高中部分

TI图形计算器与中学数学教学

主编　范登晨 薛文叙

人民教育出版社

TI图形计算器

与

中学数学教学

（高中部分）

范登晨　薛文叙　主编

人民教育出版社

·北京·

图书在版编目（CIP)数据

TI图形计算器与中学数学教学（高中部分）/ 范登晨　薛文叙主编.
北京：人民教育出版社，2001
ISBN 7-107-14143-0

Ⅰ.T…
Ⅱ.范…
Ⅲ.数学课 - 计算机辅助教学 - 高中 - 教学参考资料
Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第03816号

人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
北京联华印刷厂印装　全国新华书店经销
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：9.5
字数：200 千字　印数：0 001~ 5 200 册
定价：17.40 元

前　言

随着计算机技术的高速发展和在各个领域中的广泛应用，我国中学数学教学中也越来越普遍的使用了计算机辅助教学。在把普通计算机应用于数学教学的同时，另一种辅助教学的工具——“图形计算器”也在逐步得到推广。

实际上，图形计算器可以看成一个具有专用功能的小型计算机，它具有学生学习数学所最需要的计算和作图的各种功能。和普通计算机相比，它便于携带、使用方便、功能专一，既可以供教师在备课过程中或课堂教学演示时使用，也是学生学习和应用知识时的现代化的学习工具，这一工具学生可以由中学一直使用到大学甚至到参加工作以后。

图形计算器的型号和功能是随着使用的需要不断更新和加强的，本书课件制作所用的TI－92 Plus图形计算器就是一种具有较强的代数和几何功能的图形计算器。很多中学都使用这一种图形计算器辅助数学教学。

广大中学数学教师对图形计算器辅助教学表现出极大的热情和兴趣，很多老师积极投入到有关的试验和教学实践活动中来，并在这一过程中取得了显著的成绩，摸索出很多宝贵的经验。在此基础上我们选编了部分教师使用图形计算器的课例和针对某一教学中的问题制作的课件汇集成这本书，目的是总结经验、加强交流、进一步促进图形计算器辅助中学数学教学工作的开展。

本书代数部分的课例和课件由伊红旗、吴雅萍、王晓青、尹政君、刘运河、侯力伟等六位青年教师编写；立体几何部分的课例和课件由范登晨老师编写；解析几何部分的课例由薛文叙老师编写，课件由杜志良老师编写。刘秀丰工程师提供了部分课件和附录2卡氏几何操作基础知识，并绘制了解析几何部分的图形。全书由范登晨、刘秀丰统稿。

TI－92Plus 图形计算器中装有目前被大家公认的最适合用于计算机辅助中学数学教学的工具软件“几何画板”，本书中的很多教学用课件是使用这一工具制作的。为了使大家了解图形计算器中几何画板的使用方法，本书的附录1介绍了图形计算器中几何画板的基本用法，材料由北京二十中学TI课题组提供。

TI－92 Plus图形计算器具有较强的编程功能，在这方面它有很大的潜能有待我们去开发。本书的附录3介绍了刘运河老师编写代数课例8时编制的一个简单程序。

应用图形计算器辅助中学数学教学是比用普通计算机辅助教学更新的新生事物，我们是以探索和学习的态度编写本书的。书中难免有疏漏与错误之处，希望得到读者的批评和指正。相信在我们的共同努力下，图形计算器一定会在中学数学教学中发挥更大的作用。

编　者

2000年10月

目 录

第一部分　高中代数

一、课　例

1 幂函数的图象和性质

[**教学目的**]

1．使学生理解幂函数概念；

2．让学生亲自动手利用图形计数器画幂函数的图象，并通过所画幂函数图象观察、思考、归纳幂函数的基本性质；

3．利用图形计算器画图方便、直观的性质，激发学习的兴趣；参变量与图象关系在动画中展示，使难点易于突破．

[**教学方法**]

讲解与讨论相结合，使用图形计算器中的“几何画板”和“函数图象”辅助教学．

[**教法设计**]

约2课时，第1节课讲解概念，并让学生用图形计算器画几个典型的幂函数图象，第2节课总结规律．

[**教学过程**]

一、幂函数概念

我们已经学过函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^{-1}$，这些函数都是幂函数．下面给出幂函数的定义：

