

互動數學 2B

蘇 一 方

黃 鳴 嬋



教師版

第三部分



續坐標系

圓、長方體、角柱體和圓柱體

百分數的應用

聯立二元一次方程

綜合練習三

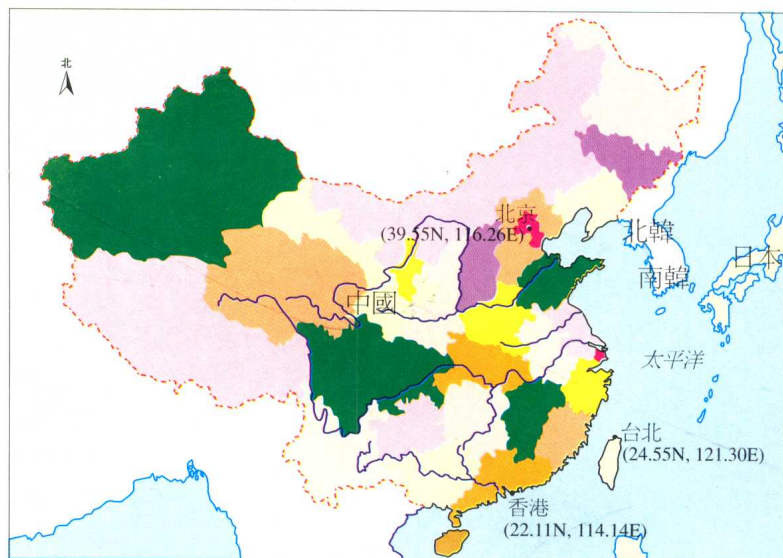


續坐標系



設問

在地圖上，香港的位置為北緯 22.11° (22.11N)，東經 114.14° (114.14E)，而台北的位置為北緯 24.55° (24.55N)，東經 121.30° (121.30E)。假設對於這兩處地方，緯綫 1° 的距離相當於 111 km ，而經綫 1° 的距離相當於 103 km ，問香港與台北相距多遠？



學習目的

通過學習本章，同學將學會

1. 平面上任意兩點間的距離公式。
2. 斜率的概念及斜率公式。
3. 直綫的傾斜角的概念。
4. 直綫的斜率與傾斜角之間的關係。
5. 平行綫的斜率的關係。
6. 垂直綫的斜率的關係。



備忘錄

1. 直角坐標系

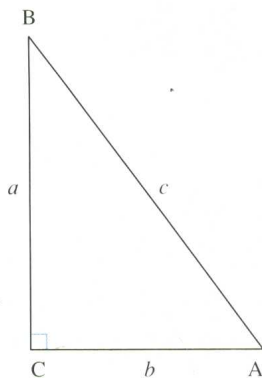
平面上兩條互相垂直的數綫構成直角坐標平面，其中水平數綫稱為 x 軸（或橫軸），而鉛垂數綫稱為 y 軸（或縱軸）。 x 軸及 y 軸統稱為坐標軸。

2. 畢

在一個直角三角形中，斜邊的平方等於兩直角邊的平方和。

例如，右圖所示的直角 $\triangle ABC$ 中，

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{畢氏定理})$$



8.1 兩點間的距離 8.1 ○ 課時：2

☑ 要點：

1. 老師要跟學生複習水平綫及鉛垂綫上任意兩點的距離的

2. 由學生自行完成課堂活動，並藉此導出距離公式。教授過程中，老師應該說明注意事項。
3. 以實例示範距離公式的多種用途。
4. 向學生說明兩點間的距離公式，實際上是畢氏定理的應用。

A. 複習

我們在中一的課程中，已學習過以下的內容：計算方法。

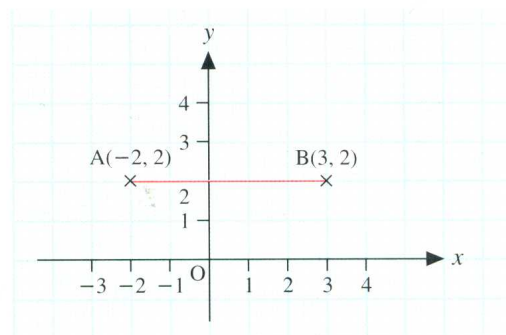
若已知平行於坐標軸的直線上任意兩點的坐標，就可以求出這兩點間的距離。

1. 已知平行於 x 軸的直線上任意兩點 A 、 B 的坐標分別為 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_1)$ ，則

