集合论发展史

国家863计划智能计算机主题课题

张锦文 阎金童 主编

广西师范大学出版社

集合论发展史

张锦文
阎金童 主编

广西师范大学出版社

（桂）新登字 04 号

译者校者

张锦文 $\boxed{\text{吴允曾}}$ 齐民友
周治章 陆尚强 閻金童
张宏裕 高如英 秦克云

集合论发展史

张锦文
閻金童 主编

责任编辑：余鑫晖 封面设计：桑林佳 版式设计：肖向阳

广西师范大学出版社出版发行 邮政编码：541001
（广西桂林市中华路 36 号）
湖南省地质测绘印刷厂印刷
*
开本：850×1168 1/32 印张：6.625 字数：166 千字
1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷
印数：0001—1500 册
ISBN 7-5633-1613-2/G · 1286

定价：平 3.50 元
精 7.00 元

序

集合论的研究从 1870 年 Cantor 的论文开始，至今已有 122 年的历史了。这 100 多年的历史，大致可分为四个阶段：第一阶段是从 1870 年到 1908 年，在这一时期，Cantor 的理论获得了蓬勃的发展，实无穷对象进入了数学，处理实无穷对象的无穷方法、无穷序数与无穷基数随之也进入了数学，伴随这些丰硕成果，也掺杂了一些有待澄清的概念，出现了集合论悖论；第二阶段是从 1908 年到 1938 年，在这一时期，人们为整理总结集合论的丰硕成果，在消除悖论，建立集合论公理系统等方面进行了大量的研究工作，诸如 1908 年 Zermelo 建立的公理系统 Z，后经 Fraenkel 和 Skolem 修改而建立的公理系统 ZF；Russell 建立的类型论 T；由 Von Neumann 开始，经

过 Bernays 修改，Gödel 简化了的公理系统 *NBG*（或简记为 *GB*）；第三阶段是从 1938 年至 1963 年，这一时期 Gödel 证明了连续统假设，选择公理相对于通常的集合论公理系统是协调的著名结论，并且在证明这一重大结果时，Gödel 创立了一种强有力的基本方法——可构成方法，同时人们对这种内模型方法进行了大量的研究，获得了许多重要结果；第四阶段是从 Cohen 1963 年的重大结果——连续统假设的相对独立性和为此而建立的力迫法开始的，这一时期已经有了若干重大结果，正在影响着整个数理逻辑乃至其它数学分支的发展。

对于每一阶段，我们采用阐述它的典型文章和加注记的方式给出说明，限于篇幅，对于不便详细论述的某些方面，我们尽量给出参考文献，便于对此有兴趣的读者查阅。

关于第一阶段，Jourdain 的文章作了详细的说明，提供了集合论产生背景的丰富材料。第二阶段，Fraenkel 的文章具有权威性的说明。对于第三、四两个阶段，我们选择了 Gödel，Cohen，Martin 等代表作加以说明。为了便于理解，我们增加了一些注解与附录。

集合论是一门现代数学分支，它的理论成果和广泛的应用都正在引起人们的关注。编译这本文集的目的是向我国广大读者，尤其是广大数学教师和青年学生介绍集合论的发展史，以促进数学学科课程结构的改革与发展。

我非常感谢吴允曾、齐民友、周治章、张宏裕、陆尚强、高如英、闫金童和秦克云同志，由于他们的合作，完成了本书各篇的翻译与校对工作，其中：一、“集合论

的科学背景与康托尔的贡献”由阎金童译，张宏裕校；二、“集合论的公理化发展”由高如英、秦克云译，笔者校；三、“关于广义连续统假设的协调性证明”与四、“连续统的独立性”由笔者译，吴允曾校；五、“集合论中关于独立性的若干结果”由吴允曾译，笔者校；六、“Martin 公理”由陆尚强译，周治章校；七、“非康托尔集论”由齐民友译，笔者校；八、“当前数学问题中的数学基础”与九、“希尔伯特的第一问题：连续统假设”由周治章译，陆尚强校。在译文稿送出版社前，阎金童和周治章同志对译文作了规范化的整理、补漏及部分文稿的抄正。