一般地，函数 $y=x^a$ 叫做幂函数，其中 x 叫做自变量，a 是常数（这里我们只讨论 a 是有理数的情况）．

1．提问：$a=0$，$a=1$，$a=2$，$a=-1$ 时函数是什么函数？

答：$a=0$ 时，$y=x^0$ 即 $y=1$（x 不为0）

$a=1$ 时，$y=x$

$a=2$ 时，$y=x^2$

$a=-1$ 时，$y=\frac{1}{x}$

2．提问：$a=\frac{1}{2}$，$a=\frac{1}{3}$，$a=-\frac{1}{2}$，$a=-3$，$a=3$ 时函数是什么函数？并回答此时函数的定义域．

答：$a=\frac{1}{2}$时，$y=\sqrt{x}$，定义域：$[0,+\infty)$

$a=\frac{1}{3}$时，$y=\sqrt[3]{x}$，定义域：$\mathbf{R}$

$a=-\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，定义域：$(0,+\infty)$

$a=3$ 时，$y=x^3$，定义域：$\mathbf{R}$

$a=-3$ 时，$y=\frac{1}{x^3}$，定义域：$x\neq 0$

二、$n>0$ 时，$y=x^n$ 的图象和性质

1．用图形计算器画下列函数的图象：

（1）$y=x^2$　　$y=x^4$　　$y=x^6$

画图前先提问：这三个函数图象的位置怎样？请同学们讨论其对称性和增减性，然后再让同学们用图形计算器画出图象．

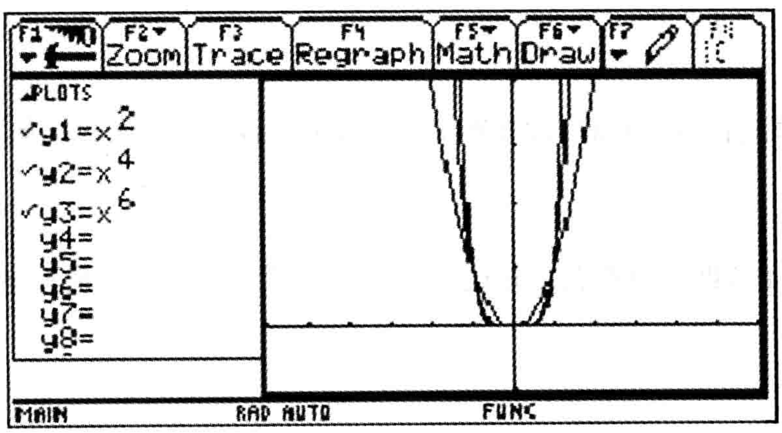


图 1－1

由图 1－1 可以看出 $y=x^2$，$y=x^4$，$y=x^6$ 的图象形状类似，有公共点 $(0,0)$，$(1,1)$ 和 $(-1,1)$，定义域为实数集 $\mathbf{R}$，值域为 $y\geqslant 0$，图象在 x 轴上方．因为这三个函数都是偶函数，所以图象关于 y 轴对称．当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大；当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

（2）$y=x^3$　　$y=x^5$　　$y=x^7$

画图前先提问：这三个函数图象的位置怎样？请同学们讨论其对称性和增减性，然后再让同学们用图形计算器画出图象．

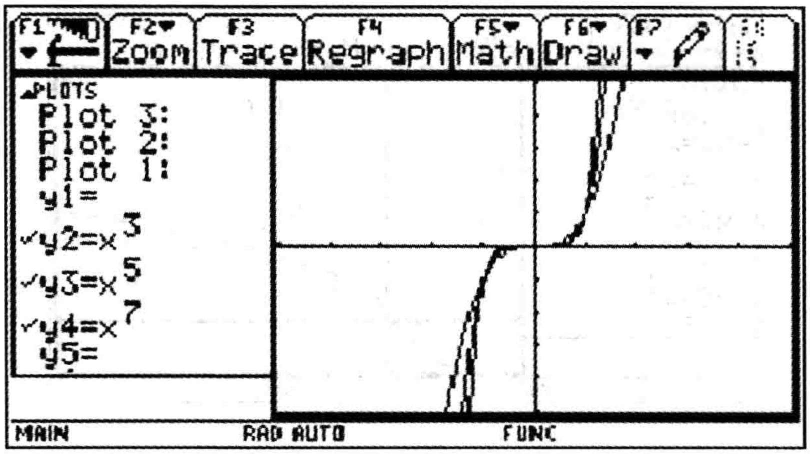


图 1－2

由图 1－2 可以看出 $y=x^3$，$y=x^5$，$y=x^7$ 的图象形状类似，有公共点（0，0），（1，1）和（－1，－1），定义域为实数集 **R**，值域为 **R**，x 与 y 的符号相同，图象在一、三象限．又因为这三个函数都是奇函数，所以图象关于原点中心对称．且函数在定义域 **R** 内，y 随 x 增大而增大．