當 $x_1 > x_2$ 時， $AB = x_1 - x_2$ ；

當 $x_2 > x_1$ 時， $AB = x_2 - x_1$ 。

如下圖所示，



AB 平行於 x 軸，則 $A(-2, 2)$ 與 $B(3, 2)$ 的距離為

$$AB = 3 - (-2) = 5 \text{ (單位)}$$

平行於 x 軸的直綫稱為水平綫；而平行於 y 軸的直綫稱為鉛垂綫。

在平行於 x 軸的同一直綫上的點，它們的 y 坐標相等。

在平行於 y 軸的同一直綫上的點，它們的 x 坐標相等。

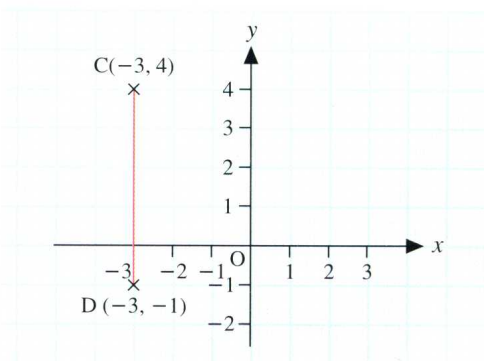


2. 已知平行於 y 軸的直線上任意兩點 C 、 D 的坐標分別為 $C(x_1, y_1)$ 及 $D(x_1, y_2)$ ，則

當 $y_1 > y_2$ 時， $CD = y_1 - y_2$ ；

當 $y_2 > y_1$ 時， $CD = y_2 - y_1$ 。

如下圖所示，



CD 平行於 y 軸，則 $C(-3, 4)$ 與 $D(-3, -1)$ 的距離為

$$CD = 4 - (-1) = 5 \text{ (單位)}$$

B. 任意兩點間的距離



課堂活動

1. 如右圖所示， O 為原點，點 A 的坐標為 $(4, 3)$ ，求 OA 的距離。

過點 A 作 $AM \perp x$ 軸，則點 M 的坐標為 $(\underline{4}, 0)$ 。

$$\therefore OM = \underline{4} - 0 = \underline{4},$$

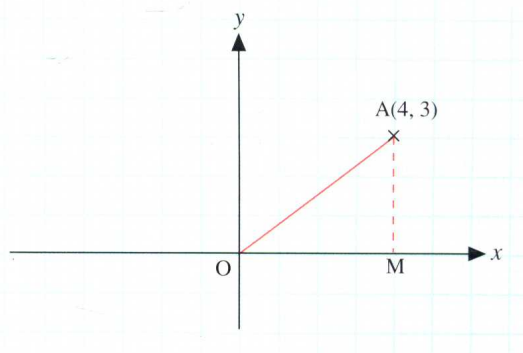
$$AM = 3 - \underline{0} = \underline{3}.$$

$\therefore \triangle AOM$ 為一直角三角形，

$$\therefore OA^2 = OM^2 + AM^2 \quad (\text{畢氏定理})$$

$$OA = \sqrt{\underline{4^2 + 3^2}}$$

$$OA = \underline{5}$$



2. 如右圖所示，點 P 及 Q 的坐標分別為 (2, 2) 及 (-2, -1)，求 PQ 的距離。

分別過點 P 及 Q 作平行於 x 軸及 y 軸的直線，兩綫交於點 R，則點 R 的坐標為 (2 , -1)。

$$\therefore PR = 2 - \underline{(-1)} = \underline{3},$$

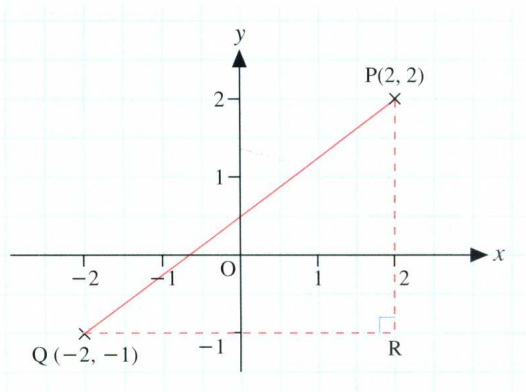
$$QR = \underline{2} - (-2) = \underline{4}。$$

$\therefore \triangle PQR$ 為一直角三角形，

$$\therefore PQ^2 = PR^2 + QR^2 \quad (\text{畢氏定理})$$

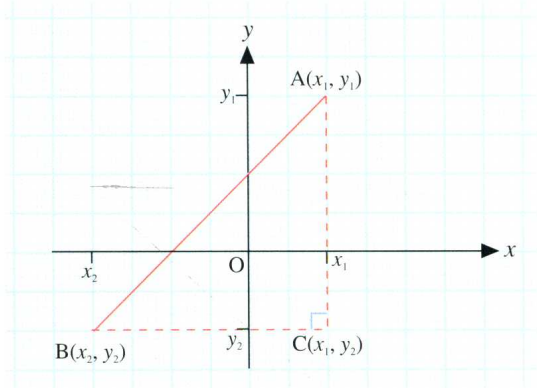
$$PQ = \sqrt{\underline{3^2 + 4^2}}$$

$$PQ = \underline{5}$$



有了以上的經驗，我們可以根據畢氏定理求出任意兩點間的距離公式。

設 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 為直角坐標平面上的任意兩點。過點 A 及 B 分別作平行於 x 軸及 y 軸的直綫 (即水平綫及鉛垂綫)，而兩綫交於點 C。所得的 $\triangle ABC$ 顯然為一直角三角形，而點 C 的坐標為 (x_1, y_2) 。



由上圖可得

$$AC = y_1 - y_2 \text{ 及 } BC = x_1 - x_2。$$

在直角三角形 ABC 中，

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad (\text{畢氏定理})$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

以上就是 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 兩點間的距離公式。

由於 $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$ 及 $(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$ ，

$\therefore$ 上述的距離公式也可以寫成

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。$$

上圖中， $y_1 > y_2$ ， $x_1 > x_2$ 。

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= [-(b - a)]^2 \\ &= (-1)^2(b - a)^2 \\ &= (b - a)^2 \end{aligned}$$

