普通高等教育“十二五”规划教材 | 普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

陈必红 ✦ 编著

GAILüLUN YU SHULI TONGJI

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十二五”规划教材

普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

陈必红　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书介绍了概率论与数理统计课程中的基本知识，如随机试验、样本空间、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、总体与样本、估计与假设检验等知识，以及数理统计在线计算，此外每章后附有习题。

本书可作为高等院校的非数学专业学生学习概率论与数理统计课程的教科书，也可作为一般科技人员自学、研究和参考的书籍。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/陈必红编著. —武汉：华中科技大学出版社，2013.10

ISBN 978-7-5609-9458-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 244827 号

概率论与数理统计 陈必红 编著

责任编辑：王汉江
封面设计：范翠璇
责任校对：张 琳
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编：430074 电话：(027)81321915
录 排：武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷：华中理工大学印刷厂
开 本：850mm×1168mm 1/32
印 张：8.25
字 数：221 千字
版 次：2013 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
定 价：22.00 元

前　言

本书是针对普通高等院校大中专学校中的非数学类专业而编写的，其内容根据每周授课三小时、一个学期讲完的量来设计，因此更多地注重概率论部分。

本书有如下特点。

一、本书受到应用数学家园网站（www.应用数学.cn）的在线计算功能的支持。该网站是作者的私人网站，其中的在线计算功能的全部程序由作者一人编写，能够在线进行概率论和数理统计的一些常用计算。进入网站不用注册，无须登录，完全免费，方便大家使用。因为在线计算的支持更为有力，因此，概率论教材中的一些常用数表，本教材不再编入。例如，由于以往的有关正态分布的计算都是要查标准正态分布函数表的，而且在二十世纪五六十年代计算机不普及，所以常用的计算都是笔算。标准正态分布函数表正因为正态分布的对称性而只给出了自变量大于 0 的部分，故一般的正态分布的计算都要先标准化然后再查表，如果是在表的范围之外，还要利用对称性，甚至还要利用表的技巧，然而所有这些笔算技巧在今天都因在线计算的存在而过时了。

二、在引入了单位脉冲函数后，首次以概率密度函数为核心统一描述所有类型的随机变量的分布，从而淡化分布函数的作用。

三、在计算一元随机变量的函数的分布时首次引入条件切割技术，从而无须利用分布函数就能够计算随机变量的非单调函数的分布。而在计算二元随机变量的函数的分布时也不用分布函数

的技术，而是采用条件分析的技术，避开了广义二重积分，这样仍然能够迅速地给出两个随机变量的和的概率密度的卷积公式，学生很容易理解。

四、因为笔者近年发现的条件切割和条件分析技术，使随机变量的函数的数学期望公式能够相当容易地被证明，而现有的几乎所有的非数学专业的教材通常都对这些公式不做证明。

五、利用笔者近年发现的判定随机变量独立性的正四点行列式技术，使得判断随机变量的独立性不再需要计算边缘分布，而且判定方法很容易。

六、首次利用条件分析技术给出二元以上随机变量的线性函数和线性变换的分布公式，这在以往的教材中都是避谈的。

七、纠正了以往绝大部分教材中的一个共同错误：由 n 个相互独立的正态分布的随机变量线性组合出来的任何 m 个随机变量，仍然服从多元正态分布。笔者指出其前提条件是线性组合必须满秩，才有这个结论，否则只能够是广义多元正态分布，而这一提法也是笔者首次提出的。

八、在数理统计中首次提出“高概率区”的概念，读者只要接受了这个概念，理解数理统计中的各种思想就相当容易了。

因为本书叙述在某些方面与传统概率论与数理统计教材不一样，这也是一种大胆的尝试，其中的不足和错误也在所难免，欢迎读者批评指正。

陈必红

2013 年 10 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

自然界和社会中有大量的随机现象，例如，某地的天气可以时而下雨时而天晴，市场的行情有时好有时差，一支球队进行多次比赛有时胜有时负，等等。概率论与数理统计是研究这些随机现象的统计规律性的学科。

