算子代数上的可乘映射及导子

齐霄霏　著

科学出版社

算子代数上的可乘映射及导子

齐霄霏 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

各类导子、可乘映射是算子代数的重要研究课题，特别是近十几年来十分活跃，取得了丰富的研究成果. 本书以著者近年来的一些相关研究成果为主线，系统介绍了国内外环与算子代数上的各类导子、可乘映射以及相关问题研究的概况、最新成果及进展等. 全书共分 11 章，内容包括预备知识、素代数、三角代数和标准算子代数、von Neumann 代数、套代数、$\mathcal{J}$–子空间格代数等一些重要算子代数上的ξ-Lie 可乘同构、ξ-Lie 导子和广义ξ-Lie 导子、全ξ-Lie 可导点、中心化子及其一些应用.

本书可作为相关领域研究人员的参考书，也可作为数学专业研究生和高年级大学生教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

算子代数上的可乘映射及导子/齐霄霏著. —北京：科学出版社，2013.9

ISBN 978-7-03-038706-6

Ⅰ. ①算… Ⅱ. ①齐… Ⅲ. ①算子代数—研究 Ⅳ. ①O177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 229270 号

责任编辑：赵彦超 李静科 / 责任校对：郭瑞芝

责任印制：赵德静 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 9 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2013 年 9 月第一次印刷 印张：20

字数：393 000

定价：88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

算子代数研究的核心问题之一是通过同构映射进行分类. 由于导子与同构映射有着非常密切的联系，而同构映射的重要代数性质就是可乘性, 因此研究导子和可乘映射是算子代数的重要研究课题, 而且在纯代数理论研究中也具有重要意义. 近十几年来，关于各类导子的研究迅速发展, 产生了新的研究方向和研究方法, 成为近些年来非常活跃的研究领域之一, 吸引了很多数学科研人员从事这方面的研究, 并取得了丰富的成果, 但也有许多遗留问题值得进一步探讨. 本书的目的主要是以作者在这方面的一些相关研究成果为主线, 系统介绍国内外环与算子代数上的各类导子与可乘映射以及相关问题研究的概况、最新成果及进展等, 为进一步深入开展相关研究起到抛砖引玉的作用.

全书共分 11 章. 第 1 章是预备知识, 简单介绍 Banach 空间算子理论的基本概念, 几个重要的环与代数的定义, 以及本书后面常用的一些结果. 第 2 章着重讨论算子代数上与导子、广义导子相关的映射. 导子、Jordan 导子、广义导子和广义 Jordan 导子的结构以及各种导子之间的关系一直受到许多学者的关注. 本章主要集中在套代数与 $\mathcal{J}$- 子空间格代数上讨论这些导子的结构以及它们之间的关系. 第 3 章和第 4 章分别讨论套代数和 $\mathcal{J}$- 子空间格代数上的全可导点. 为获得映射成为导子的条件, 近年来, 一些学者对在某点可导的线性映射进行研究, 并得到了一些比较有意义的结果. 注意到, 在已有结果中, 讨论的代数大多是 Hilbert 空间套代数, 映射都有某种连续性假设, 且只对特殊的零点和单位元点加以讨论. 鉴于此, 在映射没有任何连续性假设的条件下, 第 3, 4 章在更一般的 Banach 空间套代数和 $\mathcal{J}$- 子空间格代数上讨论全可导点问题, 并得到了除零点与单位元点外更多的全可导点. 第 5 章讨论素代数和三角代数上的 ξ-Lie 可乘映射是否蕴涵可加性问题以及 ξ-Lie 可乘同构的刻画问题. 鉴于算子按照因子的交换性在量子物理中具有的重要意义, 本章引入了算子的 ξ-Lie 积和算子代数上 ξ-Lie 可乘映射的概念. 可乘映射何时是可加的问题一直受到许多学者的关注. 第 5 章分别在素代数和三角代数上系统地讨论 ξ-Lie 可乘映射何时可加, 进而获得 Banach 空间上标准算子代数间和 Banach 空间套代数上的 ξ-Lie 可乘同构的完全刻画. 利用算子对的 ξ-Lie 积概念也可以定义 ξ-Lie 导子和广义 ξ-Lie 导子的概念. 第 6 章首先在三角代数和素代数上分别讨论如何刻画 ξ-Lie 导子和广义 ξ-Lie 导子的问题, 并揭示了它们和导子 (广义导子) 之间的关系. 在第 7 章, 我们给出了代数的全 ξ-Lie 可导点的定义, 并在素代数上对零点是否是全 ξ-Lie 可导点的问题进行了较详尽的讨论. 第 8 章、第 9 章和