例題 8-1

求下列各題中兩點間的距離。

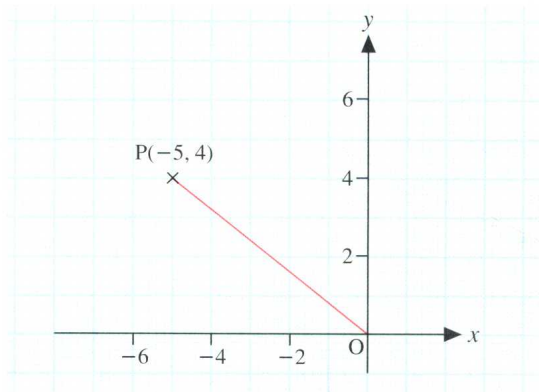
(a) $O(0, 0)$, $P(-5, 4)$

(b) $A(-3, 1)$, $B(2, -1)$

(答案保留平方根號 “ $\sqrt{\quad}$ ”)

解

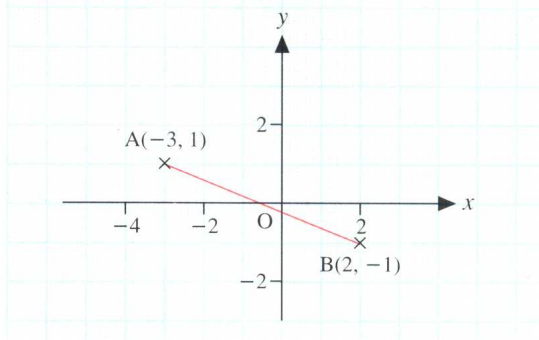
(a)



$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{(-5 - 0)^2 + (4 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

註：原點 O 的坐標為 $(0, 0)$ 。

(b)



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-3 - 2)^2 + [1 - (-1)]^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

註：遇到負數減法的運算時須特別小心，例如

$$1 - (-1) = 1 + 1 = 2。$$



課堂練習

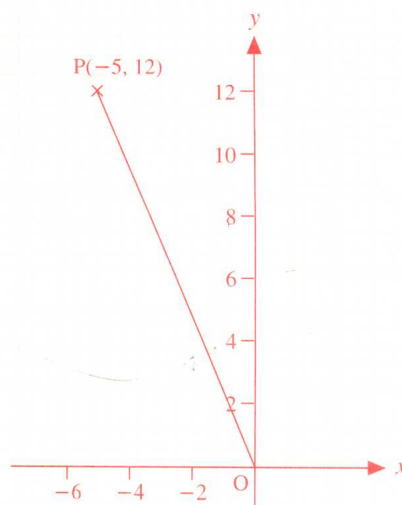
求下列各題中兩點間的距離。

(a) $O(0, 0)$, $P(-5, 12)$

(b) $A(-2, 2)$, $B(1, -3)$

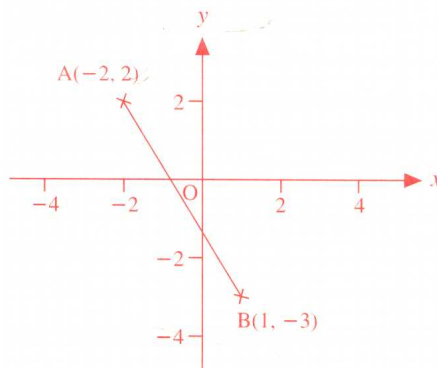
解

(a)



$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{(-5 - 0)^2 + (12 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

(b)



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2 - 1)^2 + [2 - (-3)]^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

習題 8.1

第一階

第二階

第三階

第 7 題

第 12 及 13 題

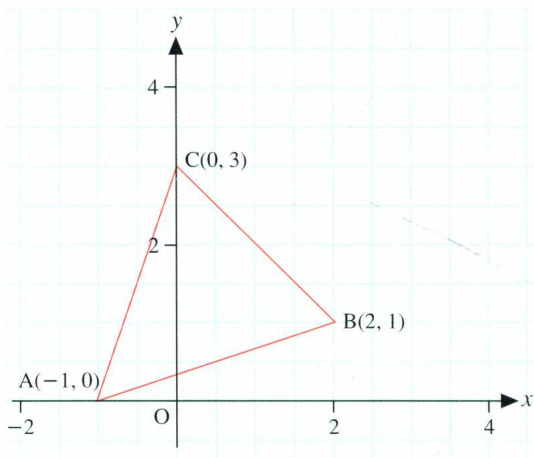
第 17 題

例題 8-2

已知三角形的三個頂點分別為 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 1)$ 及 $C(0, 3)$ 。

- (a) 求 $\triangle ABC$ 的周長。(答案須準確至 3 位有效數字。)
- (b) 證明 $\triangle ABC$ 為一等腰三角形。

解



$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad AB &= \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (1 - 0)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

為了避免計算出錯也可以寫成 $\sqrt{(-1 - 2)^2 + (0 - 1)^2}$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(0 - 2)^2 + (3 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{[0 - (-1)]^2 + (3 - 0)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC \text{ 的周長} &= AB + BC + AC \\ &= \sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{10} \\ &= 9.15 \text{ (準確至 3 位有效數字)} \end{aligned}$$