（3）$y=x^{\frac{1}{2}}$　　$y=x^{\frac{1}{4}}$　　$y=x^{\frac{1}{6}}$　　（4）$y=x^{\frac{1}{3}}$　　$y=x^{\frac{1}{5}}$　　$y=x^{\frac{1}{7}}$

和前面（1），（2）一样，先提问同样的问题请同学回答．然后，让同学画图比较，加强印象．

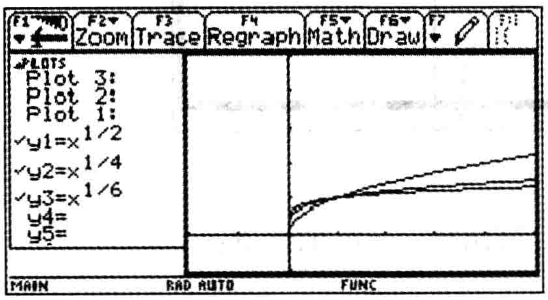


图 1－3

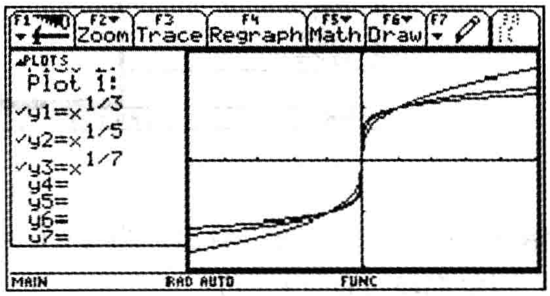


图 1－4

小结 1　从上面函数图象可以看出：幂函数 $y=x^4$，$y=x^6$，…的图象类似于 $y=x^2$ 的图象；$y=x^5$，$y=x^7$，…的图象类似于 $y=x^3$ 的图象；$y=x^{\frac{1}{4}}$，$y=x^{\frac{1}{6}}$，…的图象类似于 $y=x^{\frac{1}{2}}$的图象；$y=x^{\frac{1}{5}}$，$y=x^{\frac{1}{7}}$，…的图象类似于 $y=x^{\frac{1}{3}}$的图象．

2．下面我们在同一坐标系中画出幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象，如图 1－5．

小结 2　　当 $n>0$ 时，幂函数 $y=x^n$ 有如下性质：

（1）图象都经过（0，0），（1，1）；

（2）在第一象限内，函数值 y 随着 x 的增大而增大；

（3）当 $n>1$ 时，函数为凹函数，当 $0<n<1$ 时，函数为凸函数．

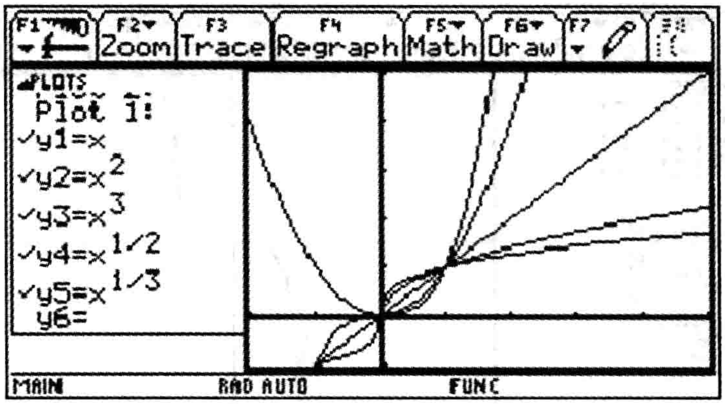


图 1-5

三、$n<0$ 时，幂函数 $y=x^n$ 的图象和性质

(1) 下面我们在同一坐标系中用图形计算器画出幂函数 $y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$，$y=x^{-\frac{1}{2}}$的图象，如图 1-6.

