

何魯陶三氏代數學

下冊

衡陽賀延年譯述

漢譯何魯陶三氏代數學 下冊

上海商務印書館出版

教 育 部 審 定

中 學 校 共 和 國 教 科 書

平 面 幾 何

紙面六角
布面七角

黃元吉編 是書自緒論後分爲四篇。第一論直線。第二論圓。第三論面積。第四論比例。書中參用代數式以解題。推勘學理無不深入顯出。期學者易於領悟。用於中學第二三四年最爲合宜。

立 體 幾 何

紙面二角半
布面三角半

黃元吉編 是書銜接平面幾何之後。分爲兩篇。先論平面。次論三種圓體。於立體之理。推闡盡致。而仍能簡要不煩。深入顯出。與平面幾何自相聯貫。用於中學第四年最爲適當。

審定 改組尙屬合法。准作中學
批詞 校暨師範學校教科用書

丙(326)

First Course in Algebra

By Hawkes, Luby, and Touton

Translated into Chinese

Commercial Press, Ltd.

All rights reserved

中華民國九年一月初版

(何魯陶三氏代數學二冊)

(下冊定價大洋壹元貳角)

(外埠酌加運費匯費)

編譯者 衡陽賀延年

校訂者 紹興劉壽孝 天

發行者 紹興劉遠塵 商務印書館

印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館

總發行所 上海棋盤街中市 商務印書館

分售處 商務印書分館

北京 天津 保定 奉天 吉林 龍江
濟南 太原 開封 洛陽 西安 南京
杭州 蘭谿 安慶 蕪湖 南昌 漢口
長沙 常德 成都 重慶 瀘縣 梧州
廣州 潮州 香港 桂林 梧州 雲南
貴陽 張家口 新嘉坡

此書有著作權翻印必究

何魯陶三氏代數學第二編

序

或問著書與譯書有以異乎。曰。有。著書在發表己之意見。不可抄襲他人之著作。譯書在傳導人之意見。不可附加自己之著作。故著書如作自在畫。譯書如作寫真畫。著書如作議論文。譯書如作敘述文。斯二者。固不容紊也。黃陂許奎垣先生。實主張是說。是以先生之著述。悉合此種原則。然惜未嘗出版。非先生之門徒。莫能覩也。予從先生學於麓山。讀先生所譯之數學書。不下數種。皆與原文針針相對。欣焉羨之。暑假中。取美人所著之代數。秉吾師所主之原則。從而譯之。脫稿後。自誦一遍。乃知所謂不附加己之意見則有之。至於不失著者之本來面目。則恐未之逮也。幸同學譚君異才唐君樞獻爲我校正。或者不至於大謬也夫。

民國五年秋

譯者識於岳麓書院之西齋

例 言

一譯者對於此書。逐條逐句。一一翻出。不敢妄自增減。其中雖附加解釋數則。亦標有增註字樣。以表示非原書所有者。

一所譯名詞。俱取我國最習用者。縱有一二稍新異者。如因
子法(Factoring)級數式(Series)被開方數(Radicand)之類。
當亦不難索解。

一是書脫稿後。經學友唐君楨獻譚君異才詳加校正。謹誌
之以鳴謝。

一譯者深愧文筆淺陋。自覺出語有欠圓潤之處。祈閱者諒
之。

譯者謹識

(66節之末。遺落備考一條。補譯之於次。)

備考 此事賴牛頓氏之天才。始從一函數之圖解內。察
得其中之二根同時爲虛。彼又察出有兩根相等之方程
式。蓋有一定之意義。卽在諸方程式內之對應根。顯出兩
實而異者與顯出兩虛者之間之交會點是也。

何魯陶三氏代數學第二編

目 錄

第 一 章	基礎運算法 (1—10 節)	1—19
第 二 章	因子法 (11—27 節)	20—42
第 三 章	分數 (28—34 節)	43—51
第 四 章	含一未知數之一次方程式 (35—37 節)	52—65
第 五 章	一次方程式系 (38—47 節)	66—98
第 六 章	根, 方根及指數 (48—62 節)	99—131
第 七 章	含一未知數方程式之圖解法 (63—69 節)	132—139
第 八 章	二次方程式 (70—71 節)	140—151
第 九 章	無理方程式 (72 節)	152—159
第 十 章	含二變數二次方程式之圖解 (73—74 節)	160—167
第 十 一 章	可能用二次解法之方程式系 (75—81 節)	168—185
第 十 二 章	級數 (82—91 節)	186—205
第 十 三 章	極限及無窮大 (92—97 節)	206—212
第 十 四 章	對數 (98—112 節)	213—239
第 十 五 章	比, 比例及因變法 (113—118 節)	240—256

