平三角大要

中學校用

共和國教科書

平三角大要問題詳解

商務印書館出版

共和國教科書

中學平三角大要問題詳解

目次

頁

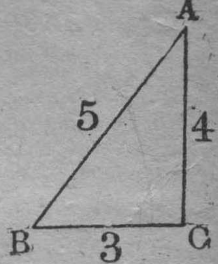
共和國教科書

中學平三角大要

問題詳解

第一篇第一章之問題（原書4頁）

1. ABC 三角形。C 爲 $90°$。BC 爲 3 尺。CA 爲 4 尺。求 A, B 兩角之正餘弦。



解 $AB=\sqrt{BC^2+CA^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\sin A\\ \cos B\end{array}\right\}=\frac{3}{5}=0.6\\ \\ \left.\begin{array}{l}\cos A\\ \sin B\end{array}\right\}=\frac{4}{5}=0.8\end{array}\right\}(\S\,1)$$

2. 直角三角形兩銳角之正餘弦。與其三邊之關係若何。

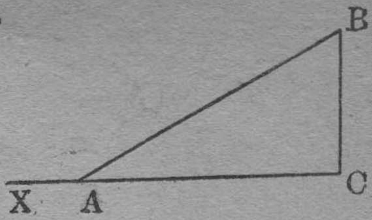
解 以斜邊度其對邊爲本銳角之正弦。以斜邊度其鄰邊爲本銳角之餘弦。〔§ 1〕

3. 試作正弦爲 $\frac{1}{2}$ 之角。又正弦爲 $\frac{2}{3}$ 之角。又正弦爲 0.6 之角。又餘弦爲 0.8 之角。

解 先任作XC線。作$BC\perp XC$。

(⊥垂直號)

以B爲心。二倍BC爲度。作弧。交XC於A。聯結AB。



得 $\sin BAC=\frac{1}{2}$.〔§1〕

又任作XC線。於C端立垂線BC。以B爲心。以BC之$\frac{3}{2}$爲度。作弧。交XC於A。聯結AB。

得 $\sin BAC=\frac{2}{3}$.〔§1〕

又作AC, BC二線正交於C。其比爲$4:3$。聯結AB。

得 $\left.\begin{array}{l}\sin A=0.6\\ \cos A=0.8\end{array}\right\}$〔1題之解〕

4. $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1\equiv 2\cos\alpha\sin\alpha$.

解 $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1\equiv\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$$\equiv 2\cos\alpha\sin\alpha.\quad〔§3〕$$

5. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\equiv 2\sin^2\alpha-1\equiv 1-2\cos^2\alpha$.

解 原左式$\equiv(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$

$$\left.\begin{array}{l}\equiv 1\times\{\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)\}\equiv 2\sin^2\alpha-1\\ \equiv 1\times\{(1-\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha\}\equiv 1-2\cos^2\alpha\end{array}\right\}〔§3〕$$

6. $\sin\alpha=0.6$. 求$\cos\alpha$之值。

解 $\cos\alpha=\sqrt{1-(06.)^2}=0.8$〔§3〕負値未合用。

7. $2\cos^2\alpha=3\sin\alpha$. 求 $\sin\alpha$ 之值。

解 原式化爲 $2(1-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha$. 〔§3〕

$\therefore \quad 2\sin^2\alpha+3\sin\alpha-2=0.$

卽 $(2\sin\alpha-1)(\sin\alpha+2)=0.$

取適宜之值。 $\sin\alpha=\frac{1}{2}.$

8. 試就正弦爲$\frac{5}{13}$之角。又正割爲$\frac{13}{12}$之角。各求其圓函數。

解 設 $\sin\alpha=\frac{5}{13}.$

則 $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$ 負値未適用

$$\left.\begin{aligned}\tan\alpha&=\frac{5}{13}\div\frac{12}{13}=\frac{5}{12}\\ \cot\alpha&=\frac{12}{13}\div\frac{5}{13}=\frac{12}{5}\\ \sec\alpha&=1\div\frac{12}{13}=\frac{13}{12}\\ \operatorname{cosec}\alpha&=1\div\frac{5}{13}=\frac{13}{5}\end{aligned}\right\}\text{〔§5〕}$$