- (b) 由 (a) 的結果得

$$AB = AC = \sqrt{10},$$

$$\text{而 } BC = \sqrt{8},$$

$\therefore \triangle ABC$ 為一等腰三角形。



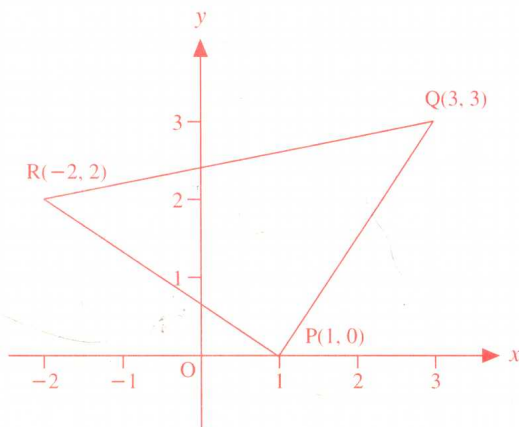
課堂練習

已知三角形的三個頂點分別為 $P(1, 0)$ 、 $Q(3, 3)$ 及 $R(-2, 2)$ 。

- (a) 求 $\triangle PQR$ 的周長。(答案須準確至 3 位有效數字。)
- (b) 證明 $\triangle PQR$ 為一等腰三角形。

解

(a)



$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(1 - 3)^2 + (0 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (3 - 2)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RP &= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle PQR \text{ 的周長} &= PQ + QR + RP \\ &= \sqrt{13} + \sqrt{26} + \sqrt{13} \\ &= 12.3 \text{ (準確至 3 位有效數字)} \end{aligned}$$

- (b) 由 (a) 的結果得

$$PQ = RP = \sqrt{13},$$

$$\text{而 } QR = \sqrt{26},$$

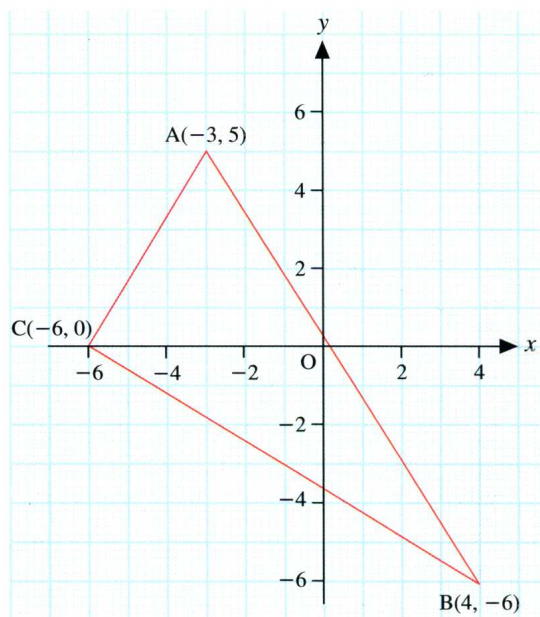
$\therefore \triangle PQR$ 為一等腰三角形。

例題 8-3

習題 8.1
第二階 第 14 題

已知 $\triangle ABC$ 的三個頂點分別為 $A(-3, 5)$ 、 $B(4, -6)$ 及 $C(-6, 0)$ ，證明 $\triangle ABC$ 為一直角三角形。

證明



$$\begin{aligned} AC^2 &= [-6 - (-3)]^2 + (0 - 5)^2 \\ &= (-3)^2 + (-5)^2 \\ &= 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (-6 - 4)^2 + [0 - (-6)]^2 \\ &= (-10)^2 + 6^2 \\ &= 136 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= (-3 - 4)^2 + [5 - (-6)]^2 \\ &= (-7)^2 + (11)^2 \\ &= 170 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore AC^2 + BC^2 &= 34 + 136 \\ &= 170 \end{aligned}$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2 = 170$$

故 $\triangle ABC$ 為一直角三角形。（畢氏定理的逆定理）

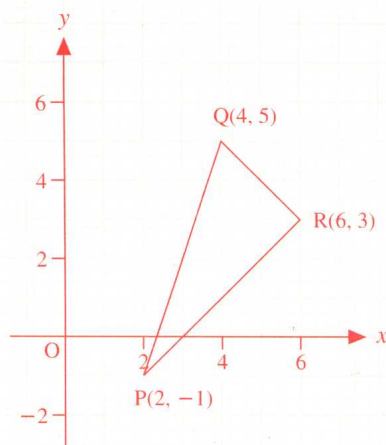
註：因為本題要利用畢氏定理的逆定理，所以為了簡便起見，開始時並不求 AC 、 BC 及 AB ，而是直接求 AC^2 、 BC^2 及 AB^2 。



課堂練習

已知 $\triangle PQR$ 的三個頂點分別為 $P(2, -1)$ 、 $Q(4, 5)$ 及 $R(6, 3)$ ，證明 $\triangle PQR$ 為一直角三角形。

證明



$$\begin{aligned} PQ^2 &= (2 - 4)^2 + (-1 - 5)^2 \\ &= (-2)^2 + (-6)^2 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR^2 &= (4 - 6)^2 + (5 - 3)^2 \\ &= (-2)^2 + 2^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RP^2 &= (6 - 2)^2 + [3 - (-1)]^2 \\ &= 4^2 + 4^2 \\ &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore QR^2 + RP^2 &= 8 + 32 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\therefore QR^2 + RP^2 = PQ^2 = 40$$