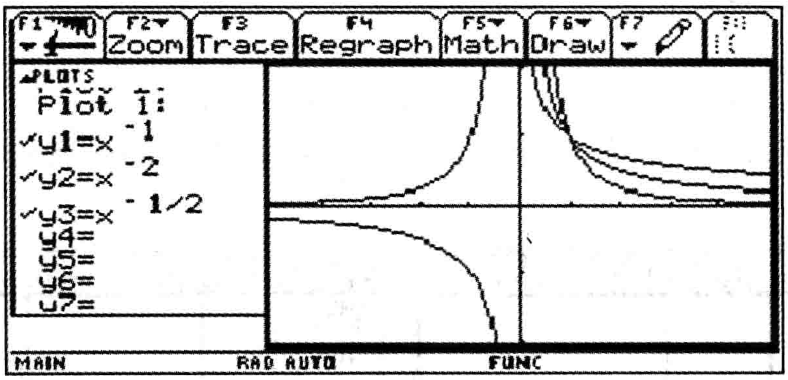


图 1-6

小结 3 从以上图象可以看出，当 $n<0$ 时，幂函数 $y=x^n$ 的性质：

(1) 图象都经过点 (1, 1)；

(2) 在第一象限内，函数值 y 随着 x 的增大而减小；

(3) 在第一象限内，图象向上与 y 轴无限地接近，向右与 x 轴无限地接近.

四、n 值变化与幂函数 $y=x^n$ 图象的关系

利用图形计算器可以作出几个 n 值变化的按钮，让同学们通过按动按钮发现 n 值变化与图象的关系，如图 1-7.

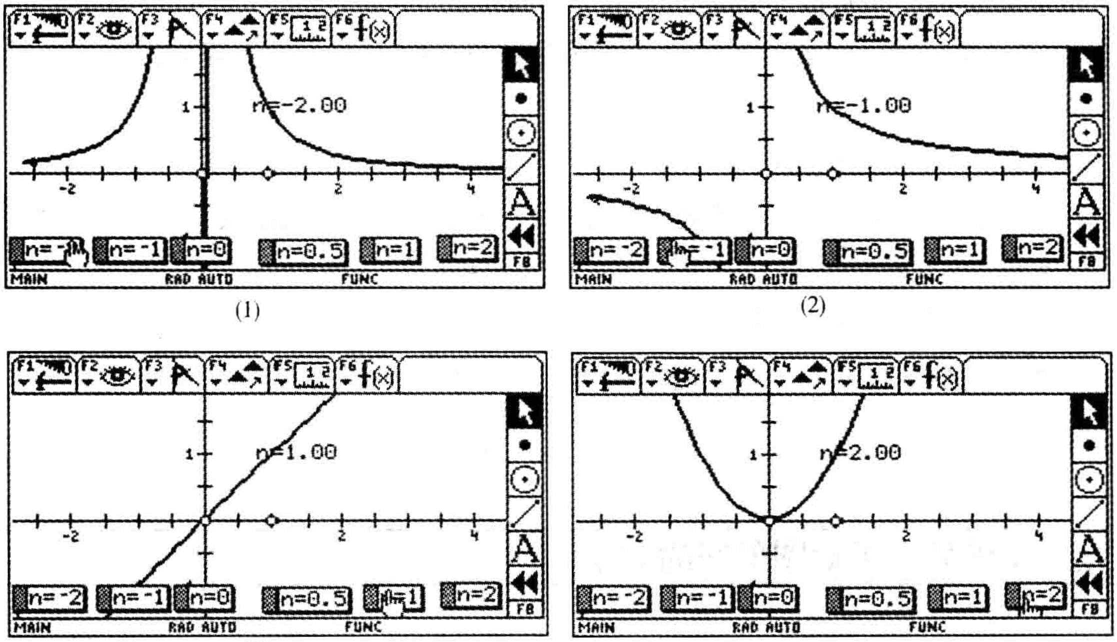
通过上面的操作练习，同学们对幂指数 n 和幂函数的性质就更加清楚了.

五、例题

例 1 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $1.5^{\frac{3}{5}}$， $1.7^{\frac{3}{5}}$ (2) $0.7^{1.5}$， $0.6^{1.5}$

解：(1) 题中两个值都是幂运算的结果，且指数相同，因此，可以利用幂函数的性质来判断它们的大小，考察幂函数 $y=x^{\frac{3}{5}}$，在第一象限内，函数值 y 随着 x 的增大而增大.



(1)　(2)　(3)　(4)

图 1－7

∵　$1.5<1.7$

∴　$1.5^{\frac{3}{5}}<1.7^{\frac{3}{5}}$

(2) 考察幂函数 $y=x^{1.5}$，同理可知，$0.7^{1.5}>0.6^{1.5}$.

例 2　比较下列各题中两个数的大小：

(1) $2.2^{-\frac{2}{3}}$，$1.8^{-\frac{2}{3}}$　　(2) $0.15^{-1.2}$，$0.17^{-1.2}$

解：(1) 考察幂函数 $y=x^{-\frac{2}{3}}$. 在第一象限内，函数值 y 随着 x 的增大而减小.