設 $\sec\alpha=\frac{13}{12}$

則 $\cos\alpha=1\div\frac{13}{12}=\frac{12}{13}.$ 〔§5〕

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$

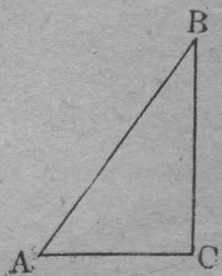
餘同前。

9. 直角三角形兩銳角之圓函數與其邊之關係若何。

解　正餘弦已見2題之解。以鄰邊度對邊。爲本銳角之正切。以對邊度鄰邊爲其餘切。以鄰邊度斜邊爲其正割。以對邊度斜邊爲其餘割。(§5)

(注意) 鄰邊俱專指直邊。

10. 試作正切爲$\frac{3}{2}$之角。又餘切爲1之角。又正割爲$\frac{5}{3}$之角。又餘割爲2之角。



解 作$AC\perp BC$。其比爲2：3。聯結AB。

則 $$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{2}.\ (\S 5)$$

作 $AC=BC$。又互相垂直。聯結AB。

則 $$\cot A=\frac{AC}{BC}=1.\ (\text{同前})$$

作 $AC\perp BC$。以A爲心。以AC之$\frac{5}{3}$爲度。作弧。交BC於B。聯結AB。

則 $$\sec A=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}.\ (\text{同前})$$

作 $AC\perp BC$。以B爲心。以BC之2倍爲度。作弧。交AC於A。聯結AB。

則 $$\operatorname{cosec} A=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{1}=2.\ (\text{同前})$$

11. (i) $\cos^2\alpha\tan^2\alpha+\sin^2\alpha\cot^2\alpha\equiv1.$

(ii) $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha\equiv\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha.$

(iii) $\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}=1.$

(iv) $\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}\equiv\cos^2\alpha.$ 試各求其證。

證 (i) 原式 $\equiv\cos^2\alpha.\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha.\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\equiv\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$\equiv1.$〔§5 及 §3〕

(ii) 原式 $\equiv\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\equiv\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$

$\equiv\dfrac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}\equiv\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha.$〔§5 及 §3〕

(iii) 原式 $\equiv\dfrac{1}{\sec^2\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}\equiv\dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}+\dfrac{1}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}.$

$\equiv\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\equiv1.$〔§6 及 §5 及 §3〕

(iv) 原式 $\equiv\dfrac{\cot^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha}\equiv\dfrac{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}\equiv\cos^2\alpha.$〔§6 及 §5〕

12. 設先知 $\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha$ 或 $\tan\alpha$ 或 $\cot\alpha$。試各推求其餘之圓函數。

解 已知 $\sin\alpha$。準 §3 及 §5 求之。

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha},$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\qquad \sec\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},$

$\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha},\qquad \csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}.$

已知 $\cos\alpha$。又準§5及§3求之。

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\qquad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}},\qquad \csc\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

已知 $\tan\alpha$。準§5及§6求之。

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},$$

$$\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha},$$

$$\csc\alpha=\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}=\frac{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}{\tan\alpha}.$$

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

已知 $\cot\alpha$。又準§5及§6求之。

$$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}.$$

$$\csc\alpha=\sqrt{1+\cot^2\alpha},$$

$$\sec\alpha=\sqrt{1+\frac{1}{\cot^2\alpha}}=\frac{\sqrt{\cot^2\alpha+1}}{\cot\alpha},$$

$$\cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha+1}},$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$$

13. 設餘弦爲$\frac{4}{5}$。試求其正切。又正切爲$\frac{15}{8}$。試求其正弦。

解　命角度爲α。

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}.\ \text{〔§3 及 §5〕}$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{15}{8}\right)^2}}=\frac{8}{17}.\ \text{〔§5 及 §6〕}$$