第十六章 虛數(119—126 節).....	257—269
第十七章 二次方程式之理論(127—131 節)	270—279
第十八章 二項定理(132—137 節).....	280—288
第十九章 附錄(138—142 節).....	289—304

插 畫

乃布尼恥.....	78—79
克乃因.....	138—139
納伯爾.....	220—221

何魯陶三氏 代 數 學

第 二 編



第 一 章

基 礎 運 算 法

1. 基礎運算法之次序 凡含加減乘除諸符號之算術式或代數式之數值。依其所示運算之次序而演算之。於此不可不知次之規則。

含加減乘除諸運算之一連續數。必須順其中所有之次序。先行乘法及除法。然後順其中所有之次序或取任意次序。行加法及減法。

於式中任何括弧。此規則亦可適用。

習 題

試簡單以下各題。

1. $3-5+6-8.$

3. $34 \div 8 \times 4 - 4 + 6.$

2. $6 \div 2 + 1 - 4.$

4. $(7-6)(18-2 \cdot 4) \div (20 \div 4).$

5. $24-2(18-2 \cdot 3) \div 4+3 \times 5.$

6. $16+4\div 8-10+51\div 16-4-6\cdot 3\cdot 0\cdot 2$

$+18\cdot 8\div 48-2\cdot 18\div 12.$

7. $(16\div 32\times 48\div 8-4-8+3)\times [12\div 4\div 3-1]$

$+(42\div 6\cdot 7-42-6)\cdot 6.$

8. $a^4=4a$ 問 $a=3$ 乎。 $a=2$ 乎。 $a=0$ 乎。

9. $a^4=4a$ 。問給各 4 字以何名稱。並各爲之界說。

10. 試作方乘之界說。試區別指數與方乘。

試求以下各題之數值。

11. x^2-5x+6 。當 $x=5$ 。

12. x^3-3x^2+3x-1 。當 $x=3$ 。

13. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 。當 $x=4$ 及 $y=2$ 。

14. $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2}-\frac{x^3+y^3}{x+y}$ 。當 $x=3$ 及 $y=2$ 。

15. 問一數之絕對值如何。試說明之。

2. 加法 代數中之加法。即合併同號或異號之同類項 (見次之界說) 爲一項之法也。因而有規則如次。

I. 加二或二以上之正數。即求其絕對值之算術和。
而置正符號於此和之前。

II. 加二或二以上之負數。即求其絕對值之算術和
而置負符號於此和之前。

III. 加一正數與一負數。即求其絕對值之差。而置其
絕對值較大之數之符號於此差之前。

$2+4+7=2+7+4=7+2+4$ ，是固顯然無疑者也。故凡正數或負數之諸連續數。其所有之次序。皆不影響於其最終之結果。此種加法規則。名曰交換定則。

同類項者。即 (a) 諸整數及諸有理之數分數。(b) 相同之方根。如 $\sqrt{2}$ 與 $3\sqrt{2}$ 或 $\sqrt[3]{3}$ 與 $2\sqrt[3]{3}$ ，(c) 有同文字部之項。如 $4a$ 與 $3a$ 或 $6xy^2$ 與 $2xy^2$ 各種皆是也。

異類項者。即不同樣之指根。或有不同文字部之項是也。

因而多項式之加法。有次之

規則 記同類項於同一縱行。

求各行內諸項之代數和。用其各各應有之符號。記其結果爲一連續式。

3. 減法 同樣多項式之減法。亦有次之

規則 記減數於被減數之下。且令同類項爲同縱行。

於心中假定變減數各項之符號。以求各行內諸項之代數和。用其各各應有之符號。記其結果爲一連續式。

習 題

試加次之各題。

1. $16, -3, +2, -8, -7$, 及 4 .

2. $4a, -6a, -10a, +2a$, 及 $18a$.

3. $4x-3y+7, 8x-10y-11$, 及 $10y-30+7x$.

