SHUXUE JIANMO JIAOCHENG

数学建模教程

主 编 郑子苹

東北大學出版社
Northeastern University Press

数学建模教程

郑子苹　主编

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

数学建模教程／郑子苹主编．—沈阳：东北大学出版社，2013.6
ISBN　978-7-5517-0327-7

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①郑…　Ⅲ.①数学模型—教材　Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 107104 号

出 版 者：东北大学出版社
　　　　地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
　　　　邮编：110004
　　　　电话：024-83687331（市场部）　83680267（社务室）
　　　　传真：024-83680180（市场部）　83680265（社务室）
　　　　E-mail：neuph@neupress.com
　　　　http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：11.5
字　　数：295 千字
出版时间：2013 年 6 月第 1 版
印刷时间：2013 年 6 月第 1 次印刷
组稿编辑：刘宗玉
责任编辑：潘佳宁　　　　责任校对：叶　子
封面设计：刘江旸　　　　责任出版：唐敏智

ISBN　978-7-5517-0327-7　　　　定　　价：28.00 元

序

展现在读者面前的《数学建模教程》，是一位指导数学建模竞赛老师积多年的培训指导经验，结合其所指导学生的特点，以自身的实践感悟为基础，整理出来的面向专科学生的数学建模类教材。

该教材充分考虑到专科生的特点，对数学建模竞赛相应组别的赛题进行了仔细研究，对所需知识、方法及数学软件进行了有机整理，以学生可感受的问题作为基本授课内容，以解决相应问题所需的方法对应的数学软件作为技术支撑，以问题－方法的基本逻辑展现教材内容，有其新颖性、合理性，是一个有益的尝试。

本教材可作为数学建模课程的教材，可作为数学建模竞赛辅导的教材，也可作为数学应用的参考书。在内容的编排上，还可进一步充实实际问题，加一些更综合一些的案例，期待作者的新版本。

尊作者要求，写上面几句，是为序。

贺明峰

2013 年 6 月 20 日于大连理工大学校本部

前　　言

数学建模是实现数学应用的途径，很多院校早已开设“数学建模”课程，该课程对培养创新型人才和应用型人才都能发挥其他课程无法替代的作用。数学建模的指导思想是培养学生观察问题、分析问题、解决问题的综合能力和创新精神，以期全面提高学生的综合素质。自 1992 年开始，全国大学生数学建模竞赛每年都举行一次，参加比赛的院校越来越多。目前关于数学建模的资料比较多，但大部分都是比较高深的，适合本科学生以上的层次，对于高职高专院校和一些独立本科院校的学生来说根本没有办法完全读懂。2011 年初，我们突发奇想要编写一本适合我们自己的培训教材，通过两年多的摸索和整理，最终在 2013 年 5 月编写了这本《数学建模教程》。这本教材是对多年培训经验的总结，也借鉴了很多前辈的成果，在这里应首先感谢诸位前辈给予的支持。

本书共分为 7 章，介绍了数学建模的一些方法及数学建模过程中需要掌握的几个应用软件。由于篇幅限制，在介绍具体软件应用的层面均有侧重点，比如 Matlab 主要介绍用于数学处理方面的应用、Lingo 主要介绍用于规划方面的应用、Excel 主要介绍在统计中的应用。编者编写本书的主要意图是让学生在没有教师引导的情况下也能走入数学建模的世界，然后通过一段时间的强化训练就能顺利参加数学建模竞赛。

本书可作为高职高专院校和独立本科院校“数学建模”课程的教学用书，也可以作为本科院校学生或其他对数学建模感兴趣的读者的第一本自学参考书。

参与本书审阅和编写的教师还有：王明刚（南京师范泰州学院），主要负责第 3 章的编写，参与第 1 章的编写；秦胜洲（大连装备制造职业技术学院）；王天宝（天津商业大学宝德学院）；王云霞（山东英才学院）；潘敏（泰州职业技术学院）。

本书得到了大连装备制造职业技术学院程惠范院长及其他各位领导的大力支持，在此表示衷心的感谢！同时再次感谢书中参考文献的所有前辈！

由于时间仓促，加之编者水平有限，难免出现错漏，恳请广大读者批评指正。

编　者

2013 年 5 月

目　录

第1章　数学建模初识

1.1　数学模型和数学建模

生活中有很多不同形式的模型：实物模型，比如玩具、照片、飞机、火箭等；物理模型，比如水箱中的舰艇、风洞中的飞机等；符号模型，比如地图、电路图、分子结构图等。那么什么是模型呢？模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物，模型集中反映了原型的一部分特征。