∵　$2.2>1.8$

∴　$2.2^{-\frac{2}{3}}<1.8^{-\frac{2}{3}}$

(2) 考察幂函数 $y=x^{-1.2}$，同理

∵　$0.15<0.17$

∴　$0.15^{-1.2}>0.17^{-1.2}$

六、小结

图形计算器可以快速画出函数图象，利用它我们能更直观地得出函数的性质. 对于幂函数，为了研究的方便，我们可以详细地讨论它们在第一象限的情况，再根据函数的奇偶性讨论它在其他象限的情况. 幂函数 $y=x^n$ 有如下性质：

1. 当 $n>0$ 时，

(1) 图象都经过 (0，0)，(1，1)；

(2) 在第一象限内，函数值 y 随着 x 的增大而增大.

2. 当 $n<0$ 时，

(1) 图象都经过点 (1，1)；

(2) 第一象限内，函数值 y 随着 x 的增大而减小；

(3) 在第一象限内，图象向上与 y 轴无限地接近，向右与 x 轴无限地接近.

七、练习

1．画出函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的图象.

2．在同一坐标系内画出下列各题中两个函数的图象，并加以比较：

(1) $y=x^3$，$y=x^4$　　(2) $y=x^{-3}$，$y=x^{-4}$

3．比较下列各题中两个数的大小：

(1) $1.3^{\frac{3}{4}}$，$1.5^{\frac{3}{4}}$　　(2) $0.21^{\frac{2}{5}}$，$0.27^{\frac{2}{5}}$

(3) $3^{-\frac{5}{2}}$，$3.1^{-\frac{5}{2}}$　　(4) $1.1^{-\frac{1}{2}}$，$0.9^{-\frac{1}{2}}$

2 互为反函数的函数图象间的关系

[教学目的]

1．使学生理解反函数概念的实质；

2．让学生亲自动手利用图形计算器画互为反函数的函数图象，并通过所画函数图象观察、思考、归纳互为反函数的函数图象间关系，再进一步进行理论证明，从而不断渗透数形结合的数学思想；

3．培养学生动手能力，激发学生的学习兴趣.

[教学方法]

讲解与讨论相结合，使用图形计算器中的“几何画板”和“函数图象”辅助教学.

[教学过程]

一、复习提问

1．两个函数具备什么关系时，它们才互为反函数？

答：对于函数 $y=f(x)$，如果我们把它看作是关于 x 和 y 的方程，用 y 来表示 x，即表示成 $x=g(y)$ 的形式时，我们就可以把它看作 x 是 y 的函数．为了表示形式的统一，写成 $y=g(x)$，我们就把 $y=g(x)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数.

注　原函数与其反函数关系：对应法则互逆，定义域和值域互换.

2．已知函数 $y=f(x)$，求它的反函数 $y=f^{-1}(x)$

(1) $y=-2x+3$ $(x\in\mathbf{R})$　　(2) $y=-\dfrac{2}{x}$ $(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0)$　　(3) $y=x^4$ $(x\geqslant0)$

解：(1) 由 $y=-2x+3$ $(x\in\mathbf{R})$，可得 $x=-0.5y+1.5$

$\therefore$　函数 $y=-2x+3$ $(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 $y=-0.5x+1.5$ $(x\in\mathbf{R})$

(2) 由 $y=-\dfrac{2}{x}$ $(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0)$，可得 $x=-\dfrac{2}{y}$ $(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0)$

∴　函数 $y=-\dfrac{2}{x}$（$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$）的反函数是 $y=-\dfrac{2}{x}$（$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$）

（3）由 $y=x^4$（$x\geqslant0$），可得 $x=\sqrt[4]{y}$

∴　函数 $y=x^4$（$x\geqslant0$）的反函数是 $y=\sqrt[4]{x}$（$x\geqslant0$）

今天我们来学习互为反函数的函数图象间关系.

二、讲解新课

例 1　下面首先请同学们求函数 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数，然后用图形计算器画出函数 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）与其反函数的图象.

解：从 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）得 $x=\dfrac{y+2}{3}$，因此，函数 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数是 $y=\dfrac{x+2}{3}$（$x\in\mathbf{R}$），图象如图 1－8.