故 $\triangle PQR$ 為一直角三角形（畢氏定理的逆定理）

例題 8-4

判斷下列三點是否共綫。

A(-1, 4)、B(0, 1) 及 C(2, -5)

解

三點共綫即表示三點均在同一直綫上，因此我們要求它們所組成的綫段長度，及其任意兩綫段的長度之和是否等於第三個綫段。

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{[0 - (-1)]^2 + (1 - 4)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(2 - 0)^2 + (-5 - 1)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{40} &= \sqrt{4 \times 10} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{10} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (-5 - 4)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-9)^2} \\ &= \sqrt{90} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{90} &= \sqrt{9 \times 10} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{10} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB + BC &= \sqrt{10} + 2\sqrt{10} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

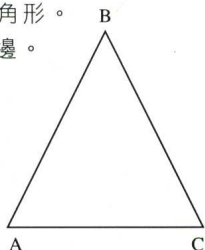
$$\text{則 } AB + BC = AC = 3\sqrt{10}$$

$\therefore$ A、B 及 C 三點共綫。

註：若三點不共綫，則會形成一個三角形。

此時，任意兩邊的和會大於第三邊。

即 $AB + BC > AC$ 。



習題 8.1
第二階
第 16 題
第三階
第 18 題



課堂練習

判斷下列三點是否共綫。

P(2, -1)、Q(-2, 0) 及 R(-6, 1)

解

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (-1 - 0)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{[-2 - (-6)]^2 + (0 - 1)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PR &= \sqrt{[2 - (-6)]^2 + (-1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{68} \\ &= 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore PQ + QR &= \sqrt{17} + \sqrt{17} \\ &= 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\text{則 } PQ + QR = PR = 2\sqrt{17}$$

$\therefore$ P、Q 及 R 三點共綫。



習題 8.1



第一階

求下列各題中兩點間的距離。(如有需要，答案以平方根號“ $\sqrt{\quad}$ ”表示。)(1-4)

1. $O(0, 0)$, $P(-3, 4)$ 5

2. $A(4, 0)$, $B(0, -4)$ $4\sqrt{2}$

3. $C(-3, 7)$, $D(2, -8)$ $5\sqrt{10}$

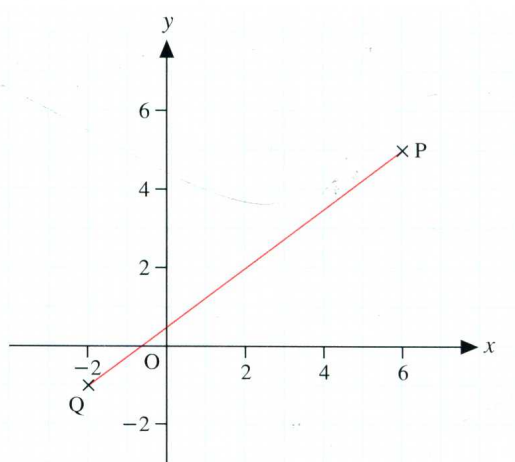
4. $E(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$, $F(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ $2\sqrt{2}$

5. (a) 在右圖中寫出點 P 及 Q 的坐標。

(b) 求 PQ 的長度。

(a) $P(6, 5)$ 及 $Q(-2, -1)$

(b) $PQ = 10$



6. 已知點 A 及 B 的坐標分別為 $(3, -4)$ 及 $(0, -10)$ ，而 O 為原點。
求證 $OB = 2OA$ 。

7. 已知點 P 及 Q 的坐標分別為 $(5, 0)$ 及 $(5, -12)$ ，而 O 為原點。
求 $\triangle POQ$ 的周長。 30



第二階

求下列各題中兩點間的距離。(8-11)

8. $P(2, 0)$, $Q(1, \sqrt{3})$ 2

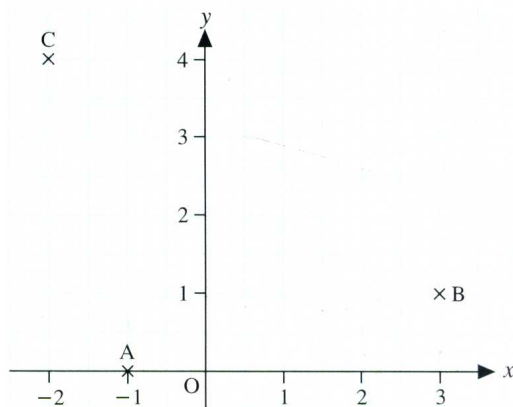
9. $M(\sqrt{11}, 0)$, $N(0, -\sqrt{5})$ 4

10. $H(2a, a)$, $K(-a, 5a)$ ($a > 0$) $5a$

11. $X(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $Y(0, \frac{1}{2})$ 1

12. 參閱右圖，

- (a) 寫出點 A、B 及 C 的坐標， $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 1)$ 及 $C(-2, 4)$
 (b) 證明 $\triangle ABC$ 為一等腰三角形。