对于数学模型，又该如何理解呢？下面以“航行问题”这一简单例子来介绍一下数学模型的概念。

甲乙两地相距750km，船从甲到乙顺水航行需30h，从乙到甲逆水航行需50h，问船的速度是多少？这里，用x表示船速，y表示水速，列出方程：

$$\begin{cases}(x+y)\times 30=750\\(x-y)\times 50=750\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=20\\y=5\end{cases}$$

即得船速为20km/h。

上面的这个问题实际上就是一个建立数学模型的过程：

① 作出简化假设(船速、水速为常数)；

② 用符号表示有关量(x，y表示船速和水速)；

③ 用物理定律(匀速运动的距离等于速度乘以时间)列出数学式子(二元一次方程组)；

④ 求解得到数学解答($x=20$，$y=5$)；

⑤ 回答原问题(船速20km/h)。

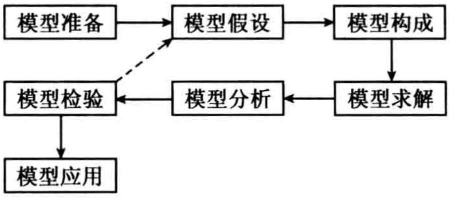
所谓数学模型，是指对于一个实际问题，为了特定目的，作出必要的简化假设，根据问题的内在规律，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。建立及求解数学模型的过程(包括表述、求解、解释、检验等)就是数学建模。数学模型主要包括优化模型、统计模型、概率模型、微分方程模型、图论模型和决策模型等。

数学建模应用很广泛，可以应用于分析与设计、规划与管理、控制与优化、预报与决策等。数学建模与计算机的结合可以解决知识经济时代很多问题。

1.2 如何进行数学建模

对于数学建模的题目，拿到问题之后，首先了解背景知识，明确建模的目的，用数学语言表述，找到题中隐含的数学因素，并一一列出，初步确定用哪一种类型。

可以总结为以下步骤：问题分析(问题重述)、模型假设(简化模型)、建立模型(具体可以是方程、图表或者其他的数学形式)、模型求解(可以借助于计算机软件进行计算)、模型分析、模型检验、模型的应用或推广。



下面以生活中的一个简单的问题来学习一下数学建模的过程。

【例 1.1】 四条腿一样长的椅子一定能在不平的地面上放平稳吗?

模型假设(文字转化为数学语言)

(1) 椅子四条腿一样长，椅子脚与地面的接触处视为一个点，四脚连线呈正方形；

(2) 地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断(没有台阶那样的情况)，即视地面为数学上的连续曲面；

(3) 地面起伏不是很大，椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

模型建立(运用数学语言把条件和结论表现出来)

设椅脚的连线为正方形 $ABCD$，对角线 AC 与 x 轴重合，坐标原点 O 在椅子中心，当椅子绕 O 点旋转后，对角线 AC 变为 $A'C'$，$A'C'$ 与 x 轴的夹角为 θ。

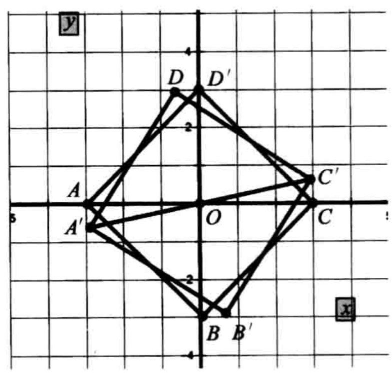


图 1-1

由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了，记 A，C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B，D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，显然 $f(\theta)\geqslant 0$，$g(\theta)\geqslant 0$。因此椅子和地面的距离之和可令 $h(\theta)=f(\theta)+g(\theta)$。由假设(2)，$f(\theta)$，$g(\theta)$ 为连续函数，因此 $h(\theta)$ 也是连续函数；由假设(3)，得 $f(\theta)g(\theta)=0$。则该问题归结为：

已知连续函数 $f(\theta)\geqslant 0$，$g(\theta)\geqslant 0$ 且 $f(\theta)g(\theta)=0$，至少存在一个 θ_0，使得

$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0。$$

模型求解(找出 θ_0)