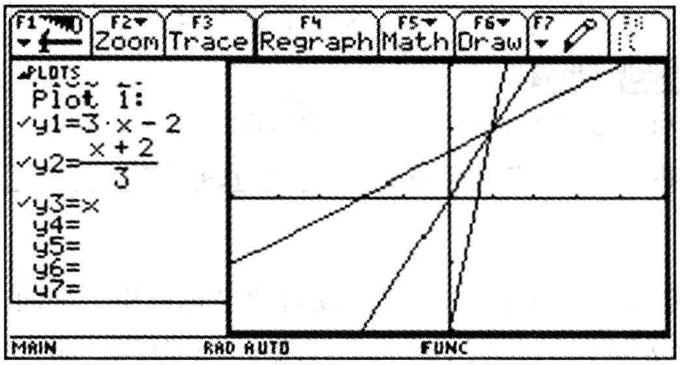


图 1－8

例 2　求函数 $y=x^3$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数，并且画出原来的函数和它的反函数的图象.

解：从 $y=x^3$ 得 $x=\sqrt[3]{y}$，因此，函数 $y=x^3$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}$（$x\in\mathbf{R}$）. 函数 $y=x^3$（$x\in\mathbf{R}$）和它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}$（$x\in\mathbf{R}$）的图象如图 1－9 所示.

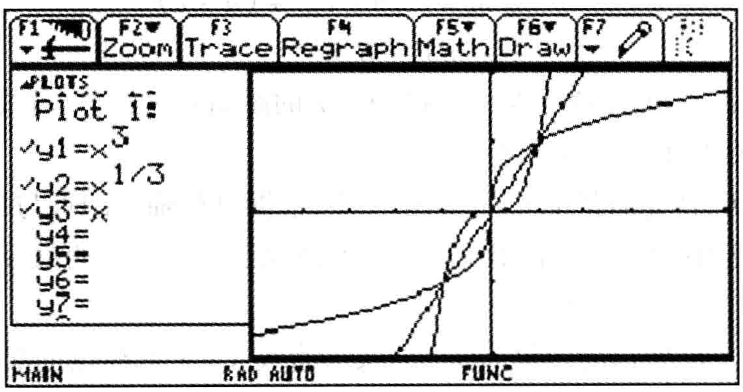


图 1－9

从图可以看出，函数 $y=3x-2$ 和它的反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$（$x\in\mathbf{R}$）的图象是以直线 $y=x$ 为对称轴的对称图形（以后简称它们关于 $y=x$ 对称；同样，以原点为对称中心的对称图形也简

称关于原点对称）．从图 1－9 还可以看出，函数 $y=x^3$（$x\in\mathbf{R}$）和它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}$（$x\in\mathbf{R}$）的图象关于直线 $y=x$ 对称．

定理　函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．

提问学生:根据前面的讨论,这个定理应当如何证明呢?

综合学生问答，归纳证明途径:（板书）

（1）设 $B(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 的图象上的任意一点,则点 $B'(b,a)$ 必在反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上(根据反函数的概念),如图 1－10:

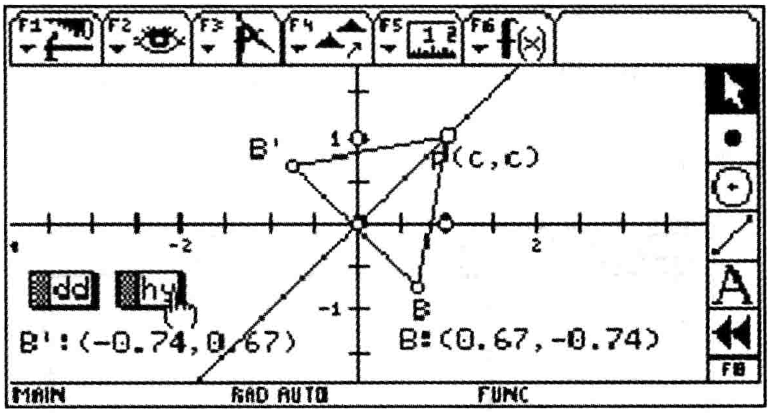


图 1－10

（2）证明点 B 与 B' 关于直线 $y=x$ 对称；在直角坐标系中，平面上的点可以用它的坐标表示．如果要证明两点 $B(a,b)$，$B'(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 对称，那么就可以采用轴对称的性质来证明（以下板书）．

当 $a\neq b$ 时，在直线 $y=x$ 上任取一点 M（因为直线 $y=x$ 上点的横坐标与纵坐标相等），设 M 的坐标为（c，c），连结 MB，MB'．由两点间距离公式得

$$BM=\sqrt{(a-c)^2+(b-c)^2}$$

$$B'M=\sqrt{(b-c)^2+(a-c)^2}$$

$$\therefore\quad BM=B'M$$

由于 M 是直线 $y=x$ 上任意一点,它到点 B,B' 的距离相等,所以直线 $y=x$ 是线段 BB' 的中垂线,故点 B,B' 关于直线 $y=x$ 对称．