4. $7x-4y-z$, $3x+z-8y$, 及 $18y-17x-14z$.

5. $4a^2-3a^2c-4ac^2$, $3a^2c-8ac^2-8a^2$, 及 $3a^2-6a^2c$.

6. 若 $x=1$, $y=2$, $z=3$. 試求習題 4 之三式內。及其所得之結果內。各各之數值。試比較此三數值之和與結果之數值。

7. 試述代數式之加法內檢算法之規則。

試以多項係數記出以下各題。

8. $ay+by+cy$.

11. $7x-3ax-4a^2x$.

9. $3ax-4bx+6x$.

12. $3(a+b)-c(a+b)$.

10. $4x-abx-x$.

13. $6a(x-2c)-3(x-2c)$.

14. $4b(3x-2)-8c(3x-2)$.

15. $4m(5a-3c)-6n(-3c+5a)$.

試於以下各題內。從第二式減去第一式。

16. $4a$, $6a$.

18. $4x+3$, $8x+6$.

17. $8a^3$, $5a^3$.

19. $7x^2-10$, $5x^2-20$.

20. $x-3y^2+z-4ac+7ax$, $4x-y^2+8-5ax+9ac$.

21. $a^3-c+3x-a^2m-8ac$, $4a^3+m-8x-10ac+4a^2m$.

於以下各題內。試求出一式。能令其加於第一式則得第二式。

22. x^2-5x+6 , $3x^2-5x+2$.

23. $4x^2-3cx+c^2$, $8c^2+7cx-10x^2+8$.

於以下各題內。試求出一式。能令第一式減去該式則得第二式。

24. $4a^2 - 2ab + b^2$, $7a^2 - 10ab + 6b^2$.

25. $c^2 - 10cx + 8x^2$, $9x^2 - 10cx + 4 + c^2$.

26. 由前習題 22 及 24 所提示之方法。試述減法內檢算法之規則。

27. 從 $ax - ac - 3c^2$ 及 $4c^2 - 3ac$ 之和內。減去 $4c^2 - 8ax + a^2$ 及 $4ac + 3ax - 5c^2$ 之和。

於以下各題內。消去其括弧。且合併其同類項。

28. $4x - 3 - (a - 2x) + (3x - a)$.

29. $6x + (3c - 8x + 2) - (c - x - 2)$.

30. $6x - [- (a - c) + (3c - 4a)]$.

31. $7c - [(3c - 4) - 6 - (4x - 3a - c)]$.

32. $4x - 2(x - 3) - 3[x - 3(4 - 2x) + 8]$.

33. $6x - 4(3 - 5x) - 4[2(x - 4) + 3(2x - 1) - (x - 7)]$.

34. $3x - 2[1 - 3(2x - 3 - a) - 5\{a - (3x - 2a) - 4\}]$.

