

最优 H_2 模型降阶

OPTIMAL H_2
MODEL REDUCTION

曾泰山 鲁春元 著



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶

OPTIMAL $\mathcal{H}_2$
MODEL REDUCTION

曾泰山 鲁春元 著



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

最优 H_2 模型降阶 / 曾泰山, 鲁春元著. —广州: 暨南大学出版社, 2013. 8

ISBN 978 - 7 - 5668 - 0702 - 1

I. ①最… II. ①曾… ②鲁… III. ①降阶法—研究
IV. ①O151. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 180869 号

出版发行: 暨南大学出版社

地 址: 中国广州暨南大学

电 话: 总编室 (8620) 85221601

营销部 (8620) 85225284 85228291 85228292 (邮购)

传 真: (8620) 85221583 (办公室) 85223774 (营销部)

邮 编: 510630

网 址: <http://www.jnupress.com> <http://press.jnu.edu.cn>

排 版: 广州市铎建商务服务有限公司

印 刷: 广州广禾印刷有限公司

开 本: 850mm × 1168mm 1/32

印 张: 5.875

字 数: 140 千

版 次: 2013 年 8 月第 1 版

印 次: 2013 年 8 月第 1 次

定 价: 18.00 元

(暨大版图书如有印装质量问题, 请与出版社总编室联系调换)



前 言

在当今科学与工程技术领域中, 随着处理的问题越来越复杂, 系统也变得越来越庞大, 大系统和大数据层出不穷. 例如超大规模集成电路系统、天气预报、分子动力学系统、生物系统、流体力学等, 都涉及大型系统的模拟和控制. 由于内存、计算速度和计算精度等问题, 一般来说直接模拟和控制这些大规模系统是比较困难的, 而模型降阶正是解决这一问题的关键技术. 模型降阶的基本思想是在尽可能保持原始大规模系统的主要特征(如本征结构、传递函数的矩、脉冲响应等)的条件下, 寻找一个降阶系统, 使得在某种范数意义下(如 $\mathcal{H}_2$ 范数、 $\mathcal{H}_\infty$ 范数或者 Hankel 范数)能够很好地或最优逼近原始大规模系统. 利用降阶系统可以大大减少系统分析的难度和计算量. 近年来, 模型降阶技术已经成功应用于超大规模集成电路、流体力学等工业技术领域.

最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶问题在理论和工程上具有重要意义. 近几年来, 随着研究的深入, 该问题的计算瓶颈已经得到比较好的解决, 可以应用于大规模系统降阶. 为了更好地推动该问题的理论和应用研究, 将最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶问题的最新进展整理出来非常有必要. 本书将从流形最优化和有理插值两个角度来论述最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶问题. 本书首先阐明了基于矩阵投影的模型降阶方法本质上对应于 Grassmann 流形上的数值方法, 并根据这一想法将最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶问题转化为 Grassmann 流形上的最优化问题. 在此基础上提出一系列的数值算法求解最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶问题. 最后本书从有理逼近的角度证明了最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶和有理插值的等价性.

本书共分 6 章, 具体安排如下: 第 1 章简单介绍模型降阶问题和模型降阶的原理. 第 2 章介绍线性时不变系统并简要介绍模型降阶的基本方法等理论基础, 并介绍两种常用的模型降阶方法: 平衡截断和基于 Krylov 子空间的矩匹配方法. 第 3 章介绍 Grassmann 流形上的最优化算法: 梯度下降法、共轭梯度法和牛顿法, 建立基于投影的模型降阶方法和 Grassmann 流形上的模型降阶方法的联系. 第 4 章主要介绍 Grassmann 流形上最优化问题框架下的基于正交投影的模型降阶方法, 包括四种适合大规模多输入多输出系统的模型降阶方法: 快速梯度流算法、共轭梯度法、逐步正交迭代算法和 Newton-like 算法. 第 5 章主要介绍基于斜投影的 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶方法, 其主要思想是将 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶问题看成是双变量的 Grassmann 流形上的最优化问题. 通过利用第 4 章得到的单变量 Grassmann 流形上的最优化算法来构造基于斜投影的模型降阶方法. 第 6 章讨论多输入多输出系统的 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶的理论问题.

本书在撰写过程中, 得到了许多人的帮助. 程思睿、叶纬材、张庆辉、陈剑、程东升、李斯、吴婷婷、陈祥玲等帮忙收集和整理文献资料, 付出了辛苦劳动. 在研究过程中, 作者的导师陈仲英教授和许跃生教授一直鼓励和支持作者. 此外, 作者得到了国家自然科学基金(11101163)的大力支持, 也得到了所在单位华南师范大学和广东药学院的支持. 在本书出版之际, 作者衷心地感谢所有支持和帮助过作者的机构和个人.

由于作者学识水平有限、时间有限, 书中难免存在不妥与错误之处, 希望广大读者和专家同仁不吝赐教.