当 $a=b$ 时,点 B,B' 是直线 $y=x$ 上的同一点,根据对称轴上的点与自身对称,得 B,B' 关于直线 $y=x$ 对称(说明:由此可得函数 $y=f(x)$ 的图象任一点关于直线 $y=x$ 对称点都在 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上)．

（3）证明函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上任一点关于直线 $y=x$ 对称点也都在 $y=f(x)$ 的图象上（利用 f 与 f^{-1} 的互逆性）．

举例：两个函数图象对称性证明示范．

根据上面的讨论，我们以图 1－8 为例来证明：从观察得来的两个互为反函数的图象关于直线 $y=x$ 的对称性．

（1）在函数 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）的图象上任意取一点 B，设 B 点的横坐标 $x=a$，则由 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）得 B 点的纵坐标为 $y=3a-2$，即 B（a，$3a-2$）. 而点 B 关于直线 $y=x$ 对称点 B' 的坐标为（$3a-2$，a）即 $x=3a-2$，$y=a$. 因为（$3a-2$，a）代入 $y=\frac{x+2}{3}$（$x\in\mathbf{R}$）成立，即 B' 的坐标适合 $y=\frac{x+2}{3}$（$x\in\mathbf{R}$），所以点 B' 在函数 $y=\frac{x+2}{3}$（$x\in\mathbf{R}$）的图象上；

（2）反过来，在函数的图象 $y=\frac{x+2}{3}$（$x\in\mathbf{R}$）上任意取一点 N（a，$\frac{a+2}{3}$），而 N（a，$\frac{a+2}{3}$）关于直线 $y=x$ 的对称点 N' 的坐标为（$\frac{a+2}{3}$，a），因为（$\frac{a+2}{3}$，a）满足 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）即 N' 的坐标（$\frac{a+2}{3}$，a）适合 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$），所以点 N' 在函数 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）图象上.

由（1），（2）知，函数的图象与其反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

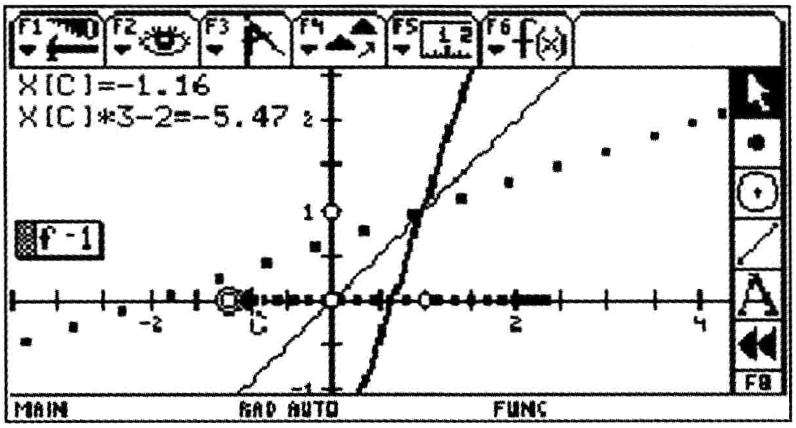


图 1－11

图 1－11 中的点就是利用 $y=3x-2$（$x\in\mathbf{R}$）上任意取点 B（a，b）后，再利用 $y=x$ 镜面反射求得 B'（b，a）的轨迹.

三、小结

今天我们学习了互为反函数的函数图象间关系，即它们是关于直线 $y=x$ 对称的. 这种关系直观地反映了互为反函数的两个函数图象之间的内在关系. 为我们提供了根据函数 $y=f(x)$的图象、性质来研究 $y=f^{-1}(x)$图象、性质的方便,在以后的学习中我们经常地利用这一性质.

四、学生练习

1. 求下列函数的反函数，并画出函数及其反函数的图象：

（1）$y=4x-\frac{1}{2}$（$x\in\mathbf{R}$）；

（2）$y=\frac{1}{x+3}$（$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-3$）.