14.　(i) $\begin{cases}\cos\theta=\alpha,\\ \sin\theta=\beta.\end{cases}$　(ii) $\begin{cases}\sec\theta=\alpha,\\ \cot\theta=\beta.\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta=\alpha',\\ \alpha\sin\theta+\beta\cos\theta=\beta'.\end{cases}$

試各消去θ。

解　(i)　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\alpha^2+\beta^2.$　卽　$1=\alpha^2+\beta^2.$ 〔§3〕

(ii)　$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=\alpha^2.$

$$\frac{1}{\cot^2\theta}=\tan^2\theta=\frac{1}{\beta^2}.\ \text{〔§5〕}$$

相減。　$1=\alpha^2-\frac{1}{\beta^2}.$

(iii)　平方其兩式。

$$\alpha^2\cos^2\theta-2\alpha\beta\cos\theta\sin\theta+\beta^2\sin^2\theta=\alpha'^2.$$

$$\alpha^2\sin^2\theta+2\alpha\beta\cos\theta\sin\theta+\beta^2\cos^2\theta=\beta'^2.$$

相加　$\alpha^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\beta^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\alpha'^2+\beta'^2.$

卽　$\alpha^2+\beta^2=\alpha'^2+\beta'^2.$ 〔§3〕

15. (i) $\sin\theta+\cos\theta=1.4.$ (ii) $\sin\theta+7\cos\theta=5.$

試求 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ 之值。

解 (i) 原式變爲 $\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}=1.4.$ 〔§ 3〕

即 $\sqrt{1-\sin^2\theta}=1.4-\sin\theta.$

平方之。$1-\sin^2\theta=1.96-2.8\sin\theta+\sin^2\theta.$

$\therefore$ $\sin^2\theta-1.4\sin\theta+.48=0.$

得 $\sin\theta=.7\pm.1=.8$ 或 $.6.$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=.6$ 或 $.8.$ 〔§ 3〕

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{3}{4}.$ 〔§ 5〕

(ii) 原式變爲 $\sqrt{1-\cos^2\theta}+7\cos\theta=5.$ 〔§ 5〕.

即 $\sqrt{1-\cos^2\theta}=5-7\cos\theta.$

平方之。$1-\cos^2\theta=25-70\cos\theta+49\cos^2\theta.$

$\therefore$ $\cos^2\theta-\dfrac{14}{5}\cos\theta+\dfrac{12}{25}=0.$

得 $\cos\theta=\dfrac{7}{10}\pm\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{5}.$ (正號不適用。)

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4}{5}.$ 〔§ 3〕

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{3}.$ 〔§ 5〕

16. $\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=a.$ 求 $\sin\theta$ 之值。

解 原式變爲 $\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}=a.$ 〔§ 5〕

$\therefore$ $\sin^2\theta-a\sin\theta+1=0.$

得 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4})$

第一篇第二章之問題(書原8頁)

17. (i) $\sin^2 25°+\sin^2 65°=1.$

(ii) $\tan(45°-\alpha)\tan(45°+\alpha)=1.$ 試各求其證。

證 (i) $\because\ 90°-65°=25°.$

$\therefore$ 原式$=\sin^2 25°+\cos^2 25°=1.$ 〔§ 12 及 § 3〕

(ii) $\because\ 90°-(45°+\alpha)=45°-\alpha.$

$\therefore$ 原式$=\tan(45°-\alpha)\cot(45°-\alpha)=1.$ 〔§ 12 及 § 5〕

18. $\sin(45°+\theta)=\cos 2\theta.$ 求銳角 θ 之值。

解 $\sin(45°+\theta)=\cos\{90°-(45°+\theta)\}=\cos(45°-\theta).$ 〔§ 12〕

與題相比。$2\theta=45°-\theta.$ $\therefore\ 3\theta=45°.$ $\therefore\ \theta=15°.$

第一篇第三章之問題(原書12頁)