第 10 章分别讨论三角代数、$\mathcal{J}$- 子空间格代数和 von Neumann 代数的全 ξ-Lie 可导点刻画问题. 在这几章中, 除讨论零点是否为全 ξ-Lie 可导点外, 还讨论了在乘积为某一幂等元处满足 ξ-Lie 导子条件的可加映射的刻画问题, 并得到了这类映射的具体形式. 第 11 章研究算子代数上的中心化子及其一些应用. 事实上, 中心化子与广义导子之间存在着密切的联系. 我们介绍了一些环与算子代数上中心化子的相关成果, 并以此为工具, 给出了素环与 $\mathcal{J}$- 子空间格代数上在零点广义 ξ-Lie 可导的可加映射的具体刻画.

本书的写作得到了山西大学数学科学学院的支持和太原理工大学数学学院侯晋川教授的鼓励和支持. 本书所基于的研究工作得到了国家自然科学基金(11101250)、山西省自然科学基金 (2012021004) 以及山西大学校基金、山西大学青年英才计划的资助, 在此一并表示衷心的感谢.

由于作者水平有限, 文献收集不全, 再加上新成果的不断出现, 难以反映该研究领域的全貌, 缺陷与不足之处也在所难免, 热忱欢迎读者批评指正.

著 者

2013 年 6 月于太原

山西大学

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

本章我们将给出在后面章节中经常用到的有界线性算子, von Neumann 代数和非自伴算子代数等的一些概念和结论.

§1.1　Banach 空间及算子

定义 1.1.1　设 X 是实或复线性空间, 如果在 X 上定义了非负函数 $\|\cdot\|$, 满足下列公理:

(1) 三角不等式: 对任意的 $x, y \in X$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(2) 对任意的 $x \in X$ 和任意数 a, 有 $\|ax\| = |a|\|x\|$;

(3) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

则称 X 为赋范空间. 进而, 如果还满足

(4) 对 X 中的任意 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ (即当 $n, m \to \infty$ 时, 有 $\|x_n - x_m\| \to 0$), 存在 $x \in X$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$,

则称 X 是 Banach 空间.

满足 (1)~(3) 的非负函数 $\|\cdot\|$ 称为 X 上的范数. 满足 (1)~(2) 的非负函数称为半范数.

设 f 为 X 上的线性泛函. 如果 $\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)| < \infty$, 称 f 为 X 上的有界线性泛函. 记 Banach 空间 X 上的有界线性泛函全体为 X^*, 则 X^* 按通常函数的加法和数乘成为线性空间. $(X^*, \|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间, 称此空间为 X 的共轭空间.

我们有时也用 $\langle x, f\rangle$ 表示泛函 f 在 x 处的值 $f(x)$.

设 X 和 Y 是 Banach 空间, $T: X \to Y$ 是线性映射. 如果 $\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| < \infty$, 称 T 有界. T 是连续的当且仅当 T 是有界的, 而 $\|T\|$ 称为 T 的范数.

在 Banach 空间理论中, 通常认为开映射定理、闭图像定理、Hahn-Banach 延拓定理和一致有界原理是最基本的定理, 我们列举如下:

定理 1.1.2(开映射定理)　设 T 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子, 且 $TX = Y$, 则 T 为开映射.

定理 1.1.3(闭图像定理)　设 T 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的线性算子, 且 T 的图像 $\{(x, Tx) \mid x \in X\}$ 为 $X \times Y$ 中的闭集, 那么 T 是有界的.

定理 1.1.4(Hahn-Banach 延拓定理)　如果 f 为 X 的闭线性子空间上的有界线性泛函, 则 f 可保范地延拓为 X 上的有界线性泛函.

定理 1.1.5(一致有界原理或共鸣定理)　设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 中的一族线性算子. 如果对任意的 $x \in X$, 有 $\sup\{\|T_\alpha x\| : \alpha \in \Lambda\} < \infty$, 那么 $\sup\{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Lambda\} < \infty$.

从 X 到 Y 的所有有界线性算子的集合记为 $\mathcal{B}(X,Y)$; 如果 $X = Y$, 简记为 $\mathcal{B}(X)$. 赋予算子范数, $\mathcal{B}(X,Y)$ 成为 Banach 空间.

设 $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, 符号 $\mathrm{ran}(T)$ 和 $\ker T$ 分别代表 T 的值域和零空间. 算子 $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ 称为有限秩的, 如果 T 的值域 $\mathrm{ran}(T)$ 是有限维子空间, $\mathrm{ran}(T)$ 的维数也称为 T 的秩. 用 $\mathcal{F}(X,Y)$ 表示 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中所有有限秩算子的集合. 设 $y \in Y$, $f \in X^*$ 非零, 则由 $x \mapsto \langle x, f\rangle y$ 定义的算子是一秩的, 通常记为 $y \otimes f$. $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的每个一秩算子都可表示为这种形式.