2．设 $a \neq 0$，$b \neq 0$，求证下列各组点关于直线 $y=x$ 对称．

(1) $M(a, 0)$，$M'(0, a)$；

(2) $M(a, a)$，$M'(a, a)$；

(3) $M(a, b)$，$M'(b, a)$．

3．已知函数 $y=2|x|$

(1) 当 $x \geqslant 0$ 时这个函数是否有反函数？如果有，将它写出来，并指出反函数的定义域和值域．当 $x \leqslant 0$ 时呢？当 $x \in \mathbf{R}$ 时呢？

(2) 有反函数的情况下，在同一坐标系中画出函数 $y=2|x|$ 及其反函数的图象．

3　一元二次不等式

[**教学目的**]

1．使学生理解并掌握利用二次函数的图象解一元二次不等式．

2．使学生理解二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间的联系．

3．渗透类比、函数与方程、数形结合的思想方法．

[**教学方法**]

启发式教学，使用图形计算器辅助教学．

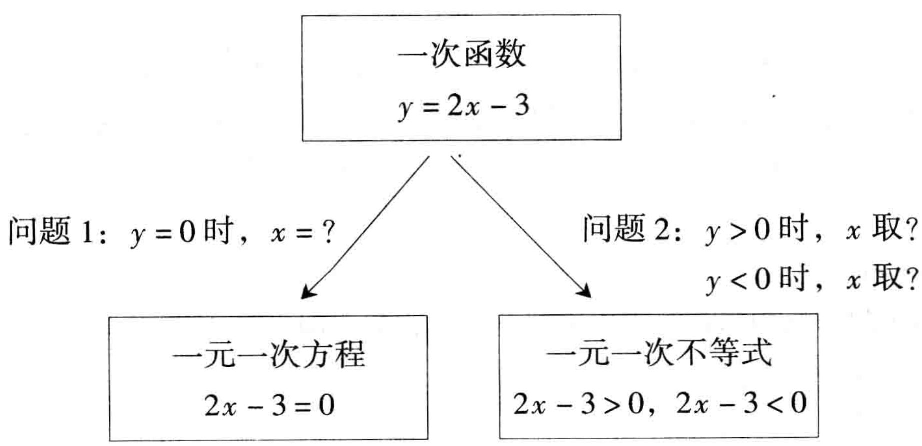
[**课时安排**]

1 课时

[**教学过程**]

一、引入

1．用图形计算器画出一次函数的图象，讨论问题 1 与问题 2，引出一次函数、一次方程、一次不等式的关系．



2．看图解决上述问题．

（1）一元一次方程的解即一次函数图象与 x 轴的交点的横坐标，如图 1－12．

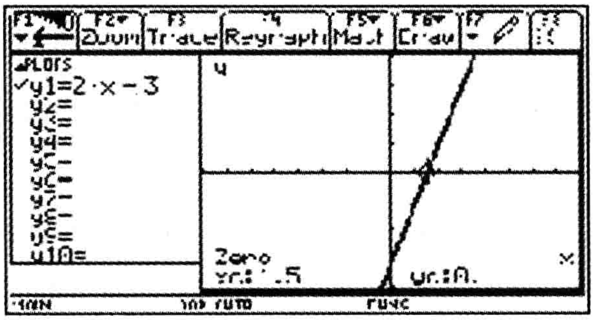


图 1－12

（2）一元一次不等式 $2x-3>0$ 的解即一次函数在 x 轴上方的图象上的点对应的横坐标的范围（$x>1.5$），如图 1－13；而 $2x-3<0$ 的解即一次函数在 x 轴下方的图象上的点对应的横坐标的范围（$x<1.5$），如图 1－14．

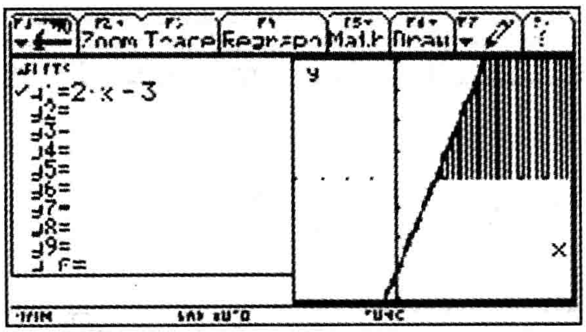


图 1－13

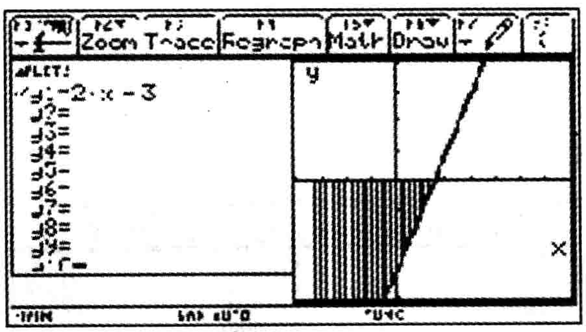


图 1－14

3．小结利用一次函数图象解一元一次不等式的方法．

二、讲解新课

1．类比三个“一次”的关系，理解二次函数、二次方程、二次不等式的联系．