1.1　随机事件

1.1.1　随机事件的概念

首先介绍试验这个概念。任何事物运动的某一阶段都可以认为是一次**随机试验**，简称**试验**。作为初学者要学习的概率论，更关心的是在相同条件下能够反复进行的试验，而且试验的各种可能的结果都可以在试验前明确。

因此，可能的**试验结果**这个术语也很重要，它指的是一次试验的全部过程的记录。当然，对于简单的试验，有可能只关心最终的结果。

而一次试验的所有可能结果，构成一个集合，这个集合称为**样本空间**，用希腊字母 Ω 表示，而样本空间的元素就是各个可能的实验结果，用希腊字母 ω 表示，一个试验结果称为一个**样本点**，因此样本空间也是样本点的集合。

例如，掷一次硬币是一个试验，它有两个可能的试验结果，就

是“徽面”、“字面”，也可以定义其中一面是正面，另一面是反面，因此 $\Omega=\{$正面，反面$\}$。

掷一次围棋子也是一个试验，当然也有正面和反面两种可能，因此 $\Omega=\{$正面，反面$\}$。虽然掷围棋子和掷硬币试验的样本空间看起来一样，但它们却是不同的试验，后面要讲到它们的区别。

掷一次骰子也是一个试验，试验结果是 1 点到 6 点中的一个，因此 $\Omega=\{1$ 点，2 点，3 点，4 点，5 点，6 点$\}$。

此外，两个以上的试验也可以拼成一个试验，例如，掷五次围棋子算一次试验，或者掷两次骰子算一次试验，等等，则样本空间的元素都会急剧增加。

对于更为复杂的试验，试验结果是什么，也是具有一定的人为规定的因素的。例如，甲、乙两队进行一场足球比赛算一次试验，则可以将甲队胜、乙队胜、平局作为三个试验结果，但是也可以将比赛的最终比分作为试验结果，更可以将一场足球赛拆分成上半场比赛和下半场比赛两个试验拼成的试验，将上半场的比分和下半场的比分进行记录，甚至还可以记录射门次数、红黄牌处罚的情况、犯规的次数、控球的时间，等等，因此最后认为什么是试验结果是具有相当的人为因素的，所以才有本节一开始说的，索性认为一次试验过程的全记录算一个结果，如果这样，那么试验结果的集合其实是巨大的。当然，作为概率论的初学者我们总是先研究简单的试验，例如像掷硬币或者掷骰子这样的试验。

在给定了样本空间 Ω 之后，将样本空间中所有的元素的集合都称为**随机事件**，简称**事件**，用大写字母 A,B,C 等表示。当一次试验结束后，如果发生的结果 ω 属于集合 A，就称事件 A **发生**了，如果不属于事件 A，就称 A **不发生**。而整个样本空间 Ω 也可以认为是它自己的子集，称之为**必然事件**，这是因为每次试验的结果必然是 Ω 中的一个元素，所以 Ω 必然发生。规定空集 $\varnothing$ 为任何集合的子集，这里称为**不可能事件**，这也是因为每次试验的结果不会是

空集中的一个元素,所以空集代表不可能发生。

例 1.1　一个口袋里装有分别标有 1,2,3 三个号码的三个小球,从中任取一球观察其号码。

样本空间 $\Omega=\{1,2,3\}$,由此样本空间可构成如下八个事件:

Ω, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\varnothing$

而这八个事件作为元素又可以构成一个集合,就是所有事件构成的集合,称之为由此样本空间构成的**事件集**。因此,必须注意到事件集其实是集合的集合。

而概率论在描述各个事件时,除了使用子集的方法外,有时因为试验结果过于复杂,因此指出子集也不容易,倒是经常用一些断言来进行描述,所谓**断言**就是针对试验结果的一个语句,它只有两种可能的结果:真或者假。就拿这个口袋里有三个小球任抽一球的试验来说,事件{1,2}也可以用断言表述为{抽得的号码小于3},甚至{抽得的号码小于 2.5}都行,由此看出断言的不唯一性,但是描述的都是同一个集合,而这个试验中的必然事件 Ω 可描述为{抽得的号码小于 5},甚至描述为{抽得的号码小于 10000},它之所以称为必然事件,就是因为无论怎么试验,抽得的号码只能够是 1,2,3 这三个号码,因此上面的两个断言都为真,即一定发生。而不可能事件当然也可以描述为{抽得的号码小于 0},或者描述为{抽得的号码小于－1000}都可以。

因此后面就规定事件就是试验结果的集合,集合中的元素通常都是用大括号{}括起来的,而事件也可以用一个断言来表示,这个断言也用大括号括起来,例如事件

$$A=\{\text{抽得的号码小于 } 0\}$$

只包含一个试验结果的事件称为**基本事件**,就拿例 1.1 来说,{1},{2},{3}就是基本事件,请注意基本事件仍然是集合,是只包含一个元素的集合,不应当与这个元素本身混为一谈。

例 1.2　在一个平坦的地面上用围栏围出一个边长为 1 m 的

正方形，向这个围栏里扔一个乒乓球，这个乒乓球在围栏里弹跳和滚动，遇到围栏会被弹向其他方向，最后因为摩擦力而停止，一次试验完成，试验结果是这个乒乓球在围栏里的位置。在地面上设定正方形的左下角为原点 O，x 轴和 y 轴分别与两条边重合，则试验结果的位置表示为一对坐标值(x,y)，这就是样本点，因此样本空间就是正方形中所有的点，而一个事件则可能是其中的一块区域。当然，因为乒乓球不是一个点而是半径为 r，因此这个围栏的边长应当是在每条边上都让出半径 r 的长度，也就是边长为 $1\ \mathrm{m}+2r$，才能够保证乒乓球的停止点在边长为 1 m 的正方形内取值。以后将这个试验称为在边长为 1 m 的正方形中投掷一点的试验。

例 1.2 与例 1.1 的区别在于，它有无限多个可能的试验结果，以及无限多个不同的随机事件。

1.1.2 无限集的可列和不可列

因为试验的情况各种各样，经常遇到的情况就像上节的例1.2一样，试验结果或者样本点为无限多个，因此在谈到具有无限个元素的集合时，经常遇到术语“可列个”和“不可列个”，本节讲一下它们的含义。

我们知道自然数集合 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$是有无限个元素的集合，这个集合的多少被定义为可列个。而任何其他的有无限多个元素的集合，如果能够与自然数集合有一个一一对应的关系，那么这样的无限集就称为**可列集合**或者有**可列**个元素的集合。

可列集合 A 中的每一个元素都可以有唯一的一个自然数 n 和它对应，或者说，将自然数看做是身份证号码，则可列集合 A 中的每一个元素都可以分配到唯一的身份证号码 n，这样就可以将这个元素记作 ω_n，即将 n 作为这个元素记号的下标。

但是，可以证明实数集合是不可列的，证明的思路是：首先证明区间$(0,1)$内的所有实数是不可列的，或者说，所有的纯小数构

成的集合是不可列的。这是用反证法来证明的。举个例子，假设区间(0,1)内的所有实数是可列的，则可以列成下面的实数 a_1，a_2，a_3，a_4，…，比方说，假设

$$a_1=0.1253298\cdots$$
$$a_2=0.3078230\cdots$$
$$a_3=0.3567802\cdots$$
$$a_4=0.4520423\cdots$$
$$\vdots$$