命题 1.1.6　$\mathcal{B}(X,Y)$ 中的 n 秩算子可表示为 n 个一秩算子的和.

命题 1.1.7　$\mathcal{B}(X)$ 中有限秩算子理想在 $\mathcal{B}(X)$ 中按照弱算子拓扑是稠密的.

命题 1.1.8　$\mathcal{B}(X)$ 的换位是平凡的, 即若 $T \in \mathcal{B}(X)$ 与 $\mathcal{B}(X)$ 中每个算子 S 都交换 $(TS = ST)$, 则存在数 λ 使得 $T = \lambda I$, 其中 I 表示 X 上的恒等算子.

定义 1.1.9　令 $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. 由 T 按如下方式可得另一算子 T^*:

$$T^*(f)x = f(Tx), \qquad \forall x \in X,\ f \in Y^*,$$

T^* 是 Y^* 到 X^* 的线性算子, 称 T^* 是 T 的共轭算子. 易验证 T^* 也有界且 $\|T\| = \|T^*\|$.

定义 1.1.10　设 X 是 Banach 空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$. 如果存在多项式 $p(t)$ 使得 $p(T) = 0$, 称 T 是代数算子; 如果对每个 $x \in X$, 存在与 x 有关的多项式 $p_x(t)$ 使得 $p_x(T)x = 0$, 称 T 是局部代数算子.

定理 1.1.11(局部代数算子的 Kaplansky 定理 [145])　局部代数算子一定是代数算子.

定义 1.1.12　设 X 是复 Banach 空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$, 则 T 的谱 $\sigma(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中不可逆 $\}$.

定义 1.1.13　设 X 和 Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. 如果 T 把有界集映为列紧集, 称 T 是紧算子. $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的紧算子全体之集合记为 $\mathcal{K}(X,Y)$(当 $X = Y$ 时简记为 $\mathcal{K}(X)$, 它是 $\mathcal{B}(X)$ 的范闭理想).

定义 1.1.14　设 X 是 Banach 空间, $P, Q \in \mathcal{B}(X)$. 形式为 $PQ - QP$ 的算子称为交换子或换位子, 记为 $[P,Q]$.

命题 1.1.15[51]　紧算子和恒等算子非零常数倍的和不是交换子. 换句话说, 换位子的平移不是紧算子.

定义 1.1.16 设 H 是线性空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是其上的一个二元函数. 如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一个变元是线性的而关于第二个变元是共轭线性的, 且满足下列条件: 对任意 $x, y \in H$,

(1) $\langle x,x\rangle \geqslant 0$, 而 $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$,

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 H 上的内积. 设 H 是 Banach 空间且具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 如果 H 上的范数 $\|\cdot\|$ 由此内积导出, 即对任意的 $x \in H$, 有 $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$, 则称 H 为 Hilbert 空间.

设 H 为 Hilbert 空间, 如果 $x, y \in H$ 满足 $\langle x,y\rangle = 0$, 称 x 与 y 正交. 如果 $\{e_i : i \in \Lambda\}$ 是 H 中一族相互正交的单位向量, 且其线性张在 H 中稠密, 则称它为 H 的一个标准正交基. 此时, 任意 $x \in H$ 可唯一表示为 $x = \sum\limits_{i\in\Lambda}\langle x,e_i\rangle e_i$. 可分 Hilbert 空间存在可数标准正交基.

定义 1.1.17 设 H 是 Hilbert 空间, 其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 令 $A \in \mathcal{B}(H)$, 则存在 $A^* \in \mathcal{B}(H)$ 使得对任意 $x, y \in H$ 都有 $\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle$ 成立, 称 A^* 为 A 的共轭算子或伴随算子.

(1) 如果 $A^* = A$, 称 A 是自伴算子.

(2) 如果 A 自伴且对每个 $x \in H$, 有 $\langle Ax,x\rangle \geqslant 0$, 称 A 是正算子.

(3) 如果 $A^k = A$, 称 A 是 k- 阶幂等算子, 其中 k 是一自然数; 2- 阶幂等算子称为幂等算子.

(4) 如果存在自然数 k 使 $A^k = 0$, 称 A 是幂零算子; 如果 $A^k = 0$ 但 $A^{k-1} \neq 0$, 称 A 为 k- 阶幂零算子.

(5) 如果 A 是正算子且 A 是 2- 阶幂等算子, 称 A 是投影.