证明： 不妨设 $f(0)>0$，则 $g(0)=0$。

令 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$(即旋转 90°，对角线 AC 和 BD 互换)，则有 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$。

定义：$H(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，所以

$$H(0)H\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[-f(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]<0$$

根据连续函数解的存在性定理，得：存在 $\theta_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，使得

$$H(\theta_0)=f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$$

又
$$f(\theta_0)g(\theta_0)=0$$

所以
$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$$

即当 $\theta=\theta_0$ 时，四点均在同一平面上。

以上是生活中的一个简单数学建模的例子，一些智力题也可以用数学建模的方法来解决。

【例 1.2】 3 名商人各带一名随从过河，随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货，但乘船渡河的方案由商人决定。3 名商人在不被随从谋杀和小船最多能容 2 人的情况下，将如何安全过河？

模型分析： 本题针对商人们能否安全过河的问题，需要选择一种合理的过河方案。该问题可视为一个多步决策模型，通过对每一次过河方案的筛选优化，最终得到商人们全部安全到达河对岸的最优决策方案。对于每一次的过河过程都看成一个随机决策状态量，商人们能够安全到达彼岸或此岸可以看成目标决策允许的状态量，通过对允许的状态量的层层筛选，从而得到过河的目标。

模型假设： 假设过河的过程中不会发生意外事故；假设当随从人数多过商人时，不会改变杀人越货计划；假设所有人最终都必须到达河对岸。

符号说明： M 表示商人的数量；N 表示随从的数量；Z 表示河的此岸和彼岸；K 表示小船的容量；m 表示此岸的商人数量；n 表示此岸随从的数量；u 表示彼岸的商人数量；v 表示彼岸的随从数量。

模型建立： 本题为多步决策模型，每一次过河都是状态量的转移过程。

可以用三维向量表示 $(m,\ n,\ Z)$，其中，m 的取值范围为 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，n 的取值范围为 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，

$$Z=\begin{cases}1, & \text{表示划船到河的彼岸}\\ 0, & \text{表示划船到河的此岸}\end{cases}$$

用三维向量表示允许状态量：

(3, 3, 1)(3, 2, 1)(3, 1, 1)(2, 2, 1)(3, 0, 1)(0, 3, 1)(0, 2, 1)(1, 1, 1)(0, 1, 1)(3, 2, 0)(3, 1, 0)(2, 2, 0)(3, 0, 0)(0, 3, 0)(0, 2, 0)(1, 1, 0)(0, 1, 0)(0, 0, 0)

模型求解： 模型要求从 (3, 3, 1) 开始经过对每次过河的安全状态量的选择最终安全到达 (0, 0, 0)。

根据题意，状态转移必须满足以下规则：

(1) Z 从 1 变 0 或 0 变 1 交替进行。

(2) Z 从 1 变为 0 即从河的此岸到彼岸，此岸的人数减少 1 或 2。即 $(m,\ n,\ 1)\to(u,\ v,\ 0)$ 时，两岸的人数满足 $m\geqslant n$，$u\geqslant v$，且 $m+n-1=u+v$ 或 $m+n-2=u+v$。

(3) Z 从 0 变为 1 时，即从河的彼岸到此岸，则此岸的人数增加 1 或 2。即 $(u,\ v,\ 0)\to(m,\ n,\ 1)$ 时，两岸的人数满足 $m\geqslant n$，$u\geqslant v$，$m+n+1=u+v$ 或 $m+n+2=u+v$。

(4)对重复出现过的状态不计人安全状态，如

$$(3,\ 3,\ 1)\rightarrow(3,\ 2,\ 0)\rightarrow(3,\ 3,\ 1)$$

按照以上规则方法可得到整个过河过程的状态量。最终得到商人们安全渡河的方案有如下四种。

第一种方案：

(3，3，1)→(2，2，0)→(3，2，1)→(3，0，0)→(3，1，1)→(1，1，0)→(2，2，1)→(0，2，0)→(0，3，0)→(0，1，0)→(1，1，1)→(0，0，0)

第二种方案：

(3，3，1)→(2，2，0)→(3，2，1)→(3，0，0)→(3，1，1)→(1，1，0)→(2，2，1)→(0，2，0)→(0，3，0)→(0，1，0)→(0，2，1)→(0，0，0)

第三种方案：

(3，3，1)→(3，1，0)→(3，2，1)→(3，0，0)→(3，1，1)→(1，1，0)→(2，2，1)→(0，2，0)→(0，3，0)→(0，1，1)→(1，1，0)→(0，0，0)

