G_1 中任意两个顶点 u 和 v , $uv \in E_1$ 当且仅当 $\varphi(u)\varphi(v) \in E_2$, 则称 G_1 和 G_2 是同构的. 记为 $G_1 \cong G_2$.

到目前为止, 判断两个图是否同构, 还只能根据定义. 也就是说, 两个图是否同构还没有很简便的判别法.

例如, 在图 1-6 所示的两个图 G_1 和 G_2 中, 建立顶点之间的对应关系如下:

$$\varphi: x_1 \rightarrow v_1, x_2 \rightarrow v_2, x_3 \rightarrow v_3, y_1 \rightarrow u_1, y_2 \rightarrow u_2, y_3 \rightarrow u_3.$$

容易看出, 图 G_1 中的三个顶点 x_1, x_2, x_3 互不相邻, y_1, y_2, y_3 互不相邻, 而 $x_i y_j \in E(G_1), i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$. 在 φ 对应下, G_2 中的三个顶点 v_1, v_2, v_3 互不相邻, u_1, u_2, u_3 互不相邻. 而 $v_i u_j = \varphi(x_i)\varphi(y_j) \in E(G_2), i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$. 由图的同构定义, $G_1 \cong G_2$.

对于两个同构的图, 易见它们有相同的结构, 差异只是顶点和边的名称不同, 或两个图的形状不同. 由于我们主要关注的是图的结构性质, 所以在画图时常常省略顶点和边的标号; 一个无标号图就认为是同构图的等价类的代表.

下面介绍一些特殊的图类, 在今后的讨论当中将经常遇到它们.

图 1-7 所示的图称为彼得森(Petersen)图, 它是一个结构简单而又十分有趣的图, 常作为各种反例出现在图论教材中.

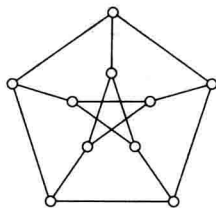


图 1-7

任何不同两顶点之间都有恰有一条边相连的无向图称为完全图.

具有 n 个顶点的完全图在同构意义是唯一的, 记为 K_n . 图 1-8 给出了点数不超过 5 的所有完全图.

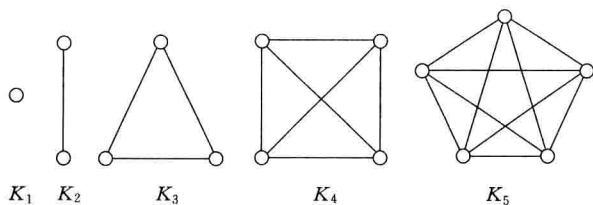


图 1-8

由 n 阶完全图 K_n 的定义, 易知, 其边数是 $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. 并且在所有含 n 个顶点的简单图中, K_n 的边数是最多的. 也就是说, 对任意 n 阶简单图 G , 其边数小于等于 $\frac{n(n-1)}{2}$, 等号成立当且仅当 G 是完全图.

简单图 G 的补图 G^c 是指与 G 有相同的顶点集的简单图, 并且边 $e \in E(G^c)$ 当且仅当 $e \notin E(G)$. 若简单图 $G \cong G^c$, 则称图 G 为自补的(图 1-9).

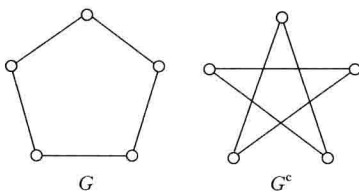


图 1-9

完全图 K_n 的补图 K_n^c 是一个仅含 n 个顶点不含边的图, 称为空图.

独立集是图中两两互不相邻的顶点组成的集合.

定理 1 若 n 阶图 G 是自补的(即 $G \cong G^c$), 则 $n = 0, 1 \pmod{4}$.

证明 因为 G 是自补的, 则 G 与 G^c 有相同多的边数, 且边数

$$|E(G)| + |E(G^c)| = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ 从而 } |E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}.$$

又因 G 的边数 $|E(G)|$ 是整数, 故 $\frac{n(n-1)}{4}$ 为整数, 即只能有 $n = 0 \pmod{4}$

或 $n = 1 \pmod{4}$.

证毕

例 1 在一个化学实验室里, 有 n 个药箱, 其中每两个不同的药箱恰有一种相同的化学品, 而且每种化学品恰好在两个药箱中出现. 问:

(1) 每个药箱有几种化学品?

(2) 这 n 个药箱中共有几种不同的化学品?