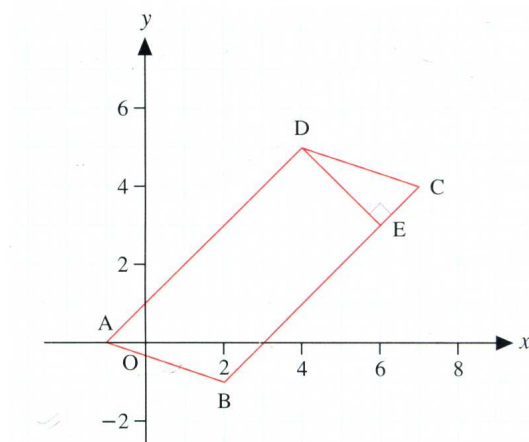
13. 已知 $\triangle ABC$ 的三個頂點的坐標分別為 $A(2, 3)$ 、 $B(3, -3)$ 及 $C(-1, 2)$ ，求 $\triangle ABC$ 的周長。
 (答案須準確至 0.1。) 15.6

14. 已知 $\triangle DEF$ 的三頂點分別為 $D(-1, -1)$ 、 $E(3, 1)$ 及 $F(-2, 1)$ 。

- (a) 證明 $\triangle DEF$ 為一直角三角形。
 (b) 求 $\triangle DEF$ 的面積。5 平方單位

15. 右圖所示為一平行四邊形 ABCD，DE 為 BC 邊上的高。求

- (a) BC 及 DE 的長度， $BC = 5\sqrt{2}$ 及 $DE = 2\sqrt{2}$
 (b) 平行四邊形 ABCD 的面積。20 平方單位



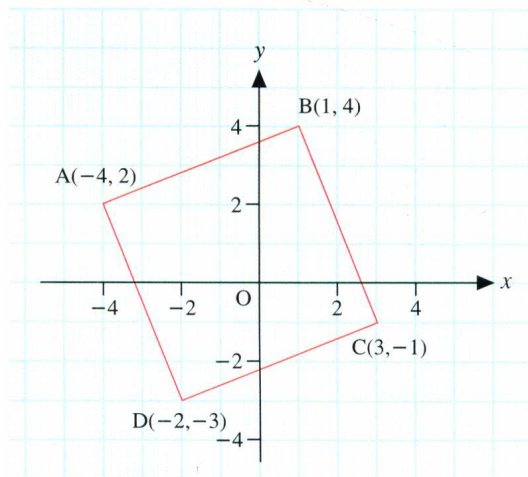
16. 判斷以下各題中的三點是否共線。

- (a) $R(-4, -2)$ 、 $S(2, -1)$ 及 $T(8, 0)$ 共線
 (b) $X(-3, 6)$ 、 $O(0, 0)$ 及 $Y(2, -2)$ 不共線

第三階

17. 右圖所示，四邊形 ABCD 的頂點為 $A(-4, 2)$ 、 $B(1, 4)$ 、 $C(3, -1)$ 及 $D(-2, -3)$ 。

- (a) 求證 $AB = BC = CD = DA$ 。
 (b) 求證 $\triangle ABC$ 為一等腰直角三角形。
 (c) 求 ABCD 的面積。29 平方單位



18. 已知 A、B 及 C 三點的坐標分別為 $A(a, b+3)$ 、 $B(a+2, b)$ 及 $C(a+4, b-3)$ 。
 證明 A、B 及 C 三點共綫。

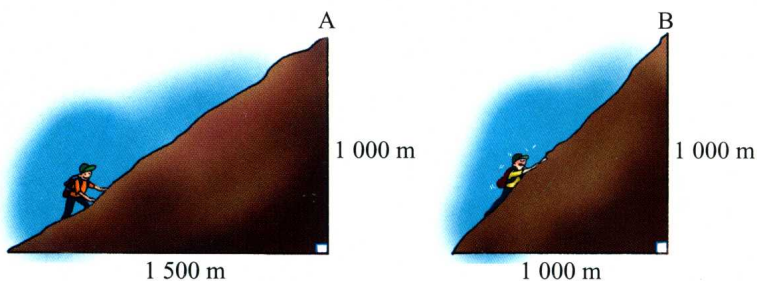
19. 已知點 P、M 及 Q 的坐標分別為 $P(x, 6)$ 、 $M(1, 1)$ 及 $Q(-2, -4)$ ，其中 $x > 0$ 。
 若 M 為 PQ 的中點，求 x 的值。 $x = 4$

8.2 直綫的斜率

8.2 課時：2.5

☑ 要點：

1. 直綫的斜率代表了直綫對 x 軸的傾斜程度。
2. 直綫的斜率與直綫上的兩點的 y 坐標之差及 x 坐標之差的比值有關。事實上，這兩點可在直綫上的任何不同位置取出。這個特點正是距離公式和斜率公式的最大差異之處。
3. 老師可以與能力較高的學生討論平行於 x 軸或 y 軸的情形。
4. 老師宜告訴學生正數和負數的斜率意義。
5. 如果傾角 θ 是銳角，則 θ 越大， $\tan \theta$ 也越大，直綫也就「傾斜」得越厲害；如果傾角 θ 是鈍角，則 θ 越小，直綫會越傾斜，不過後者要待日後把 θ 角推廣到任意角後才討論。