作者

2013年7月于广州

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 问题的提出	1
1.2 模型降阶的原理	3
1.2.1 基于投影的模型降阶	5
1.2.2 最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶	6
1.3 本书的组织结构	7
第 2 章 线性时不变系统与模型降阶	9
2.1 线性时不变系统	9
2.1.1 线性时不变系统的描述	9
2.1.2 稳定性和无源性	12
2.1.3 可控性和可观测性	13
2.1.4 传递函数的状态空间实现	15
2.1.5 Gramian 矩阵和 Lyapunov 方程	17
2.1.6 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$ 范数	20
2.2 模型降阶方法回顾	22
2.2.1 平衡截断	25
2.2.2 基于 Krylov 子空间的矩匹配方法	28
2.2.3 模型降阶方法小结	35
2.3 本章小结	36
第 3 章 Grassmann 流形上的最优化问题	37
3.1 正交群、Stiefel 流形和 Grassmann 流形	38
3.1.1 正交群、Stiefel 流形和 Grassmann 流形的定义 ..	38

3.1.2 欧氏空间中的 Stiefel 流形和正交群	41
3.1.3 Grassmann 流形的商空间表示	46
3.1.4 Grassmann 流形的几何性质	48
3.2 Grassmann 流形上的最优化算法	53
3.2.1 Grassmann 流形上的梯度下降法	54
3.2.2 Grassmann 流形上的共轭梯度法	55
3.2.3 Grassmann 流形上的牛顿法	56
3.3 Grassmann 流形与模型降阶	57
第 4 章 最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶的正交投影方法	63
4.1 引论	63
4.2 最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶	64
4.3 代价函数在 Grassmann 流形上的梯度	68
4.4 Grassmann 流形上的快速梯度流算法	73
4.4.1 算法的总体框架	75
4.4.2 稳定性和无源性	81
4.5 与 Stiefel 流形上的梯度流算法的比较	83
4.5.1 Stiefel 流形上的梯度流算法	83
4.5.2 两个梯度流算法之间的关系	86
4.5.3 两个梯度流算法的计算复杂度比较	90
4.5.4 数值算例	91
4.6 共轭梯度法	95
4.6.1 稳定性和无源性	97
4.6.2 数值算例	98
4.7 逐步正交迭代算法和 Newton-like 方法	98
4.7.1 算法框架	99

4.7.2 稳定性和无源性	103
4.7.3 数值算例	104
4.8 本章小结	107
第 5 章 最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶的斜投影方法	109
5.1 基于斜投影的 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶	109
5.2 代价函数的偏导数	113
5.3 基于斜投影的模型降阶方法	117
5.3.1 双边迭代算法 (TSIA)	117
5.3.2 交替方向迭代算法 (ADIA)	120
5.3.3 交替方向搜索算法 (ADSA)	122
5.4 基于平衡实现的模型降阶框架	125
5.5 本章数值算例	127
5.6 本章小结	133
第 6 章 基于有理插值的最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶	135
6.1 最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶	136
6.2 代价函数的梯度	139
6.3 投影降阶和切触插值的关系	141
6.3.1 一阶极点	141
6.3.2 高阶极点	146
6.4 基于切触插值的算法	159
6.5 本章小结	161
参考文献	163

第1章 绪论

随着科技的不断发展,许多物理或人造系统变得越来越庞大,对大规模系统的模拟和控制也变得越来越困难,而模型降阶正是解决这一问题的关键技术.本章将简要回顾模型降阶的来源和基本原理.

1.1 问题的提出

在现代科学技术中,大部分的物理系统都可以由数学模型表示.例如天气预报、超大规模集成电路系统等都可以用数学模型来表示.这些数学模型可以模拟实际物理系统的运动,或者用来控制另一个物理过程.求解这些数学模型,通常需要借助于科学计算的手段和方法.

随着科技的发展,许多物理系统变得越来越庞大,导致相应的数学模型也越来越庞大.一个常见的例子是超大规模集成电路系统的模拟和设计.目前,单片芯片上集成的晶体管数目已经达到数亿量级(10^8 数量级).另外一些大规模系统的例子包括:天气预报、空气质量预测、分子动力学系统、高性能飞行器控制和国际空间飞行站的控制等.另一方面,物理系统的数学模型可能是一组半离散的偏微分方程或者离散的积分方程,或者就是一个大规模的常微分方程组.为了得到更多的细节,常常需要对网格进行更精细的剖分.在这种情况下,网格剖分得越细,相应数学模型的规模就越大.例如,在三维情况下,很容易通过离散抛物型偏微分方程得到百万阶的常微分方程组.