我非常感谢广西师范大学出版社的热情支持，非常感谢广西师范大学校长兼出版社社长王炜炘教授和出版社副总编余鑫晖编审对本书出版工作所给予的真诚帮助。

本书的出版，得到国家 863 计划智能计算机主题项目的资助（项目号：306—610）。

限于水平，译文、注解与附录中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

张锦文

1992 年 4 月 28 日于北京

目　　录

一

集合论的科学背景与Cantor的贡献

E. B. JOURDAIN 译著 ' 阎金童译　张宏裕校

编译者注：数学史上最使人惊奇的事实之一，是实数系的逻辑基础竟迟至19世纪后叶才建立起来。在那以前，即使正负有理数与无理数的最简单性质也没有逻辑地建立起来，甚至连这些数的定义也没有，这说明数学的进展是多么不合逻辑。实数系的逻辑缺陷严重地影响着数学分析的发展。Abel在1826年给人的信中说："人们在分析中确实发现了惊人的含糊不清之处。这样一个完全没有计划和体系的分析，竟有那么多人研究过它，真是奇怪。最令人费解的是，从来没有一个人对它严格地进行过分析。在高等分析中，只有很少几个定理的证明在逻辑上是站得住脚的。人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法，而非常奇怪的是这种方法只导致了极少几个所谓的悖论。"

数学家们为了从这种混乱中整理出头绪，决心要在算术概念的基础上建立实数系与分析学的逻辑基础。Jourdain的文章详细分析了这一严密化的历史过程，并进而阐述了Cantor的早期工作和

超穷数的研究。Jourdain 曾与 Cantor 有过长期的通信联系，掌握了大量的第一手材料。读者可从本文中获得关于集合论的科学背景和 Cantor 的贡献方面的重要材料，进而理解集合论在完成数学发展的革命性变革、形成现代数学上的重大作用。

Jourdain 文章是关于 Cantor 的两篇超穷数论的两篇论文英译本的历史导言，原文没有标题，现在的标题和各节的小标题都是编译者加的，这只是为了醒目，难免有不贴切之处。

1. 简短说明

这一卷载有 Georg Cantor 论超穷数的两篇极其重要的学术论文的译文。这两篇学术论文以 Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 为标题刊登在数学年刊上（1895，1897）[①]。据我看来，由于这两篇文章主要是从事各种超穷基数和超穷序数的研究，而不涉及通常描述的“集合理论”——集合的元素是实数或复数，可把它想象为一维或多维空间的几何点——的研究，所以，本译文对这两篇文章给出标题是较为适合的。

这两篇学术论文是 Cantor1870 年研究集合论以来所写的一系列重要论文中的精华。如果要评价 Cantor 论超穷数的著作的全部意义，我想，把他早期关于点集理论的研究工作整个思考一下且牢记心上是有必要的。正是在这些学术研究中，超穷数公开露面了；而且，只有通过对这些研究成果的学习探讨，大多数人才能够打消引进超穷数是随意的乃至不可靠的感觉。另外，回顾一下导致 Cantor 学术研究工作的那些进程（其中特别是 Weierstrass 的学术研究进程）是很有必要的。于是，我预先给出一个导言，追

① Vol. xlvi，1895，pp. 481—512；vol. xlix，1897，pp. 207—246。该标题意思是：超穷数说明文章。

述十九世纪函数论部分的发展过程，相当详细地论述 Weierstrass 及其他学者的奠基性工作，以及 Cantor 从 1870 年到 1895 年的研究工作。在本书末尾的某些注释里，含有从 1897 年以来超穷数理论发展的一个简短说明。在这些注释和本译文的导言里，Cantor 教授长期以来与我互通的信件——这些信件谈论我们多年以前就开展研究的点集理论——给予我很大的帮助。

由 Cantor 的工作所带来的哲学革命也许甚至比数学本身还要伟大。除个别人之外，数学家们都高兴地承认、信赖、仔细地考察和完善 Cantor 的不朽的理论基础；然而，有相当多的哲学家却反对过这个理论。这似乎是因为很少有人理解它。我希望本书有助于数学家和哲学家们更好了解集合论。

有三个著名数学家——Karl Weierstrass，Richard Dedekind 和 Georg Cantor，他们对现代纯粹数学有直接影响，对现代逻辑学以及与它有紧密联系的哲学产生间接影响。Dedekind 的大部分工作与 Cantor 的研究工作沿着同一方向开展，因此，把 Dedekind 的两篇学术论文“Stetigkeit und irrationale Zahlen”和“Was sind und was sollen die Zahlen?”同 Cantor 的著作相比较是有益的。Dedekind 这两篇论文的优秀英译本已由本书出版者发行。①