解 我们用 n 个顶点来代表 n 个药箱, 两个顶点之间连接的边数等于这两个顶点所对应的两个药箱所含有相同化学品的种数. 按题意, 所得图 G 是一个 n 阶完全图, G 中每一条边代表一种化学品, 由于 G 中每个顶点有 $n-1$ 条边与之关联, 共有 $q(G) = \binom{n}{2}$ 条边. 所以在这个化学实验室中, 每个药箱装有 $n-1$ 种化学品. 整个实验室共有 $\binom{n}{2}$ 种不同的化学品.

若 $V(G)$ 是 m 个互不相交独立集的并集, 则称 G 为 m 部图. 我们通常用 $G = (X, Y; E)$ 表示二部图, 有时也称为二分图.

在实际问题中, 碰到二部图的例子很多.

例2 某公司分配 n 个工人做 m 件工作, 就可以用一个二分图来表示. 代表人的一组顶点用 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 来表示, 代表工作的一组顶点用 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ 来表示. $x_i \in X$ 与 $y_j \in Y$ 相邻当且仅当工人 x_i 能做工作 y_j , 所得图是一个二部图(图 1-10).

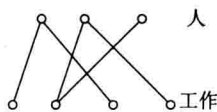


图 1-10

例3 我们构造一类二部图, 称为 n 维立方体, 记为 $Q_n = (V, E)$, 定义如下:

$V(Q_n) = \{x_1 x_2 \cdots x_n : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 并且若 $x = x_1 x_2 \cdots x_n$, $y = y_1 y_2 \cdots y_n \in V(Q_n)$, 则

$$xy \in E(Q_n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 1.$$

由 Q_n 的定义易知 Q_n 是简单图, 而且 $V(Q_n)$ 中元素与分量取值为 0 或 1 的 n 维向量一一对应, 而后者恰有 2^n 个, 所以 Q_n 顶点数为 2^n 个. 如图 1-11 所示.

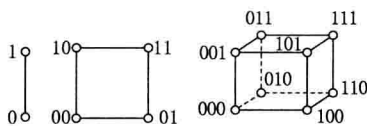


图 1-11

下面证明 Q_n 是二部图. 令 $X, Y \subset V(Q_n)$, 其中:

$$X = \{x_1 x_2 \cdots x_n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$Y = \{y_1 y_2 \cdots y_n : y_1 + y_2 + \cdots + y_n \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

则由 Q_n 的定义可知, $X \cup Y = V(Q_n)$, $X \cap Y = \emptyset$. 而且, 若存在 $x = x_1 x_2 \cdots x_n$

和 $x' = x'_1 x'_2 \cdots x'_n \in X$ 使 $xx' \in E(Q_n)$, 则应有 $\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| = 1$, 即有

$$|(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n)| = 1.$$

但这矛盾于 $x, x' \in X$. 所以 X 是独立集, 类似可以证明 Y 是独立集. 于是 Q_n 是二部图.

设 $G = (V_1, V_2, \cdots, V_m)$ 是 m 部图, 并且对任意 $u \in V_i$ 和 $v \in V_j (1 \leq i \neq j \leq m)$, 均有 $uv \in E$, 则称 $(V_1, V_2, \cdots, V_m; E)$ 是完全 m 部图. 记为 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_m}$, 这里 $n_i = |V_i|, i = 1, 2, \cdots, m$. 图 1-12 和图 1-13 分别是完全二部图 $K_{3,2}$ 和完全 3 部图 $K_{3,3,2}$.

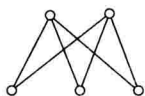


图 1-12

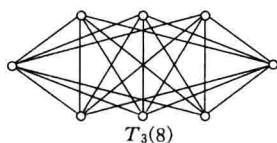


图 1-13

§3 顶点的度

定义 1 图 $G = (V, E)$ 中, 与顶点 v 相关联的边数 (每个环计算两次), 称为顶点 v 的度, 记为 $d_G(v)$ (或 $d(v)$). 分别用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 表示 G 中顶点的最小度和最大度. 度为零的顶点称为孤立顶点.

例如, 图 1-3 中, $d_G(v_1) = 3, d_G(v_2) = 4, d_G(v_3) = 4, d_G(v_4) = 3, \delta(G) = 3, \Delta(G) = 4$.