系统的阶增加带来了所谓维数灾难的问题. 系统的阶越高, 则关于系统的模拟、控制、性能分析(稳定性、可控性、可观测性和灵敏度等)就变得越困难. 大规模系统带来的困难主要有三点: 需要大量的存储空间; 计算量大; 常常带来坏条件数, 计算精度不能得到保证.

降维技术是解决高维问题的一种有效方法. 由于高维数据中常常带有大量不重要或者冗余的信息, 因此可以通过某种降维技术获取和保留高维数据中的主要部分来达到降低复杂度的目的. 降维或降阶技术在许多不同的专业领域有着不同的体现: 求解线性方程组的 Krylov 子空间投影方法 [92]、积分方程小波方法中的截断技术 [19]、高维函数的稀疏 Fourier 级数展开 [58]、人脸识别中的流形学习方法 [86] 和压缩感知中的稀疏采样技术 [23] 等. 顾名思义, 模型降阶也是一种降阶技术. 模型降阶的基本思想是寻找一个降阶系统能在某种意义下很好地或最优逼近原始大规模系统, 并尽可能保持原始大规模系统的主要特征(例如本征结构、传递函数的矩、脉冲响应等). 如果从传递函数的角度来看, 模型降阶是通过低阶的有理多项式逼近高阶的有理多项式来获得降阶系统. 一个适当的降阶模型可以代替原始大规模系统进行有效的模拟和控制. 图 1.1 显示了模型降阶的总体框架.

模型降阶的应用非常广泛. 例如超大规模集成电路设计 [14, 32, 46, 57]、微机电系统的分析和设计 [15, 66]、天气预报 [30, 50, 100]、分子动力学 [85, 108]、流体力学 [87, 99]、声系统 [68]、Stokes 方程 [84, 97]、随机微分方程 [49, 53] 和偏微分方程的控制 [60] 等.

本书主要研究线性系统的模型降阶. 这是由于线性系统具有构造模型简单、处理相对比较容易的优点, 且许多非线性系统

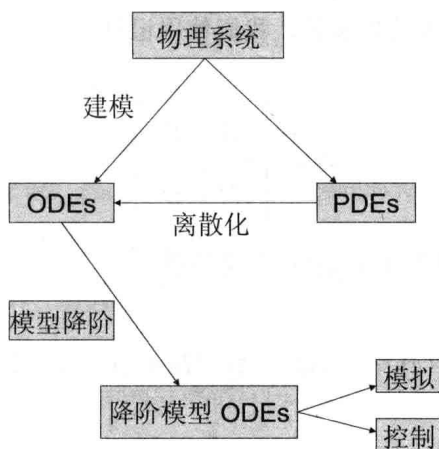


图 1.1 模型降阶的总体框架

可以由线性系统来描述或逼近. 虽然线性系统的一般理论相对成熟, 但对于大规模线性系统的模拟和控制, 仍然缺乏有效的计算方法. 模型降阶正是解决这一问题的关键技术.

1.2 模型降阶的原理

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 和 $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$, 线性时不变 (LTI) 系统可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

其中 n 称为系统的阶, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 称为状态变量. 系统的阶 n 代

表系统的规模. 为简单起见, 我们使用记号

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

来描述这个线性时不变系统. 定义函数

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D, \quad s \in \mathbb{C}$$

为系统的传递函数.

模型降阶的基本思想是当系统的阶 n 很大的时候, 寻找一个降阶系统

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t), \end{aligned}$$

使得降阶系统和原始大规模系统在某种意义下接近, 其中 $\hat{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\hat{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$. 降阶系统记为

$$\hat{S} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right].$$

定义函数

$$\hat{G}(s) := \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}, \quad s \in \mathbb{C}$$

为降阶系统的传递函数. 模型降阶通常还需要满足:

- (1) 降阶系统和原始系统在某种意义下接近;
- (2) 降阶系统保持原始系统的特性, 如稳定性、无源性;
- (3) 降阶算法的计算复杂度低、数值稳定.

不过对具体方法来说, 这三个准则可能无法同时得到满足.

描述降阶系统和原始大规模系统的接近有很多种方法. 例如, 我们可以要求降阶系统的输出 $\hat{y}(t)$ 和原始大规模系统的输出 $y(t)$ 的差

$$\|y(t) - \hat{y}(t)\|$$

比较小. 或者, 我们可以要求降阶系统的传递函数和原始大规模系统的传递函数的差

$$\|G(s) - \hat{G}(s)\|, \quad s \in \mathbb{C}$$

比较小. 常用的范数有 $\mathcal{H}_\infty$ 范数、 $\mathcal{H}_2$ 范数和Hankel 范数. 这些范数的具体定义将在第2章给出.

通过一个高阶系统来产生一个降阶系统的方法有很多. 在文献 [7] 中, 模型降阶方法分为两类: 第一类是矩匹配的方法 [33]; 第二类是各种各样的基于奇异值分解 (SVD) 的降阶方法, 例如平衡截断 [18]、Hankel 最优模型降阶 [18] 和奇异摄动法等. 关于模型降阶的综述可以参考文献 [2, 6, 7, 10, 21, 65, 113].