19. (i) $\tan x=\cot x.$ (ii) $\sin\frac{1}{2}x=\cos x.$

(iii) $3\sin x=2\cos^2 x.$ (iv) $\tan x\sec x=2\sqrt{3}.$

(v) $\sec^2 x-\frac{5}{2}\sec x+1=0.$ (vi) $6\cot^2 x-4\cos^2 x-1=0.$

(vii) $3\operatorname{cosec}^2 x+8\sin^2 x=10.$ (viii) $\tan x=2\sin x.$

(ix) $\tan x+\cot x-2=0.$

求銳角 x 之值。

解 (i) $\tan^2 x=\cot^2 x=\tan x\cot x=1.$ 〔§ 5〕

$\therefore\ \tan x=\cot x=1$ (銳角不用負值). 故 $x=45°.$ 〔§ 13〕

(ii)　$\sin\frac{1}{2}x=\cos(90^\circ-\frac{1}{2}x)$.〔§ **12**〕

與題相比。　$x=90^\circ-\frac{1}{2}x$.　　$\therefore\ x=60^\circ$.

(iii)　$3\sin x=2(1-\sin^2x)$.〔§ **3**〕

$\therefore$　　$2\sin^2x+3\sin x-2=0$.

求因數　$(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$.

取適用之值。　$\sin x=\frac{1}{2}$.　　$\therefore\ x=30^\circ$.〔§ **14**〕

(iv)　$\tan^2x\sec^2x=12$.

卽　　$\tan^2x(1+\tan^2x)=12$〔§ **6**〕

$\tan^4x+\tan^2x-12=0$.

$(\tan^2x+4)(\tan^2x-3)=0$.

取適於銳角之值。$\tan x=\sqrt{3}$.　　$\therefore\ x=60^\circ$.〔§ **14**〕

(v)　徑求其因數。

得　　$(\sec x-\frac{1}{2})(\sec x-2)=0$.

$\therefore\ \sec x=2$(又一因數不合理)〔§ **7**〕　$\therefore\ x=60$.〔§ **14**〕

(vi)　$\frac{6\cos^2x}{\sin^2x}-4\cos^2x-1=0$〔§ **5**〕

去分。　$6\cos^2x-4\cos^2x(1-\cos^2x)-(1-\cos^2x)=0$.〔§ **3**〕

卽　　$4\cos^4x+3\cos^2x-1=0$.

卽　　$(4\cos^2x-1)(\cos^2x+1)=0$.

取適用之值。$\cos x=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.　$\therefore\ x=60^\circ$.〔§ **14**〕

(vii) $\frac{3}{sin^2x}+8sin^2x=10.$

去分。　$3+8sin^4x=10sin^2x.$

即　$8sin^4x-10sin^2x+3=0.$

即　$(4sin^2x-3)(2sin^2x-1)=0.$

得　$sin\,x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore$　$x=60^\circ$ 或 45°. 〔§ **14** § **13**〕

(viii) $tan^2x=4sin^2x.$

即　$sec^2x-1=4(1-cos^2x)=4(1-\frac{1}{sec^2x})$　〔§ **6** § **3** § **5**〕

去分。　$sec^4x-sec^2x=4sec^2x-4$

即　$sec^4x-5sec^2x+4=0.$

即　$(sec^2x-1)(sec^2x-4)=0.$

$\therefore$ $secx=1$ 或 $2.$　$\therefore$　$x=0$ 或 60°. 〔§ **16** § **14**〕

又法　$\frac{sin\,x}{cos\,x}=2\,sin\,x.$

即得　$cos\,x=\frac{1}{2}.$　$\therefore$　$x=60^\circ$. 〔§ **14**〕

此法尤捷。但前法兩答亦俱通。不可廢

(ix) $tan\,x+\frac{1}{tan\,x}-2=0$ 〔§ **5**〕

即　$tan^2x-2\,tan\,x+1=0.$

即　$(tan\,x-1)^2=0.$

$\therefore$　$tan\,x=1.$　$\therefore$　$x=45^\circ$. 〔§ **13**〕

20. (i) $\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{2},\\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}.\end{cases}$　(ii) $\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\cos y}=\sqrt{\dfrac{3}{2}},\\ \dfrac{\cos x}{\sin y}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}.\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}\sin(x-y)=\cos(x+y),\\ 2\cos(x-y)=\sqrt{3}.\end{cases}$

(iv) $2\cos(2x+y)=1=2\sin(3x-y)$.