设 S 是 $V(G)$ 的一个非空子集, v 是 G 的任一顶点, 称 $N_S(v) = \{u | u \in S, uv \in E(G)\}$ 为 v 在 S 中的邻集. $N_S(v)$ 中顶点称为 S 的邻点. 特别若 $S = V(G)$, 则常常简记 $N_G(v)$ 为 $N(v)$. 明显地, 当 G 是简单图时, $d_G(v) = |N(v)|$.

定义 2 如果一个图中每个顶点的度是某一固定整数 k , 则称该图是 k 正则图.

图 1-7 彼得森图是 3 正则的, 完全图 K_n 是 $(n-1)$ 正则的, 完全二部图 $K_{n,n}$ 是 n 正则的. 图 1-14 所示的 H_1 和 H_2 分别是 3 正则图和 1 正则图.

从顶点度的定义不难发现, 由于每条边有两个端点, 从而每条边对 $\sum_{v \in V} d_G(v)$ 的贡献都是 2. 因而可得以下结论:

定理 1 对每一个图 $G = (V, E)$, 均有 $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2q(G)$.

此定理常常被称为握手定理.

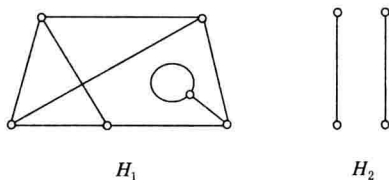


图 1-14

为了方便起见,我们把度为奇数的顶点称为奇点,度为偶数的顶点称为偶点.

推论 1 在任何图 $G = (V, E)$ 中,奇点的个数为偶数.

证明 我们把图 G 的顶点集 V 划分为两部分 V_1 和 V_2 ,其中 V_1 是 G 中所有的奇点, V_2 是 G 中所有的偶点,则 $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$. 由定理 1 得

$$2q(G) = \sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v).$$

而 $\sum_{v \in V_2} d_G(v)$ 是偶数,所以 $\sum_{v \in V_1} d_G(v)$ 也是一个偶数,即推得 $|V_1|$ 是偶数. 证毕

推论 2 正则图的阶数和度数不同时为奇数.

证明 设 G 是 k 正则图,若 k 为奇数,则由推论 1 知正则图 G 的顶点数必为偶数. 证毕

如果 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,称非负整数序列 $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$ 为图 G 的度序列.

推论 3 非负整数序列 $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ 是某个图的度序列当且仅当 $\sum_{i=1}^p d_i$ 是偶数.

证明 由定理 1 可知必要性成立. 对于充分性,取 n 个相异顶点 $v_1, v_2, \dots, v_n$,若 d_i 是偶数,就在 v_i 处作 $\frac{d_i}{2}$ 个环;若 d_i 是奇数,在 v_i 处作 $\frac{d_i-1}{2}$ 个环. 由于 $\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶数,故 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 中有偶数个奇数项,从而将所有与奇数 d_i 相对应的这些顶点 v_i 两两配对并连上一条边. 最后所得图的度序列就是 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$. 证毕

需要注意的是,以非负整数序列 $(d_1, d_2, \dots, d_n) (\sum_{i=1}^n d_i \text{ 是偶数})$ 为度序列的图一般很多.

例如,图 1-15 所示的 G_1 与 G_2 的度序列均是 $(7, 3, 1, 4, 6, 5)$.

简单图的度序列称为图序列,图序列的讨论或判断要比度序列的讨论困难

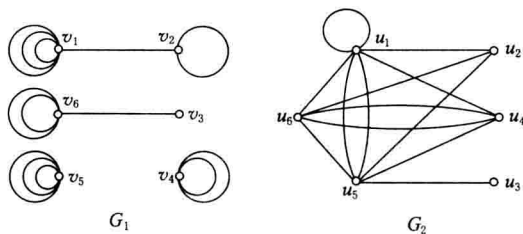


图 1-15

得多. 即使知道非负整数序列 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是图序列, 要构造相应的简单图仍是相当困难的.

Erős 和 Callai 在 1960 年给出了图序列的一个判别方法.

定理 2 非负整数序列 $(d_1, d_2, \dots, d_n) (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$ 是图序列当且仅当 $\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶数, 并且对一切整数 $k, 1 \leq k \leq p-1$, 有

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}.$$

证明略.

定理 3 一个简单图 G 的 n 个顶点的度不能互不相同.

证明 因为对任意简单图 G 有 $\Delta(G) \leq n-1$. 如果 $\Delta(G) < n-1$, 则度不相同的点只可能有 $\Delta(G)+1$ 个 (度是 $\Delta(G), \Delta(G)-1, \dots, 1, 0$ 的点), 而 $\Delta(G)+1 < n$, 所以必然另有一些点与括号内的点的度数相同, 得证.