35. 試述去括弧之規則。

(a) 當正符號在於其前時。

(b) 當負符號在於其前時。

試於以下諸題。括其含 x 與 y 之各項於一括弧內。其前置以正號。又括其所餘之他項於一括弧內。其前置以負號。

$$36. \quad x^2 + 2xy + y^2 - a.$$

$$37. \quad x^2 + 14ab - 49a^2 - b^2.$$

$$38. \quad y^2 + 6xy + 9x^2 - m^2 - 10m - 25.$$

$$39. \quad x^4 + 10x^2y^3 - c^8 + 12c^4d - 36d^2 + 25y^6.$$

40. 試述括諸項於一括弧內之規則。(a) 其前置以正號者。(b) 其前置以負號者。

4. 乘法 一項以他一項乘之。所得積之符號。積之係數。及積中任一文字之指數。皆可得之於次。

I. 若乘數與被乘數有同符號。則積之符號爲正。若有異符號。則爲負。

II. 積之係數。即各因子之係數之積。

III. 積中各文字之指數。由次之普通定律決之。

$$n^a \times n^b = n^{a+b}$$

因而多項式之乘法。有次之

規則 以乘數之各項。次第乘其被乘數。而令其各次乘積相加。

指數定律。擴張於乘法內。是爲自乘法之定律。

$$(n^a)^b = n^{ab}$$

後之定律。應用稍普通之形如次。

$$(x^a y^b)^c = x^{ac} y^{bc}.$$

又 $((x^a)^b)^c = x^{abc}.$

5. 除法 一項以他項除之。所得商之符號。商之係數。及商中任一文字之指數。皆可得之於次。

I. 當被除數與除數有同符號。則商之符號爲正。若有異符號則爲負。

II. 商之係數。即被除數之係數由除數之係數除之之商。

III. 商中各文字之指數。由次之定律決之。

$$n^a \div n^b = n^{a-b}.$$

一多項式以他多項式除之。其方法述之於次。

規則 依某公共文字之降冪。整列被除數與除數。稱曰該文字之整列式。

以除數之第一項。除被除數之第一項。記其結果。爲商之第一項。

以商之第一項。乘全除數。記其結果於被除數之下。而減之。試留心記其餘數之各項。與除數之各項。同其次序。

以除數之第一項。除餘數之第一項。是爲商之第二項。以下逐次如前法。除至無餘數而止。或至僅有某餘數。但其整列之文字較除數爲低次者(8節)而止。

6. 零指數之意義 關於指數之諸定律。述之於4及5兩節之公式中者。係假定對於 a 與 b 有一切之值。

故

$$x^a \div x^a = x^{a-a} = x^0$$

但

$$\frac{x^a}{x^a} = 1$$

因而

$$x^0 = 1$$

由是凡任何數。(除零外) 其指數爲零者。等於 1。

7. 負指數之意義 若於 5 節之公式內 b 大於 a 時。則得一負指數 n 。如斯指數之意義。說明之於次。

由 5 節

$$\frac{x^a}{x^{a+b}} = x^{a-(a+b)} = x^{-b}$$

但此分數之分子分母各項。同以 x^a 除之。

$$\frac{x^a}{x^{a+b}} \text{ 或 } \frac{x^a}{x^a x^b} = \frac{1}{x^b}$$

故

$$x^{-b} = \frac{1}{x^b}$$

於一般

$$cx^{-a} = \frac{c}{x^a} \text{ 及 } \frac{c}{x^{-a}} = cx^a$$

此後對於以上指數定律。皆假定其包含正, 負, 零。及分數指數。

習 題

試演次所示之運算。

$$1. (4x^2 - 3x)(2x). \quad 2. (2x + 3)(5x - 6).$$

3. 於習題 2 及其積內之各因子。以 2 代其 x 。試比較積之數值與諸因子數值之積。由是說明乘法內檢算法之手續。

4. $(3x^2-1)^2$.

8. $(e^1+e^{-1})^2$.

5. $(7x^{2a}-8x^a+3)^2$.

9. $(e^x+2e^{-x})^2$.

6. $(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})^2$.

10. $(e^x-e^{-x})^3$.

7. $(x^{\frac{1}{2}}-x)^2$.

11. $(e^{2x}-3e^{-x})^4$.

12. $(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1)(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1)$.

13. $\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{3}{4}x-2\right)\left(\frac{4x}{5}-\frac{x^2}{6}-\frac{1}{2}\right)$.

14. $(4x^{3e}-6x^e+3)(7x^{8e}-x^{2e}+4)$.

15. $(x^2-2xy^2+y^4)(x^2+2xy^2+y^4)$.

16. $(x^{-1}-3x-2x^{-2})^2$.

17. $(x^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}})^2$.

18. $\left(\frac{2a^2}{3}-\frac{a}{5}+\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2a^3}{3}+\frac{a^2}{5}-\frac{2a}{7}\right)$.

19. $(5x^{2a}-3x^{-2a}-6x^{-a}+3x^a)^2$.

20. 若 $x=-9$, $x^2-x-90=?$

21. 若 $x=3$ 及 $y=2$, $x^2-4xy^2+4y^4=?$

22. 若 $x=2$ 及 $y=-3$, $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=?$

23. 若 $x=-4$ 及 $y=-2$, $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=?$

24. 若 $e=2$, $e=-3$, $(e^1-e^{-1})^2=?$

25. 若 $e=2$ 及 $x=2$, $e^{2x}-2e^0+e^{-2x}=?$

26. $(8x^4-6x^2-4x)\div(-2x)$.

27. $(x^2-7x+12)\div(x-3)$.

28. 試述乘法之組合定律。並說明之。

29. 試述乘法之分配定律。並說明之。