第四种方案：

(3，3，1)→(3，1，0)→(3，2，1)→(3，0，0)→(3，1，1)→(1，1，0)→(2，2，1)→(0，2，0)→(0，3，0)→(0，1，1)→(0，2，0)→(0，0，0)

1.3 建模过程中几个重要环节的说明

1.3.1 问题分析

问题分析也常称为模型准备或者问题重述，是指把实际现象尽量地使用贴近数学的语言进行重新描述，“翻译”成数学问题，为此，要充分了解问题的实际背景，明确建模的目的，尽可能弄清对象的特征，并为此搜集必需的各种信息和数据，要善于捕捉对象特征中隐含的数学因素，并将其一一列出。至此，可以确定建模方向，初步确定选用哪一类模型。

例如，一座高层办公楼有四部电梯，早晨上班时间非常拥挤，该如何解决？

需要解决这样的一系列问题：确定研究的问题是什么？需要哪些数据资料？要做哪些具体的前期工作？建立何种数学模型？

通过分析可得，这个问题是讨论如何设置四部电梯的停靠方式使之发挥最大效率的问题；需要掌握每天早晨乘坐电梯人数、各层上下电梯的人数、电梯的速度、楼层的高度、层数等数据；需要观察和统计所需的数据资料，一般要研究一周内或者更长时间内每天的相关资料；可以建立概率统计模型，也可以在适当的假设下建立确定性的模型。

1.3.2 模型假设

合理的假设是与问题分析紧密衔接的又一个重要步骤，根据对象的特征和建模目的，在问题分析基础上对问题进行必要的、合理的取舍简化，并使用精确的语言作出假设，这是建模至关重要的一步。一个实际问题往往是复杂多变的，如果没有合理的简化假设，则很难转化为数学模型，转化之后如果太复杂也很难解决。当然，若假设得过于简单，会与

实际相去甚远从而使得建模失败，所以，作出假设时要充分利用与问题相关的有关学科知识，充分发挥想象力和观察判断力，分清问题的主次，抓住主要因素，舍弃次要因素，针对问题的特点和建模目的，作出合理的、简化的假设，在合理和简化之间作出折中。

1.3.3 模型构成

用数学的语言、符号描述问题，发挥想象力，使用类比法，尽量采用简单的数学工具建立模型；模型求解，用各种数学方法、软件和计算机技术解决；模型分析，对结果进行误差分析、统计分析、模型对数据的稳定性分析；模型检验，与实际现象、数据比较，检验模型的合理性、适用性。

数学建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术，技术大致是有章可循的，艺术无法归纳成普通适用的准则，所以在建模的过程中需要具备丰富的想象力、敏锐的洞察力和准确的判断力。

通常在进行数学建模培训的时候，分成两个阶段进行：第一阶段主要是基础知识的学习，本书主要是针对第一阶段培训编写的，主要学习数学建模过程中所用的建模方法和计算机软件工具的使用；第二阶段是强化训练阶段，主要是历年真题的学习和模拟训练，学习、分析、评价和改进别人做过的模型，然后以组为单位动手做几个实际的题目。

思考题

1. 什么是数学模型？数学模型的作用是什么？数学建模的基本步骤有哪些？

2. 某人准备搭乘国际航班去国外旅游，规定免费托运的行李件数为两件，每件箱体三边之和不得超过62英寸，但两件之和不得超过107英寸，每件的最大质量不得超过32千克。试问这两件箱子的长、宽、高各为多少可达最大体积？

3. 国庆庆典活动的中心广场有数万名学生手持花环组成大型图案方阵，方阵前排距观礼台120米，方阵纵列95人，每列长度192米，试问第一、二两排间距多大能够达到满意的观礼效果？

4. 在一个半球形容器的球面上出现了六个小圆孔，称这样的容器为残半球容器，往残半球容器中注入液体，如何放置该残半球容器能使其容量尽可能的大？

5. 某金融机构为保证现金充分支付，设立一笔总额540万美元的基金，分开放置在位于A城和B城的两个公司，基金在平时可以使用，但每周末结算时必须确保总额仍为540万美元。经过一段时间，发现每过一周，各公司的支付基金在流通过程中多数还是留在自己公司内，而A城公司有10%支付基金流动到B城公司，B城公司则有12%支付基金流动到A城公司。此时，A城公司基金额为260万美元，B城公司基金额为280万美元。按此规律，两公司支付基金数额变化趋势如何？如果金融专家认为每个公司的支付基金不能少于220万美元，那么是否在什么时间需要将基金作专门调动来避免这种情形？