(6) 如果 $AA^* = A^*A$, 称 A 是正规算子.

(7) 如果 $AA^* = A^*A = I$, 称 A 是酉算子; 如果 $A^*A = I$, 称 A 是等距算子; 如果 A^*A 和 AA^* 都是投影算子, 称 A 是部分等距算子.

对 Banach 空间情形同样可定义幂零算子、k- 阶幂零算子和 k- 阶幂等算子的概念.

定义 1.1.18 设 $A \in \mathcal{B}(X)$ 且 $M \subset X$ 是闭线性子空间. 如果对任意的 $x \in M$, 有 $Ax \in M$, 称 M 是 A 的不变子空间. Lat$A$ 表示 A 在 X 中的所有不变子空间的集合. 如果 $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}(X)$, 则 $\mathrm{Lat}\mathcal{L} = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{L}} \mathrm{Lat}A$.

§1.2 von Neumann 代数

定义 1.2.1 设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数. 如果 $\mathcal{A}$ 中具有对合运算 $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 且满足下面的四个条件, 称 $\mathcal{A}$ 是 C*- 代数:

(1) $(\alpha A+\beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$,

(2) $(AB)^* = B^*A^*$,

(3) $(A^*)^* = A$,

(4) $\| A^*A \| = \| A \|^2$.

定义 1.2.2 设 $\mathcal{A}$ 是 C*- 代数, 且 $A, B \in \mathcal{A}$.

(1) 如果 $A^* = A$, 称 A 是自伴元.

(2) 如果 A 自伴且 $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, 称 A 是正元, 其中 $\mathbb{R}^+$ 代表非负实数集合.

(3) 如果 $A^2 = A$, 称 A 是幂等元.

(4) 如果 A 是正幂等元, 称 A 是投影.

(5) 如果 A 和 B 是投影且 $AB = 0$, 称 A 和 B 正交.

(6) 如果 $A^*A = AA^*$, 称 A 是正规元.

定义 1.2.3 如果 $\mathcal{A}$ 是包含恒等算子的 $\mathcal{B}(H)$ 的 C*- 子代数且具有前对偶, 即存在 Banach 空间 Y 使得 Y 的对偶空间是 $\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数 (有时简记为 vN 代数), 其中 H 是 Hilbert 空间.

定义 1.2.4 设 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数, $E, F \in \mathcal{A}$ 是投影.

(1) 如果代数 $E\mathcal{A}E$ 是交换的, 称 E 是交换投影.

(2) 如果存在部分等距算子 $V \in \mathcal{A}$ 使得 $VV^* = E$ 且 $V^*V = F$, 称 E 和 F 等价, 记为 $E \sim F$.

(3) 如果不存在 E 的任何非零子投影与 E 等价, 称 E 是有限投影; 否则称 E 是无限投影.

(4) 如果 E 是无限投影且对每个中心投影 P, PE 要么为零要么是无限投影, 称 E 是真无限投影.

定义 1.2.5 设 $\mathcal{A}$ 是 vN 代数且 $T \in \mathcal{A}$, 则 T 的中心覆盖 $\overline{T}$ 是投影 $I - P$, 其中 P 是 $\mathcal{A}$ 中满足 $P_\alpha T = 0$ 的所有中心投影 P_α 的并, 即 $\overline{T}$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 中满足 $QT = T$ 的最小中心投影 Q, 其中 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 代表 $\mathcal{A}$ 的中心.

定义 1.2.6 设 $\mathcal{A}$ 是 vN 代数.

(1) 如果 $\mathcal{A}$ 包含一个交换投影且其中心覆盖是单位算子 I, 称 $\mathcal{A}$ 是 I 型的; 如果恒等算子 I 可表示为 n 个等价交换投影的和, 称 $\mathcal{A}$ 是 I_n 型的.

(2) 如果 $\mathcal{A}$ 不包含任何交换投影, 但有一个有限投影具有中心覆盖是单位算子 I, 称 $\mathcal{A}$ 是 II 型的; 如果 I 是有限投影, 称 $\mathcal{A}$ 是 II_1 的; 如果 I 真无限, 称 $\mathcal{A}$ 是 II_∞ 型的.

(3) 如果 $\mathcal{A}$ 没有任何非零有限投影, 称 $\mathcal{A}$ 是 III 型的.

(4) 如果 $\mathcal{A}$ 不是 III 型的, 则称 $\mathcal{A}$ 是半有限的.

(5) 如果恒等算子 I 是真无限投影, 称代数 $\mathcal{A}$ 是真无限的.