如果 $\Delta(G) = n-1$, 则 G 中没有孤立点, 即 $\delta(G) > 0$, 所以 $\Delta(G) - \delta(G) < n-1$, 同上一样, 度不相同的点只有 $\Delta(G) - \delta(G) + 1$ 个, 显然小于 n , 故图中也有度相同的点. 证毕

对于 m 部图有以下结论:

定理 4 设 $G = (V_1, V_2, \dots, V_m; E)$ 是 m 部图, $n_i = |V_i| (i = 1, 2, \dots, m)$, $n = \sum_{i=1}^m n_i$, 则

$$q(G) \leq (n^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2) / 2.$$

等号成立当且仅当 G 是完全 m 部图 $K_{n_1, n_2, \dots, n_m}$.

不难看出, 每个 n_i 取到 $\frac{n}{m}$ 时 ($1 \leq i \leq m$), $\sum_{i=1}^m n_i^2$ 达到最小, 但 $n = \sum_{i=1}^m n_i$, 每个 n_i 均是正整数. 若令 $n = mk + r (0 \leq r < m)$, 则取 $n_1 = \dots = n_r = k+1$,

$n_{r+1} = \cdots = n_m = k$ 时, $\sum_{i=1}^m n_i^2$ 在上述条件下取到最小, 故又有

$$\begin{aligned} q(G) &\leq \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2) \\ &\leq \frac{1}{2}[n^2 - (\sum_{i=1}^r (k+1)^2 + \sum_{i=r+1}^m k^2)] = \frac{1}{2}(n^2 - mk^2 - 2kr - r). \end{aligned}$$

这就证明了以下推论.

推论 4 设 $G = (V_1, V_2, \cdots, V_m; E)$ 是 n 阶 m 部图, $n = mk + r (0 \leq r \leq m)$, 则

$$q(G) \leq \frac{1}{2}(n^2 - mk^2 - 2kr - r).$$

等号成立当且仅当 G 是完全 m 部图 $K_{\underbrace{k+1, \dots, k+1}_r, k, \dots, k}$.

由于完全 m 部图 $K_{\underbrace{k+1, \dots, k+1}_r, k, \dots, k}$ 完全由 n 与 m 唯一确定, 可记为 $T_m(n)$. 例如 $T_3(8)$, 如图 1-13 所示, $T_3(8) = K_{3,3,2}$, $q(T_3(8)) = 21$.

对于有向图 $D = (V, A)$, 也有类似的一些概念及性质.

定义 3 有向图 D 中, 一个顶点 u 的出度 $d_D^+(u)$ 是指以 u 为起点的弧的数目, u 的入度 $d_D^-(u)$ 是指以 u 为终点的弧的数目, $d_D^+(u) + d_D^-(u) = d_D(u)$ 表示 u 的度数. 若 $d_D^+(u) = d_D^-(u)$, 则称 u 为平衡点. 每个顶点都为平衡点的有向图称为平衡有向图. 用 $\delta^+(D), \delta^-(D), \Delta^+(D), \Delta^-(D)$ 分别表示 D 的最小出度、最小入度、最大出度和最大入度.

$$\delta^+(D) = \min \{d_D^+(u) \mid u \in V(D)\};$$

$$\delta^-(D) = \min \{d_D^-(u) \mid u \in V(D)\};$$

$$\Delta^+(D) = \max \{d_D^+(u) \mid u \in V(D)\};$$

$$\Delta^-(D) = \max \{d_D^-(u) \mid u \in V(D)\}.$$

这 4 个参数都等于 k 的图称为 k 正则有向图.

由于每一条弧恰有一个起点和一个终点, 故有:

定理 5 对每一个有向图 $D = (V, A)$, 有

$$\sum_{u \in V(D)} d_D^+(u) = \sum_{u \in V(D)} d_D^-(u) = |A|.$$

下面我们给出几个例子, 作为上述定理或推论的应用.

例 1 在平面上有 n 个点 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 其中任两个点之间的距离至少是 1. 证明在这 n 个点中, 距离为 1 的点对数不超过 $3n$.

证明 首先建立一个图 $G = (V, E)$, 其中 V 就取 S 中的 n 个点, V 中的两个顶点有边连接当且仅当这两点之间的距离恰好为 1. 则所得图 G 是一个简单