1.2.1 基于投影的模型降阶

目前, 大部分的模型降阶方法可以归结为基于投影的降阶方法. 基于投影的降阶方法首先要选取适当的矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 和

$V \in \mathbb{R}^{n \times r}$, 且 W 和 V 满足双正交性: $W^T V = I$. 然后将 W 和 V 作用在原始大规模系统的状态方程, 获得降阶模型

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= W^T A V \hat{x}(t) + W^T B u(t), \\ \hat{y}(t) &= C V \hat{x}(t) + D u(t).\end{aligned}$$

此时, 降阶系统为

$$\hat{S} = \left[\begin{array}{c|c} W^T A V & W^T B \\ \hline C V & D \end{array} \right].$$

如果 $W = V$, 这一投影过程称为正交投影; 如果 $W \neq V$, 则称为斜投影. 选择不同的矩阵 W 和 V 将导致不同的降阶算法.

1.2.2 最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶

本书将主要研究 $\mathcal{H}_2$ 范数意义下的最优模型降阶问题. 传递函数 $G(s)$ 的 $\mathcal{H}_2$ 范数的平方定义为矩阵函数的迹的积分 [1]

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}\{G(i\omega)^* G(i\omega)\} d\omega,$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 表示虚数. 最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶问题定义为: 给定一个大规模的稳定系统 $S = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$, 为找一个稳定的降阶系

$$\text{统 } \hat{\mathcal{S}} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right], \text{ 使得}$$

$$\|G(s) - \hat{G}(s)\|_2^2$$

达到极小.

这个问题已经在很多文章中出现过, 可以参考文献 [24, 44, 54, 56, 64, 94, 103, 107, 112]. 求得 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶问题的全局最小解是一个困难的问题, 因此更为实际的目标是找局部最优. 在文献 [103] 中, Wilson 提出 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶的一阶必要性条件:

$$\hat{A} = W^T A V, \hat{B} = W^T B, \hat{C} = C V,$$

其中 $W^T V = I$, W 和 V 依赖于 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ 、 $\hat{C}$. 这个条件说明了 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶问题的极小值点都可以通过斜投影方法获得. 本书将进一步指出斜投影条件和有理切触插值之间的关系.

总之, 设计快速有效的最优 $\mathcal{H}_2$ 模型降阶算法将是本书的研究重点.

1.3 本书的组织结构

本书其他章节的组织结构如下.

第2章首先回顾线性时不变系统的一些重要定义、性质, 主要包括稳定性、无源性、可控性、可观测性, 然后简要介绍两种常用的模型降阶方法: 平衡截断和基于 Krylov 子空间的矩匹配

方法.

第 3 章首先回顾在 Grassmann 流形上的最优化算法: 梯度下降法、共轭梯度法和牛顿法, 然后指出基于投影的模型降阶方法实质上对应着 Grassmann 流形上的数值方法.

第 4 章主要研究基于正交投影的模型降阶方法. 介绍四种适合大规模多输入多输出系统的模型降阶方法: 快速梯度流算法、共轭梯度法、逐步正交迭代算法和 Newton-like 算法, 并指出正交投影的优点在于能更好地保持系统的稳定性.

第 5 章主要研究基于斜投影的 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶方法. 其主要思想是将 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶问题看成是双变量的 Grassmann 流形上的最优化问题. 通过利用上一章得到的单变量 Grassmann 流形上的最优化算法来构造基于斜投影的模型降阶方法.

第 6 章给出了多输入多输出 (MIMO) 系统的 $\mathcal{H}_2$ 最优模型降阶的理论刻画.

第 2 章 线性时不变系统与模型降阶

本章首先回顾线性时不变系统的一些重要定义、性质和定理, 然后简要介绍模型降阶的基本方法. 除一些必要的证明外, 本章对大部分结果只给出基本结论而略去证明. 如果了解详细的证明过程, 可参阅文献 [1, 61, 89, 113].

2.1 线性时不变系统

本节回顾一些基本的线性系统理论概念. 首先介绍传递函数、稳定性、无源性、可控性和可观测性的概念; 然后介绍可控性 Gramian、可观测性 Gramian、Lyapunov 方程的解与 Hankel 奇异值, 最后介绍系统的 $\mathcal{H}_2$ 范数和 $\mathcal{H}_\infty$ 范数.

2.1.1 线性时不变系统的描述

给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 和 $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$, 线性时不变 (LTI) 系统可以表示为

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.2)$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 称为系统的输入向量, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ 称为系统的输出向量, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 称为系统的状态变量. n 称为系统的阶或状态空间的维数, p 和 q 分别表示系统的输入和输出个数. 一个具有单