因此现在根据这个已经给出的排列来定义一个新的纯小数 b。b 的第一位小数这样取，就是注意到 a_1 的第 1 位小数不是 0，因此定 b 的第 1 位小数偏要是 0；而 a_2 的第 2 位小数是 0，因此定 b 的第 2 位小数偏要是 1；而 a_3 的第 3 位小数不是 0，因此定 b 的第 3 位小数是 0；a_4 的第 4 位小数是 0，则定 b 的第 4 位小数是 1，等等。依此类推，就是说 b 的第 k 位小数，要看上面列出来的第 k 个实数 a_k 的第 k 位小数是不是 0，如果是，则 b 的第 k 位小数是 1；如果不是，则 b 的第 k 位小数就是 0。综上所述，$b=0.0101\cdots$。那么，b 肯定不与序列 a_1，a_2，…中的任何一位实数相同，这是因为它的第 k 位小数肯定不与第 k 个实数 a_k 的第 k 位小数相同。

用这样的证明思路就可以证明一个区间(0,1)内的所有小数是不可列的，而任何其他区间内的实数和区间(0,1)内的实数是有办法形成一一对应的关系的。

例如，函数 $y=2x-1\ (x\in(0,1))$，就建立了一个区间(0,1)到另一个区间(−1,1)的一一对应关系，再令 $z=\frac{\pi}{2}y$，则 z 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内取值，再令 $w=\tan z$，则建立起区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 到整个实数轴的一一对应关系。

因此，任何一个区间的全体实数都无法和自然数集合一一对

应，即不可列。而实数集合的不可列性质，给数学家们构建概率论的公理化体系带来了不少麻烦，这在后面要提到。

1.1.3 事件间的关系与运算

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的每一个样本点也都属于事件 B，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 含于事件 B，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。如果事件 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。对于任何事件 A，都有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$。

2. 事件的并(和)

两个事件 A、B 中至少有一个发生，即"A 或 B"，是一个事件，称为事件 A 与 B 的并(和)。它是由属于 A 或 B 的所有样本点构成的集合，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$。

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，是一个事件，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n \quad 或 \quad A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

也可以写成 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。当然，也可以存在不可列个事件，假设它们能够和区间(0,1)内的所有实数成一一对应关系，也许我们可以将区间(0,1)内的每一个实数分配给每一个事件作为这个事件的下标，写成 A_a，a 是纯小数，因此也可以有不可列个事件中至少有一个发生的事件，记作 $\bigcup\limits_{a\in(0,1)}A_a$，但是概率论的理论是不赞成这样写的，因为会有麻烦，后面我们将提到这个麻烦。

3. 事件的交(积)

两个事件 A 与 B 都发生，即"A 且 B"，是一个事件，称为事件 A 与 B 的交或者积。它是由既属于 A 又属于 B 的所有公共样本点构成的集合，记作 $A\cap B$ 或者 AB。

一些教材写成 A 与 B 同时发生也是可以的，但是必须记住这里的“同时”二字就是“都”的意思，而不是指的时间上一秒不差地发生。例如连掷两次围棋子算一次试验，则事件 $A=\{$第一次正面$\}$和 $B=\{$第二次正面$\}$的积事件 $AB=\{$两次都掷出正面$\}$，但是这两次具体掷的时间间隔有可能很长，也有可能很短，因此就不是时间上的同时。

4. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，是一个事件，称为事件 A 与 B 的差。它是属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合，记作 $A-B$。

5. 互不相容事件

如果事件 A 与 B 不能都发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与 B **互不相容或互斥**，互不相容事件 A 与 B 没有公共的样本点。显然，不同的基本事件之间是互不相容的。

6. 对立事件

事件“非 A”称为 A 的**对立事件**(或**逆事件**)。它是由样本空间中所有不属于 A 的样本点组成的集合，记作 $\overline{A}$。

显然，有　$A\overline{A}=\varnothing$，　$A+\overline{A}=\Omega$，　$\overline{A}=\Omega-A$，　$\overline{\overline{A}}=A$

7. 完备事件组(划分)