Cantor 这两篇学术论文有法文译本②，但没有英文译本。我非常感激来自 Leipzig 和 Berlin 的 B. G. Teubner 以及数学年刊的出版者，因为他们都为本译作成功提供了友好的帮助。

---

① 数论随笔（Ⅰ，连续性和无理数；Ⅱ，数的特征和含义），由 W. W. Beman 于 1901 年在 Chicago 翻译成英文出版了。我把上述Ⅰ和Ⅱ统称数论随笔。

② 由 F. Marotte 翻译，于 1899 年在巴黎出版，书名为《超穷数集合的基础理论》。

2. 数学源于物理

如果要有把握地认定，19 世纪直至今日纯数学分析中多半已用上的那些概念的鼻祖，我想，应该首推 Jean Baptiste Joseph Fourier（1768—1830）。Fourier 首先是一位第一流的物理学家，他明确地表达他的观点，数学有助于给出物理问题的解答而证明其本身的正确性；同时他还阐明了函数及其“连续性”的概念，无穷级数的“收敛”的一般概念，以及作为他关于热传导问题大胆独创的处理方法的第一个光辉夺目的成果——“积分”的一般概念。正是这种见解促进了函数理论的形成和发展。

如果一位物理学家，考虑到数学是合理而又方便的处理大量复杂数据的有力工具和经济手段，虽然直到数学方法及其结果所涉及的每个概念未弄清楚之前，我们不会相信它在逻辑上的正确性，那么他会承认，蕴源于物理概念的数学方法的精益求精的发展。纯粹数学家知道，纯粹数学本身最终与哲学很紧密的联系着。在这里且不验证纯粹数学的合理性，我们仅仅指出，物理概念是纯粹数学的根源，甚至物理学可以验证纯粹数学的大多数现代发展是合理的。这句话很重要，指出物理对数学的意义。

3. 数集合与三角级数的展开

函数论的两大分支在 19 世纪期间得到了发展并且逐渐独立起来。Fourier 关于三角级数的结论的严密基础是 Dirichlet 给出的，它作为一元实变量的单值函数的一般概念和函数的展开（特别是三角函数的展开）的研究课题被提出来的。另一方面，Cauchy 逐渐认识到比较特殊的复变函数概念的重要性；Weierstrass 在很大程度上独立于 Cauchy 建立了复分析函数理论。

Cauchy 和 Dirichlet 的这些研究趋势结合起来影响了 Riemann；Riemann 在复分析函数理论方面的工作继承和极大地发展了 Cauchy 的成果，他 1854 年取得在大学授课资格的论文“Habilitationsschrift”的意图，就在于一般化 Dirichlet 关于实变函数按三角函数展开的问题的部分解法。

Riemann 在这两方面的实践活动给 Hankel 留下很深的印象。Hankel 在 1870 年的一篇学术论文里，试图把实变函数理论描述为必然导致限制与扩张的先导(在复变函数的 Riemann 理论中，我们是从这两个概念出发的)。由于 Hankel 取得突出的研究成果，受到人们的尊敬，大家称他为实变函数展开理论的奠基者。大约与此同时，在 Riemann 的“Habilitationsschrift”的直接影响下，Heine 正式介绍了一系列关于三角级数方面的研究情况。

在这之后不久，我们发现 Georg Cantor 不仅研究 Hankel 的论文，而且把他关于无理数和点集“导群”——或数集合的那些概念应用到三角展开式的唯一性理论上。数集合这个概念是从 Weierstrass 在柏林所作的解析函数的讲演稿导言中提出的严格论述中发展起来的。点集合理论不久就变成极其重要的独立理论，1882 年，数学中第一次出现的 Cantor “超穷数”也被定义出来了。

4. Riemann 与 Hankel 的影响

18 世纪关于振动弦问题的研究①，基于下列原因引起一场争论。D′Alembert 提醒说，在由振动弦问题导出的偏微分方程的普通

① 参看我的文章所给出的参考书目，这个书目在 Archiv der Mathematik und Physik，3rd series，vol. x，1906，pp. 255—256，及 Isis，vol. i，1914，pp. 670—677 中列有。本导言的多数资料取自我写的“超穷数进展”一书，此书是按上述的 Archiv，3rd series，vol. x，pp. 254—281；vol. xiv，1909，pp. 289—311；vol. xvi，1910，pp. 21—43；vol. xxii，1913，pp. 1—21 中所列的资料编成。