(6) 如果 $\mathcal{A}$ 的中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}I$, 称 $\mathcal{A}$ 是因子, 其中 $\mathbb{C}$ 代表复数域.

定义 1.2.7 设 $\mathcal{A}$ 是 vN 代数, $A \in \mathcal{M}$ 是自伴元, 则 A 的 core 定义为 $\sup\{S \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}) : S = S^*, S \leqslant A\}$, 记为 $\underline{A}$. 特别地, 若 $A = P$ 是投影, $\underline{P}$ 是 $\leqslant P$ 的最大中心投影. 称投影 P 是 core-free 的, 如果 $\underline{P} = 0$.

易见, $\underline{P} = 0$ 当且仅当 $\overline{I - P} = I$.

命题 1.2.8[103] 令 $\mathcal{M}$ 是没有 I_1 型中心直和项的 von Neumann 代数, 则每个非零中心投影 $C \in \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 中某个 core-free 投影的中心覆盖. 特别地, 存在非零 core-free 投影 $P \in \mathcal{M}$, 使其满足 $\overline{P} = I$.

命题 1.2.9 令 $\mathcal{M}$ 是 von Neumann 代数, 则 $\mathcal{M}$ 没有 I_1 型的中心直和项当且仅当存在非零投影 $P \in \mathcal{M}$, 使其满足 $\underline{P} = 0$ 且 $\overline{P} = I$.

证明 必要性即为命题 1.2.8. 对于充分性, 假设 $\mathcal{M} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}_1$, 其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的 I_1 型直和项. 那么 $\mathcal{A}$ 是交换代数. 此时, $P = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$, 其中 $P_0 \in \mathcal{A}$, $P_1 \in \mathcal{M}_1$. 由于 $P \geqslant \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \oplus 0 \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$, 所以 $P_0 = 0$. 因此 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$, 进而有 $\overline{P} \leqslant \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} < I$, 矛盾. 证毕.

命题 1.2.10[103] 令 $\mathcal{M}$ 是 von Neumann 代数. 对于投影 $P, Q \in \mathcal{M}$, 如果 $\overline{P} = \overline{Q} \neq 0$ 且 $P + Q = I$, 那么, 对任意 $X \in \mathcal{M}$, $T \in \mathcal{M}$ 与 PXQ 和 QXP 交换蕴涵 $T \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$.

§1.3 素　环

定义 1.3.1 令 $\mathcal{R}$ 是一个环. 称 $\mathcal{R}$ 是 n- 非绕的, 若对任意 $A \in \mathcal{R}$, $nA = 0$ 蕴涵 $A = 0$; 称 $\mathcal{R}$ 是非绕的, 若对任意 $A \in \mathcal{R}$ 和任意正整数 n, $nA = 0$ 蕴涵 $A = 0$.

定义 1.3.2 令 $\mathcal{F}$ 是含单位元的环. 如果 $\mathcal{F}$ 中任意非零元均可逆, 则称 $\mathcal{F}$ 是除环. 一个交换除环称为域.

定义 1.3.3 令 $\mathcal{R}$ 是一个环, $\mathcal{R}$ 的中心定义为

$$\mathcal{Z}(\mathcal{R}) = \{A \in \mathcal{R} : AT = TA \text{对所有 } T \in \mathcal{R} \text{ 成立}\}.$$

称 $A \in \mathcal{R}$ 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ 上是代数的, 如果存在多项式 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ 使得 $p(A) = 0$, 即存在 $Z_0, Z_1, \cdots, Z_n \in \mathcal{Z}(\mathcal{R})$ 使得 $Z_n \neq 0$, $p(A) = Z_0 + Z_1 A + \cdots + Z_n A^n = 0$. $n = \deg(p)$ 称为多项式 p 的阶, 而 $\min\{\deg(p) : p(A) = 0\}$ 称为元 A 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ 上的代数阶数, 记为 $\deg(A)$. 如果 A 在 $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ 上不是代数的, 则规定 $\deg(A) = \infty$. 环 $\mathcal{R}$ 的代数阶数定义为

$$\deg\mathcal{R} = \sup_A\{\deg(A) : A \in \mathcal{R}\}.$$

定义 1.3.4 设 $\mathcal{R}$ 是一个环或代数. 称 $\mathcal{R}$ 是素的, 如果对任意的 $A, B \in \mathcal{R}$, $A\mathcal{R}B = \{0\}$ 蕴涵 $A = 0$ 或 $B = 0$; 称 $\mathcal{R}$ 是半素的, 如果对任意的 $A \in \mathcal{R}$, $A\mathcal{R}A = \{0\}$ 蕴涵 $A = 0$.