第 2 章　初等建模方法实例介绍

在建模的过程中，对于所研究的对象，如果是比较简单的问题，可以用初等数学的方法解决，那么尽量不去采用复杂的高等方法。在这一章里，将给出几个实例来简单介绍一下用初等建模方法来建模的过程。

2.1　双层玻璃窗的保温功效

在寒冷的冬天，北方许多住房的玻璃都是双层的，现在来建立一个简单的数学模型，研究一下双层玻璃窗比单层保暖功效大多少。试建立模型说明。

问题分析

这道题很显然需要一部分物理的知识，读者需要思考涉及哪些因素、哪些因素影响最大、作怎样的假设比较合理。比较两座其他条件完全相同的房屋，它们的差异仅仅在于窗户不同，将双层玻璃窗与用同样多材料做成的单层窗的热传导进行对比，对双层窗能减少多少热量损失给出定量分析结果(见图 2-1)。

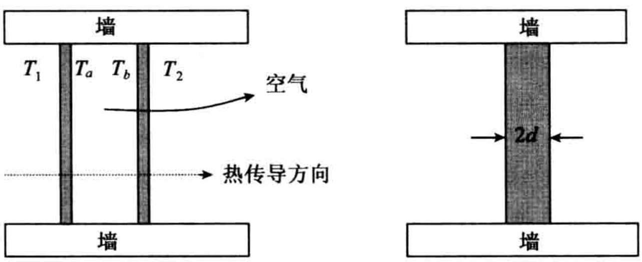


图 2-1　双层玻璃与单层玻璃

模型假设

① 为了防止其他的热损耗，假设热量的传播只有传导，没有对流，即假定窗户的密封性能很好，两层玻璃间的空气是不流动的。

② 为了便于计算，假设室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变，热传导过程已处于稳定状态，即沿热传导方向，单位时间通过单位面积的热量是常数。

③ 玻璃材料是均匀的，热传导系数是常数。(“热传导”是物理知识，需要查阅相关资料，$Q=K\dfrac{\Delta T}{d}$，这里 K 为传导系数，不同介质 K 也是不同的)

符号说明

记　T_a——内层玻璃的外侧温度；

T_b——外层玻璃的内侧温度；
K_1——玻璃的热传导系数；
K_2——空气的热传导系数；
Q——单位时间通过双层窗单位面积的热量；
d——玻璃的厚度(单层玻璃的厚度为 $2d$)；
Q'——单位时间通过单层窗单位面积的热量；
l——双层玻璃间的距离。

模型建立和求解

由热传导过程的物理定律：$Q=K\frac{\Delta T}{d}$，得到

$$Q = K_1\frac{T_1 - T_a}{d} = K_2\frac{T_a - T_b}{l} = K_1\frac{T_b - T_2}{d} \tag{1}$$

$$Q' = K_1\frac{T_1 - T_2}{2d} \tag{2}$$

从式(1)中消去 T_a，T_b，可得

$$Q = \frac{K_1(T_1 - T_2)}{d(S+2)},\quad S = h\frac{K_1}{K_2},\quad h = \frac{l}{d} \tag{3}$$

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{S+2} \tag{4}$$

显然 $Q<Q'$，且 S 越大，比例越悬殊，$K_1=4\times10^{-3}\sim8\times10^{-3}$(J/cm·s·(°))，$K_2=2.5\times10^{-4}$(J/cm·s·(°))，于是$\frac{K_1}{K_2}=16\sim31$，作最保守的估计，即取$\frac{K_1}{K_2}=16$，由式(3)(4)即有

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1}{8h+1},\quad h = \frac{l}{d} \tag{5}$$

模型分析

比值$\frac{Q}{Q'}$反映了双层玻璃窗在减少热量损失上的功效，它只与 $h=\frac{l}{d}$有关，这里 h 不宜选择过大，通常建筑上要求的是 $h\approx4$(数据可以实际到建筑单位调查得到)，按此模型，$\frac{Q}{Q'}\approx3\%$，即使用同样材料制成的双层玻璃窗比单层玻璃窗节约热量 97% 左右，即双层玻璃窗较保温。当然这只是理论上的值，实际上由于很多因素的影响导致功效会比理论的结果差一些，在数学建模过程中有些因素可以忽略不考虑，在对结论分析的时候可以考虑由这些因素引起的偏差。对于这道题，模型假设是在空气干燥、不流通这个理想化的前提下的，而在实际环境下不会完全满足这样的理想条件。