上圖所示為一登山運動員攀登兩座山峰 A 和 B 的情形。B 山明顯地較 A 山陡峭，故攀登上峰頂的難度也較高。

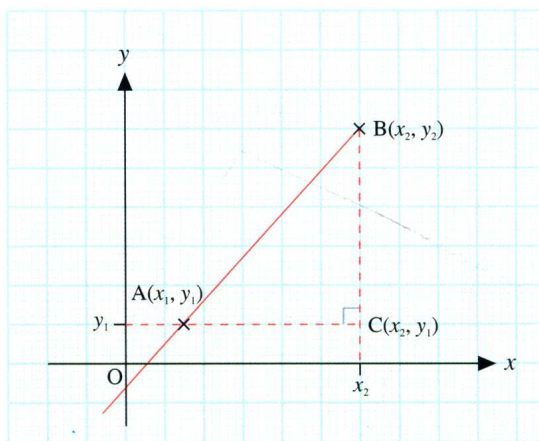
我們看到攀登 A 山峰時，走 1500 m 的水平距離，鉛垂方向便上升 1000 m；攀登 B 山峰時，只走 1000 m 的水平距離，鉛垂方向便已上升了 1000 m。

所以，山峰的陡峭程度可由 $\frac{\text{鉛垂方向的距離}}{\text{水平方向的距離}}$ 而求得。

我們稱以上的比為 **斜率**。

根據同樣的概念，我們可以判斷在直角坐標平面上，直線的傾斜程度。

A. 斜率公式



上圖所示， $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 為直線上任意兩點。過 A 及 B 兩點分別作水平綫（平行於 x 軸）及鉛垂綫（平行於 y 軸），而兩綫交於點 C ，則點 C 的坐標為 (x_2, y_1) 。

A 與 B 的水平距離 $= x_2 - x_1$ ，

A 與 B 的鉛垂距離 $= y_2 - y_1$ 。

$$\text{直綫 } AB \text{ 的斜率} = \frac{BC}{AC}$$

則 直綫 AB 的斜率 $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

直綫的斜率 $= \frac{\text{直綫上兩點的 } y \text{ 坐標之差}}{\text{兩點對應的 } x \text{ 坐標之差}}$

以上的結果稱為 **斜率公式**。

$$\text{由於 } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

且斜率通常用字母 m 表示，

$$\therefore m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ 也成立。}$$

也就是說，選擇兩點的先後次序，並不影響斜率的值。

在斜率公式中，要求 $x_1 \neq x_2$ 。至於 $x_1 = x_2$ 的情況，稍後將作探討。

注意到： $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$
 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$

$\therefore$ 點的坐標在斜率公式中，前後位置要統一。



習題 8.2

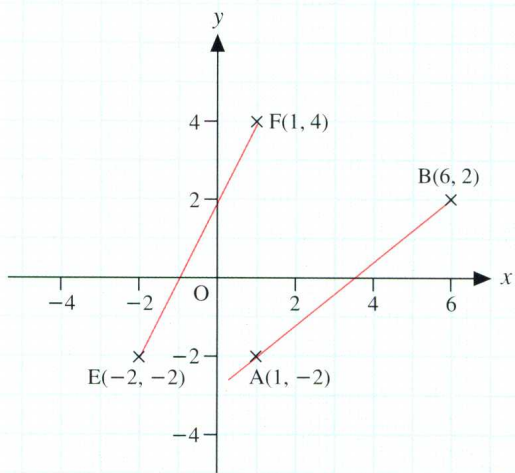
第一階

第二階

例題 8-5

第 1、3 及 5 題 第 12、14 及 15 題

如下圖所示，求直線 AB 及 EF 的斜率。



解

$$\text{AB 的斜率} = \frac{2 - (-2)}{6 - 1}$$

$$= \frac{4}{5}$$

$$\text{EF 的斜率} = \frac{4 - (-2)}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{6}{3}$$