定义 1.3.5 令 $\mathcal{R}$ 是一个环, Φ 是含一切序对 $(\mathcal{D}, \sigma)$ 的集合, 其中 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{R}$ 的稠密左理想, $\sigma : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ 是左 $\mathcal{R}$- 模同态. 在 Φ 中规定: $(\mathcal{D}, \sigma) \sim (\mathcal{D}', \sigma')$ 当且仅当存在稠密左理想 $\mathcal{D}'' \subseteq \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ 使得 σ, σ' 在 $\mathcal{D}''$ 上一致. 于是, "$\sim$" 是 Φ 的等价关系, 从而决定 Φ 的一个分类. 若 $[\mathcal{D}, \sigma]$ 表示 $(\mathcal{D}, \sigma)$ 所在的等价类, $\mathcal{Q}_{ml}(\mathcal{R})$ 是一切等价类的集合, 规定: $[\mathcal{D}, \sigma] + [\mathcal{D}', \sigma'] = [\mathcal{D} \cap \mathcal{D}', \sigma + \sigma']$ 与 $[\mathcal{D}, \sigma][\mathcal{D}', \sigma'] = [\sigma^{-1}(\mathcal{D}), \sigma\sigma']$, 则 $\mathcal{Q}_{ml}(\mathcal{R})$ 构成一个环, 称为 $\mathcal{R}$ 的极大左商环. 对任意 $r \in \mathcal{R}$, 若 $\tau_r : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ 为右乘映射, 即 $\tau_r(x) = xr$, 则 $r \mapsto [\mathcal{R}, \tau_r]$ 为 $\mathcal{R}$ 到 $\mathcal{Q}_{ml}(\mathcal{R})$ 的同构嵌入, 即 $\mathcal{Q}_{ml}(\mathcal{R})$ 含 $\mathcal{R}$ 为子环. $\mathcal{Q}_{ml}(\mathcal{R})$ 的中心称为 $\mathcal{R}$ 的扩展中心, 记为 $\mathcal{C}$. 由 $\mathcal{R}$ 张成的 $\mathcal{Q}_{ml}(\mathcal{R})$ 的 $\mathcal{C}$-子代数称为 $\mathcal{R}$ 的中心闭包, 记为 $\mathcal{RC}$. 若 $\mathcal{R} = \mathcal{RC}$, 则称 $\mathcal{R}$ 是中心闭环. 若 $\mathcal{R}$ 是交换环 $\mathcal{C}$ 上的代数, 且其扩展中心是 $\mathcal{C}$, 则称 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的中心闭代数.

命题 1.3.6[20] $\mathcal{C}$ 是域当且仅当 $\mathcal{R}$ 是素环.

命题 1.3.7[20] 设 $\mathcal{R}$ 是素环, A_i, B_i, C_j, $D_j \in \mathcal{Q}_{ml}(\mathcal{R})$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i = \sum_{j=1}^{m} C_j X D_j \text{对所有} X \in \mathcal{R} \text{成立}.$$

如果 $A_1, \cdots, A_n$ 关于 $\mathcal{C}$ 是线性无关的, 则每个 B_i 是 $D_1, \cdots, D_m$ 的 $\mathcal{C}$- 线性组合. 相似地, 如果 $B_1, \cdots, B_n$ 关于 $\mathcal{C}$ 是线性无关的, 则每个 A_i 是 $C_1, \cdots, C_m$ 的 $\mathcal{C}$- 线性组合. 特别地, 如果 $AXB = BXA$ 对所有 $X \in \mathcal{R}$ 成立, 则 A 与 B 是 $\mathcal{C}$- 线性相关的.

§1.4 三 角 代 数

定义 1.4.1 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个代数, $\mathcal{M}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$- 双模. 对任意 $A \in \mathcal{A}$ 与 $B \in \mathcal{B}$, 若 $A\mathcal{M} = \{0\}$ 蕴涵 $A = 0$, 则称 $\mathcal{M}$ 是忠实 (faithful) 的左 $\mathcal{A}$- 模; 若 $\mathcal{M}B = \{0\}$ 蕴涵 $B = 0$, 则称 $\mathcal{M}$ 是忠实的右 $\mathcal{B}$- 模; 若 $A\mathcal{M}B = \{0\}$ 蕴涵 $A = 0$ 或 $B = 0$, 则称 $\mathcal{M}$ 是忠诚的 (loyal).

显然, 每个忠诚的 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$- 双模是忠实的左 $\mathcal{A}$- 模和忠实的右 $\mathcal{B}$- 模.