2.2　人在雨中行走淋雨量问题

这里，假设人在雨中沿着直线从一处行走到另一处，雨速为常量且方向不改变(理想中不考虑其他因素)。

把人体看成三面：前面、侧面和头顶。并假设这三面面积之比为前：侧：顶 $=1:a:b$，设总面积为 s。

设人沿 x 轴方向行走，速度向量表示为 $(v, 0, 0)$，$v>0$，而雨速向量表示为 (u_x, u_y, u_z)，行走距离为 l。

联想到电磁通量的定义，可以定义淋雨量为某时间内通过表面积的雨水量，则淋雨量 Q 的表达式为

$$Q(v) = [\,|u_x - v| + |u_y|a + |u_z|b\,]\frac{s}{1+a+b}\frac{l}{v}$$

其中，$\frac{l}{v}$ 为时间，$|u_x - v|\frac{s}{1+a+b}\frac{l}{v}$ 为前面的淋雨量，$|u_y|a\frac{s}{1+a+b}\frac{l}{v}$ 为侧面的淋雨量，$|u_z|b\frac{s}{1+a+b}\frac{l}{v}$ 为顶的淋雨量。

把固定的量用符号代替，记

$$\lambda = \frac{sl}{1+a+b},\quad q = |u_y|a + |u_z|b$$

由于需要考虑行走速度和淋雨量二者之间的关系，所以根据 $|u_x - v|$ 去掉绝对值的情况把 $Q(v)$ 可写成分段函数的形式

$$Q(v) = \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{q+u_x}{v} - 1\right), & u_x \geqslant v \\ \lambda\left(\dfrac{q-u_x}{v} + 1\right), & u_x < v \end{cases}$$

利用计算机软件画出上述函数的示意图(如图 2-2 所示)。

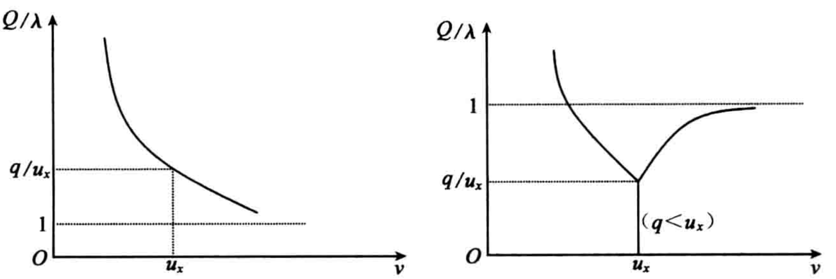


图 2-2 函数示意图

根据上面图象分析可以得到速度 v 和淋雨量 Q 之间的关系：

(1) 当 $v<u_x$ 时，由表达式 $\frac{Q(v)}{\lambda} = \frac{q+u_x}{v} - 1$，这时若速度 v 增大并趋向于 u_x 时，$\frac{Q(v)}{\lambda}$ 逐渐趋向于 $\frac{q}{u_x}$，越来越小，即这种情况下是速度越快淋雨量越小；

(2) 当 $v>u_x$ 时，表达式 $\frac{Q(v)}{\lambda} = \frac{q+u_x}{v} + 1$，这里又有两种情况：若 $q \geqslant u_x$，则速度 v 越大，$\frac{Q(v)}{\lambda}$ 越小；若 $q<u_x$，即 $q-u_x<0$，则速度 v 越小，$\frac{Q(v)}{\lambda}$ 越小。

由上述分析得当 $q \geqslant u_x$ 或 $q<u_x$ 但 $v<u_x$ 这两种情况属走得越快淋雨量越少；在 $q<u_x$

时，如果 $v > u_x$，则正好相反。

2.3　生猪体重估测问题

生猪收购站的人员或者养猪专业户，称量生猪的体重比较麻烦，若能从生猪的身长估计它的重量，则可以给他们带来很大的方便。那么，四足动物的躯干长度和它的体重有什么关系呢？试建立数学模型来说明。