(v) $\begin{cases}\sin x+\sin y=\sqrt{2},\\ \sin^2x+\sin^2y=1.\end{cases}$

求銳角x, y之值。

解 (i) $\sin^2x=2\sin^2y.$

$$\cos^2x=\frac{2}{3}\cos^2y.$$

相加。 $1=2\sin^2y+\frac{2}{3}(1-\sin^2y)$ 〔§ **3**〕

得 $4\sin^2y=1.$ $\therefore$ $\sin y=\frac{1}{2}.$

由上一式。 $\sin^2x=\frac{1}{2}.$ $\therefore$ $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

故 $x=45°$. 〔§ **13**〕 $\therefore$ $y=30°$. 〔§ **14**〕

(ii) $\sin^2x=\frac{3}{2}(1-\sin^2y)$ 〔§ **3**〕

$$\cos^2x=\frac{1}{2}\sin^2y.$$

相加。 $1=\frac{3}{2}-\sin^2y$ 〔§ **3**〕

得 $\sin^2y=\frac{1}{2}.$ $\therefore$ $\sin y=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

由上一式。 $\sin^2 x=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$. $\therefore \quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故 $x=60^\circ$. 〔§ **14**〕 $y=45^\circ$. 〔§ **13**〕

(iii) $\sin(x-y)=\cos\{90^\circ-(x-y)\}$. 〔§ **12**〕

與題之1式相比。 $x+y=90^\circ-(x-y)$. $\therefore \quad x=45^\circ$.

由題式2 $\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

則 $x-y=30^\circ$ 〔§ **14**〕

$$y=x-30^\circ=15^\circ.$$

(iv). $\cos(2x+y)=\frac{1}{2}$.

$$\sin(3x-y)=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} 2x+y=60^\circ \\ 3x-y=30^\circ \end{array}\right\} \text{〔§ 14〕}$$

相加。 $5x=90^\circ$. $\therefore \quad x=18^\circ$.

$$y=60^\circ-2x=24^\circ.$$

(v) 平方其一式。以減次式之2倍。

得 $\sin^2 x-2\sin x\sin y+\sin^2 y=0$.

即 $\sin x-\sin y=0$.

即 $\sin x=\sin y$.

從題之1式。 $\sin x=\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \quad x=y=45^\circ \text{〔§ 13〕}$$

21. θ 角自 0 漸大而至於 $90°$。其 $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ 之變化若何。

答　$\cot\theta$ 自 ∞ 漸小而至於 0。$\sec\theta$ 自 $+1$ 漸大而至於 ∞。$\operatorname{cosec}\theta$ 自 ∞ 漸小而至於 1。〔§ 16 及 § 9〕

22. 試依圓函數表。求下列諸函數之值。

$\sin 27°$.	$\sin 52°$.	$\tan 36°30'$.
$\cot 15°40'$.	$\sin 10°30'$.	$\sin 57°18'$.
$\tan 45°30'$.	$\tan 71°5'$.	$\cot 7°33'$.
$\cos 33°$.	$\cos 72°$.	$\tan 82°5'$.
$\cot 1°55'$.	$\cos 23°48'$.	$\cos 46°13'$.
$\tan 65°20'$.	$\tan 80°11'$.	$\cot 3°28'$.

答　順序列之於下。

0.4540	0.7880	0.7400
3.5656	0.1822	0.8415
1.0176	2.9181	7.5458 *
0.8387	0.3090	7.1920 *
29.9390 *	0.9145˙	0.6922˙
2.1775	5.7795˙	16.5138 *

〔注意〕　凡切線其角度有分數者。以本書之表求之略有出入。如記 * 者是。又記 ˙ 者。尾數亦微差。

23. 試依圓函數表。求下列各方程式銳角 x 之值。

$\sin x=0.4848$.	$\sin x=0.9511$.
$\tan x=2.3000$.	$\cot x=1.6000$.