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容的事件，并且

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个**完备事件组**或一个**划分**。

显然，任何一个事件 A 与它的逆事件 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组。

各事件的关系及运算如图 1-1 中的图形所示。

随机事件的关系与运算有以下一些常用的性质。在下面的描述中假设 A,B,C 为三个任意的事件。

(1) 分配率。

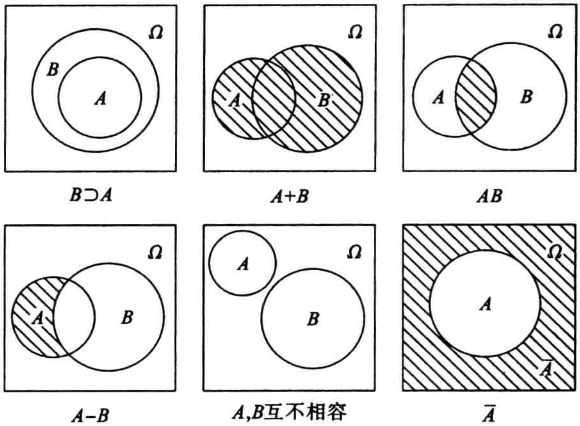

图 1-1

在事件的分配率中事件的和类似于两个数的加，而事件的积类似于两个数的乘，因此下面两个式子都成立：

① $A(B+C)=AB+AC$。

也就是说，{A 发生}且{B 和 C 至少发生一件}，等于 A，B 都发生，或者 A，C 都发生。

② $A+BC=(A+B)(A+C)$。

也就是说，A 和 BC 至少发生一件，相当于{A 与 B 至少发生一件}且{A 和 C 至少发生一件}。

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一完备事件组，即

$$A_iA_j=\varnothing \quad (i\neq j;\ i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$$

则对于任给的事件 B，都有

$$B=B\Omega=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n$$

上面最右边的等式的和事件中的各个事件相互之间是互不相容的，也就是说一个完备事件组可以将任何一个事件分割成一些

互斥事件的和事件。

(2) 德·摩根定理。

① $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$,意思是 A 和 B 都发生的对立事件等于{A 没有发生}和{B 没有发生}至少出现一件。

② $\overline{A+B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,意思是{$A$ 和 B 至少发生一件}的对立事件等于 A 没有发生且 B 也没有发生。

德·摩根定理的最大用处就是可以“化和为积”以及“化积为和”。

(3) $A-B=A\overline{B}=A-AB$。

这是因为 $A-B$ 表示 A 发生 B 不发生,而 $A\overline{B}$ 也是同样的意思,根据德·摩根定理,有

$$\begin{aligned}A-AB&=A\,\overline{AB}=A(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{A}+A\overline{B}\\&=\varnothing+A\overline{B}=A\overline{B}=A-B\end{aligned}$$

在计算中更喜欢将 $A-B$ 表示成 $A-AB$,这是因为 $A\supset AB$。

(4) 可将任意两个事件 A,B 的和事件表示成两个互斥事件的和事件:

$$A+B=A+(B-AB) \tag{1.1}$$

证明如下:

$$\begin{aligned}A+B&=(A+B)\Omega=(A+B)(A+\overline{A})=AA+A\overline{A}+BA+B\overline{A}\\&=(A+AB)+B\overline{A}=A+(B-A)=A+(B-AB)\end{aligned}$$

例 1.3　掷一颗骰子的试验,观测出现的点数:事件 $A=\{$奇数点$\}$;$B=\{$点数小于 5$\}$;$C=\{$小于 5 的偶数点$\}$。用元素的列举法表示事件 Ω, A, B, C, $A+B$, $A-B$, $B-A$, AB, AC, $C-A$, $\overline{A}+B$。

解　$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$　　$A=\{1,3,5\}$

$B=\{1,2,3,4\}$　　$C=\{2,4\}$

$A+B=\{1,2,3,4,5\}$　　$A-B=\{5\}$

$B-A=\{2,4\}$　　$AB=\{1,3\}$