定义 1.4.2 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是任意交换环 $\mathcal{R}$ 上的含单位元的代数, $\mathcal{M}$ 是忠实的左 $\mathcal{A}$- 模和忠实的右 $\mathcal{B}$- 模. $\mathcal{R}$- 代数

$$\mathrm{Tri}(\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} : A \in \mathcal{A}, M \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{B} \right\}$$

在通常的矩阵运算下是一个代数, 称为是由 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}$ 构造的三角代数[27].

注意三角代数不是素的也不是半单的. 我们称幂等元 $P = \begin{pmatrix} I_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为三角代数 $\mathcal{U}$ 的标准幂等元. 显然, $I - P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_B \end{pmatrix}$. 这里, I, I_A 与 I_B 分别是 $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中的单位元.

命题 1.4.3[27] 三角代数 $\mathcal{U}$ 的中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{U})$ 为

$$\mathcal{Z}(\mathcal{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{U} : AM = MB \ \text{对所有} M \in \mathcal{M} \text{成立} \right\}.$$

定义 $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ 和 $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$ 分别为

$$\pi_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} = A, \quad \pi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} = B,$$

则

$$\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{Z}(\mathcal{U})) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \quad \pi_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z}(\mathcal{U})) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{B})$$

且存在代数同构 $\eta : \pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{Z}(\mathcal{U})) \to \pi_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z}(\mathcal{U}))$, 使得对任意 $M \in \mathcal{U}$, 有 $AM = M\eta(A)$.

§1.5 几类非自伴算子代数

定义 1.5.1 设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 的一族闭子空间, 称 $\mathcal{L}$ 是子空间格, 如果

(1) $(0), X \in \mathcal{L}$;

(2) 对 $\mathcal{L}$ 的任一族子空间 $\{L_\gamma \in \mathcal{L} : \gamma \in \Gamma\}$, 总有 $\vee_{\gamma\in\Gamma} L_\gamma \in \mathcal{L}$ 且 $\wedge_{\gamma\in\Gamma} L_\gamma \in \mathcal{L}$, 其中 $\vee$ 表示子空间的闭线性扩张, $\wedge$ 表示子空间的交.

设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 的一族闭子空间, 定义

$$\mathrm{Alg}\mathcal{L} = \{T \in \mathcal{B}(X) : T(L) \subseteq L, \forall L \in \mathcal{L}\}.$$

称 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 为对应于 $\mathcal{L}$ 的子空间格代数.

对于 $L \in \mathcal{L}$, 定义

$$L_- = \bigvee\{M \in \mathcal{L} : L \nsubseteq M\}, \ (0)_- = (0),$$

$$L_+ = \bigwedge\{M \in \mathcal{L} : M \nsubseteq L\}, \ (X)_+ = X.$$

一秩算子在算子代数的研究中起着至关重要的作用. 下面的命题给出了子空间格代数中一秩算子的一个重要特征.

命题 1.5.2[89]　设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格, 则 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 当且仅当存在 $L \in \mathcal{L}$ 使得 $x \in L$ 且 $f \in L_{-}^{\perp}$.

套代数

定义 1.5.3　设 $\mathcal{N}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格, 如果 $\mathcal{N}$ 是全序集, 则称 $\mathcal{N}$ 是套, 并称 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是套代数. 如果 $\mathcal{N} = \{(0), X\}$, 则相应的套代数是平凡的, 因为 $\mathrm{Alg}\mathcal{N} = \mathcal{B}(X)$; 如果 $\mathcal{N} \neq \{(0), X\}$, 我们称 $\mathcal{N}$ 是非平凡套, 相应的套代数称为非平凡套代数.

对于 $N \in \mathcal{N}$, 此时

$$N_{-} = \bigvee\{M \in \mathcal{N} : M \subset N\},$$

$$N_{+} = \bigwedge\{M \in \mathcal{N} : M \supset N\}.$$

易见 $N_{-} \subseteq N \subseteq N_{+}$.

注意到, 如果 $\mathcal{N}$ 是 X 上的套, 则 $\mathcal{N}^{\perp} = \{N^{\perp} : N \in \mathcal{N}\}$ 是 X^* 上的套, 且 $(\mathrm{Alg}\mathcal{N})^* \subseteq \mathrm{Alg}\mathcal{N}^{\perp}$.

命题 1.5.4　套代数中的 n 秩算子可写为该套代数中 n 个一秩算子的和, 且套代数中有限秩算子的集合在该代数中按照强算子拓扑是稠密的.

命题 1.5.5　套代数的换位是平凡的, 即套代数的换位由恒等算子的倍数组成.

命题 1.5.6　非平凡套代数不是半单的.