问题分析和假设

不考虑动物的头和尾，把四足动物的躯干看作圆柱体，由于动物的身体重量下垂，可以看作是一根支撑在四肢上的弹性梁，如图 2-3 所示。

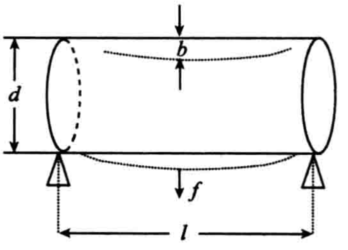


图 2-3

模型构成

记　b——动物在自身体重 f 的作用下躯干的最大下垂度，即梁的最大弯曲程度；

l——长度；

d——直径；

S——横断面积；

f——梁重。

根据弹性力学的结论知

$$b \propto \frac{fl^3}{Sd^2} \tag{1}$$

又因为 $f \propto Sl$，代入上式可得

$$b \propto \frac{Sl^4}{Sd^2}$$

所以

$$b \propto \frac{l^4}{d^2}$$

即

$$\frac{b}{l} \propto \frac{l^3}{d^2} \tag{2}$$

从生物学进化论角度可以假定，对每种动物 $\frac{b}{l}$ 设为一个常数，即得

$$l^3 \propto d^2 \tag{3}$$

又由 $d^2 \propto S$，$f \propto Sl$，所以

$$f \propto d^2 l$$

即

$$f \propto l^3 l$$

亦即

$$f \propto l^4 \tag{4}$$

即动物的体重与躯干长度的 4 次方成正比。

注：这种类比法是数学建模中常用的技巧，需要充分发挥想象力，把问题转化为已经具有确切研究成果的问题来解决。

2.4 交通事故中的简单数学建模问题

一辆小型汽车在拐弯时紧急刹车冲进路边的沟里。警察在现场对汽车留在路上的刹车痕迹进行细致的测量，根据所测得的数据画出了如图 2-4 的事故现场平面图。

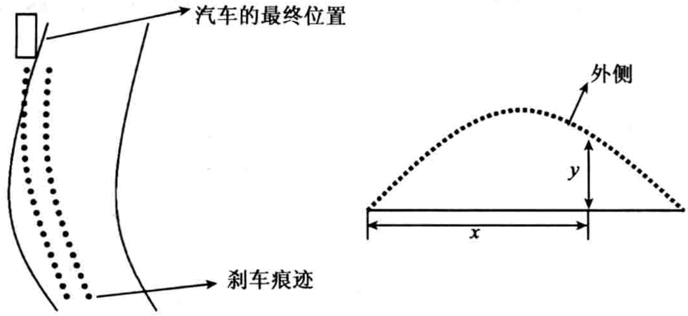


图 2-4 事故现场平面图

该路段限速 30 英里/h，警察怀疑驾驶者超速行驶，可司机说没有超速，而是在进入弯道后刹车失灵所以发生事故。通过验车，证实该车的制动器在事故发生时失灵。警察按通常的做法，作一条基准线来测量刹车痕迹，距离 x 沿基准线测得垂直距离 y。表 2-1 给出外侧刹车痕迹的有关值(单位：m)。

表 2-1

x	0	3	6	9	12	15	16.64	18	21	24	27	30	33.27
y	0	1.19	2.15	2.82	3.28	3.53	3.55	3.54	3.31	2.89	2.22	14.29	0

警察还测得该路段路没有任何坡度。接着以同型号的车在初速度为 30 英里/h (13.4112m/s)下进行两次刹车测试。

第一次测试得位移 $s = 11.0$m，第二次测试得位移 $s = 10.85$m。

请帮忙鉴定一下造成这次交通事故的直接原因究竟是刹车失灵还是违章超速行驶？

模型假设

(1) 从平面图可见汽车没有偏离它行驶的转弯曲线，车头一直指着切线方向。由此可设汽车的重心沿一个半径为 r 的圆运动；

(2) 从平面图可见汽车车轮转着打滑，车滑向路边。由此可认为摩擦力作用在汽车速度的法线方向上，在这种情形下，摩擦力提供向心力。假设摩擦系数为 μ。

(3) 汽车出事时的初速度 v_0 为常数。

模型建立

(1) 计算出圆周半径 r 的近似值。(以下用两种办法求解)

由测得的数据进行拟合一个圆。可以隔三点选一个，代入

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

得到一组 r 的值，然后取平均值。

也可由弓形中的计算公式(m 为弓形的高，c 为弦的长度)