$$= 2$$

習題 8.2

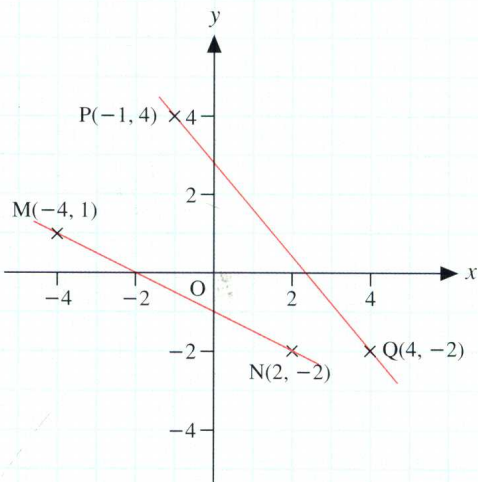
第一階

第二階

例題 8-6

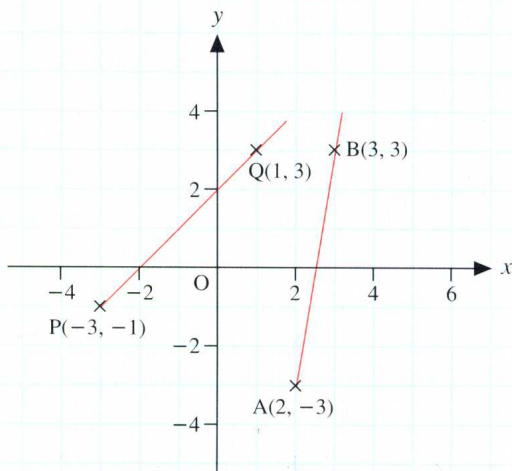
第 2、4、6 及 8 題 第 11、13 及 16 題

如下圖所示，求直線 PQ 及 MN 的斜率。



課堂練習

如下圖所示，求直線 AB 及 PQ 的斜率。



解

$$\text{AB 的斜率} = \frac{3 - (-3)}{3 - 2}$$

$$= \frac{6}{1}$$

$$= 6$$

$$\text{PQ 的斜率} = \frac{3 - (-1)}{1 - (-3)}$$

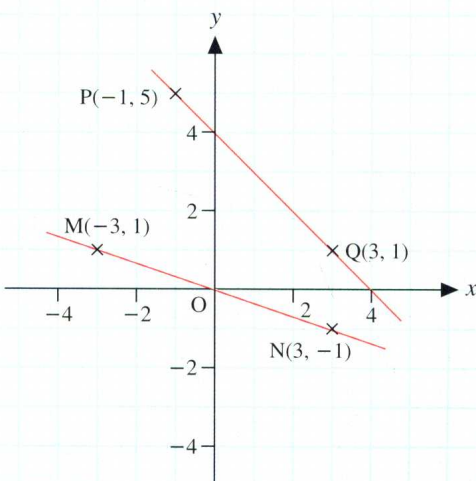
$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$



課堂練習

如下圖所示，求直線 PQ 及 MN 的斜率。



解

$$\text{PQ 的斜率} = \frac{-2 - 4}{4 - (-1)}$$

$$= -\frac{6}{5}$$

$$\text{MN 的斜率} = \frac{-2 - 1}{2 - (-4)}$$

$$= -\frac{3}{6}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

解

$$\text{PQ 的斜率} = \frac{5 - 1}{-1 - 3}$$

$$= \frac{4}{-4}$$

$$= -1$$

$$\text{MN 的斜率} = \frac{1 - (-1)}{-3 - 3}$$

$$= \frac{2}{-6}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

從以上的例題及課堂練習中，我們可以看到：

1. 當直線的左邊低於右邊時，直線的斜率為正。

(見例題 8-5 及對應的課堂練習。)

2. 當直線的左邊高於右邊時，直線的斜率為負。

(見例題 8-6 及對應的課堂練習。)

習題 8.2

第一階 第二階

例題 8-7

第 9 題 第 17 題

利用斜率公式證明 A(-3, 3)、B(-1, 2) 及 C(1, 1) 三點共綫。

解

若兩綫段有公共端點且斜率相等，則兩綫段必在同一直綫上，因此亦可證明三端點共綫。

$$\text{AB 的斜率} = \frac{2 - 3}{-1 - (-3)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\text{BC 的斜率} = \frac{1 - 2}{1 - (-1)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

∴ AB 的斜率 = BC 的斜率，且 AB 及 BC 有公共端點 B，故此 A、B 及 C 三點共綫。



課堂練習

利用斜率公式證明 A(2, 3)、B(7, 6) 及 C(12, 9) 三點共綫。

解

$$\text{AB 的斜率} = \frac{3 - 6}{2 - 7}$$

$$= \frac{-3}{-5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$\text{BC 的斜率} = \frac{6 - 9}{7 - 12}$$

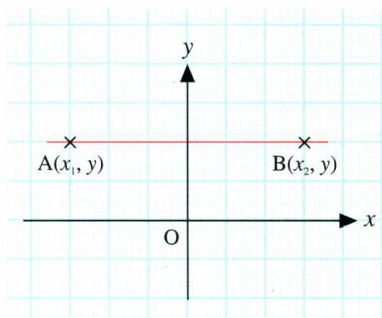
$$= \frac{-3}{-5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

∴ AB 的斜率 = BC 的斜率，且 AB 及 BC 有公共端點 B，故此 A、B 及 C 三點共綫。

以下為兩類特別的直線的斜率，同學宜加倍留意。

1. 平行於 x 軸的直線 (水平綫)



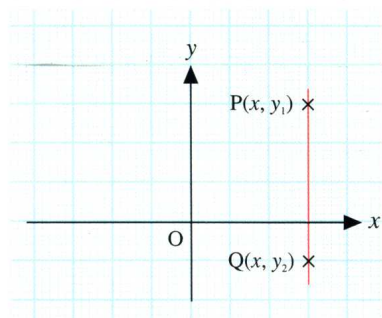
上圖所示，AB 平行於 x 軸，所以 A 及 B 兩點的 y 坐標相等。

$$\begin{aligned}\therefore \text{AB 的斜率} &= \frac{y - y}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0}{x_2 - x_1} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore$ 任何平行於 x 軸的直線，其斜率皆為零。

x 軸也是一條直線，它的斜率是多少呢？

2. 平行於 y 軸的直線 (鉛垂綫)



上圖所示，PQ 平行於 y 軸，所以 P 及 Q 兩點的 x 坐標相等。

$$\begin{aligned}\therefore \text{PQ 的斜率} &= \frac{y_2 - y_1}{x - x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{0} \text{ (沒有意義)}\end{aligned}$$

$\therefore$ 任何平行於 y 軸的直線，其斜率是不存在的。

若一個分數的分母為零，它的值是無意義的。

y 軸也是一條直線，它的斜率存在嗎？

於是當我們發現直線上的兩點若有相同的 x 坐標，則該直線的斜率是不存在的；若有相同的 y 坐標，則該直線的斜率為零。