原子 Boolean 格代数

定义 1.5.7　设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格, 称 $K \in \mathcal{L}$ 是原子, 如果对于 $L \in \mathcal{L}, 0 \subseteq L \subseteq K$ 必有 $L = 0$ 或 $L = K$. 称 $\mathcal{L}$ 是原子格, 如果 $\mathcal{L}$ 中每个元素都是它所包含的原子的闭线性扩张, 即

$$L = \bigvee\{K \in \mathcal{L} : K \subseteq L \text{ 是原子}\}.$$

称 $\mathcal{L}$ 是分配格, 如果对任意 $L, M, N \in \mathcal{L}$, 都满足分配律

$$L \wedge (M \vee N) = (L \wedge M) \vee (L \wedge N), \qquad L \vee (M \wedge N) = (L \vee M) \wedge (L \vee N).$$

称 $\mathcal{L}$ 是 Boolean 格, 如果它是分配格, 并且任给 $L \in \mathcal{L}$, 都存在 $L' \in \mathcal{L}$ 使得 $L \vee L' = X, L \wedge L' = (0)$. 如果 $\mathcal{L}$ 是原子 Boolean 格, 则称 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 是原子 Boolean 格代数.

JSL 代数

定义 1.5.8 设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的子空间格, 定义

$$\mathcal{J}(\mathcal{L}) = \{K \in \mathcal{L} : K \neq (0) \text{ 且 } K_- \neq X\}.$$

称 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{J}$- 子空间格, 简称 JSL, 如果

(1) $\vee\{K : K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})\} = X$;

(2) $\wedge\{K_- : K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})\} = (0)$;

(3) $K \vee K_- = X, \forall K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$;

(4) $K \wedge K_- = (0), \forall K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$.

与子空间格 $\mathcal{L}$ 相应的代数 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 称为 $\mathcal{J}$- 子空间格代数, 简称 JSL 代数.

可以证明原子 Boolean 子空间格是 $\mathcal{J}$- 子空间格. 另外一个常见 $\mathcal{J}$- 子空间格的例子是五角格 (pentagon), 即

$$\mathcal{P} = \{(0), K, L, M, X\}.$$

这里, K, L, M 是 Banach 空间 X 的闭子空间, 并且满足 $K \wedge M = (0)$, $K \vee L = X$, $L \subset M$. 注意, 一个五角子空间格只有在无限维空间上才能实现.

对 $\mathcal{J}$- 子空间格和 $\mathcal{J}$- 子空间格代数, 我们列出本书常用到的性质, 关于其他性质, 可参见文献 [76], [86], [87], [88].

命题 1.5.9[87] 令 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的 $\mathcal{J}$- 子空间格. 那么下面的表述成立.

(1) 对任意的 $K, L \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$, $K \neq L$ 蕴涵 $K \subseteq L_-$;

(2) 对任意的 $K, L \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$, $K \neq L$ 蕴涵 $K \cap L = (0)$;

(3) 设 $K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$. 那么, 对每个非零向量 $\boldsymbol{x} \in K$, $K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$, 存在 $f \in K_-^\perp$ 使得 $f(\boldsymbol{x}) = 1$; 对偶地, 对任意非零泛函 $f \in K_-^\perp$, $K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$, 存在 $\boldsymbol{x} \in K$ 使得 $f(\boldsymbol{x}) = 1$.

命题 1.5.10[77] 设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的 $\mathcal{J}$- 子空间格 $A \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$. 则

(1) 如果对任给一秩算子 $R \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 有 $RA = 0$, 那么 $A = 0$;

(2) 如果对任给一秩算子 $R \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 有 $AR = 0$, 那么 $A = 0$.

命题 1.5.11[50] 设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的 $\mathcal{J}$- 子空间格, 则每个一秩算子 $x \otimes f \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ 是 $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ 中幂等元的线性组合. 这里, $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ 表示 $\mathcal{J}$- 子空间格代数 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 中有限秩算子全体构成的集合.

命题 1.5.12[90] 设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的 $\mathcal{J}$- 子空间格. 假定 A 是 $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ 中的一个 n 秩算子, 那么 A 可以写成 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 中 n 个一秩算子的和.

对任意的 $K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$, 记 $\mathcal{F}(K) = \mathrm{span}\{x \otimes f : x \in K,\ f \in K_-^\perp\}$.

命题 1.5.13[90] 设 $\mathcal{L}$ 是 Banach 空间 X 上的 $\mathcal{J}$- 子空间格. 假设 $K \in \mathcal{J}(\mathcal{L})$, $A, B \in \mathcal{F}(K)$, 则存在幂等算子 $P \in \mathcal{F}(K)$ 使得 $A = PAP$ 且 $B = PBP$.