积分中，任意函数限于具有使它们化归为可解析表达的函数的某些性质，会阻止函数在每点完全任意的进程。另一方面，Euler 为承认某些“任意”函数变为解析函数而辩解。于是 Daniel Bernoulli 提出一个形如无穷三角级数的解，且在一定的物理基础上，要求这个解跟 d'Alembter 所主张的一样通用。正如 Euler 所指出的那样，如果在形如

$$\phi(x)=\sum_{\nu}a_{\nu}\sin\frac{\nu\pi x}{l}$$

的级数①中，任意函数 $\phi(x)$ 可展开，那么这个解就是上面所求的解。实际上，甚至当 $\phi(x)$ 不一定能展开成幂级数时，这个解也确实是所求的解。这一点首先由 Fourier 所阐明。他率先用自己在热传导方面的研究成果来研究与之相同的数学问题，1807 年 Fourier 把其中最重要的研究成果通知法国科学院。此外，三角级数

$$\phi(x)=\frac{1}{2}b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots$$

的系数确定也应归功于 Fourier，其中系数

$$b_{\nu}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\phi(\alpha)\cos\nu\alpha d\alpha,a_{\nu}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\phi(\alpha)\sin\nu\alpha d\alpha$$

这种系数确定法大概独立于有穷三角级数系数的 Euler 先验确定法和 Lagrange 的类推确定法。此外，Fourier 还就级数的收敛性给出一个几何证明，虽然这个证明从形式上看不那么精确，但它正是 Dirichlet 证明的起源。

首先正确论述 Fourier 级数的是 Peter Gustav Lejeune-Dirichlet

① 在这点上，Euler 所主要考虑的任意函数是所谓“间断”函数，这个词不是我们现在所指的那个意思（在 Cauchy 之后），参看我在 Isis，vol. i，1914，pp. 661—703 中的文章。

(1805—1859)[①]。他用定积分表示级数前 n 项的和，且证明了当 n 趋于无穷时，这个积分的极限就是由该三角级数表示的函数，倘若该函数满足某些条件的话。Lipschitz 于 1864 年使这些条件得到减弱。

这样，Fourier 的工作导致对某些品格与代数函数完全不同的函数的重视和精确的论述。在他之前，这些函数不言而喻地被认为是可能出现在数学分析中的所有函数的典型。从此以后，研究非代数体函数变成数学分析中的一部分。

在 19 世纪头几十年中，含有虚变量即复变量的比较特殊的函数理论发展起来了。Carl Friedrich Gauss (1777—1855) 至少部分知道这个理论，但他不公布他的结论，因此，这个理论应该归功于 Augustin Louis Cauchy (1789—1857)[②]。Cauchy 比不上 Gauss 看得远和敏锐。逐步发展起来的这种理论正是克服 Cauchy 对“虚数”偏见的结果。我们先追溯 1814 年到 1846 年期间，符合 Fourier 思想的 Cauchy 概念的强大感染力，然后再追溯对其他思想迅速增长的非感染力，当然，这种非感染力是与这个心胸狭窄的天才那种离奇的品性相联系起来的。Cauchy 似乎以他能使自己的论文能荣幸地在法国科学院每周讨论会上发表而自豪，这也许是由于他的文章有非同寻常的重要性所致。除“自豪”之外，他似乎完全不觉察自己为创造复变函数理论而付出如此众多的劳动的巨大重要性。建立复变函数理论的任务留给 Puiseux，Briot 和 Bouquet 以

① “sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données,” Journ. für Math., vol. iv, 1829, pp. 157—169; Ges. Werke, vol. i, pp. 177—132。双引号中文字的意思是：关于用于表示在已知极限内的任意函数的三角级数的收敛。

② 参看 Jourdain 著“Cauchy 和 Gauss 的函数理论”，载于 Bibl. Math. (3), vol. vi, 1905, pp. 190—207。

及其他数学家。这个任务由 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826—1866) 用最使人惊奇的方法推进了。

Riemann 也得感谢他的导师 Dirichlet，因为 Dirichlet 倾注心血研究的位势理论，是他的古典复变量函数理论和三角级数理论发展（1851 年）的主要工具。有人于 1854 年就读到 Riemann 所写的函数用三角级数表示的论文，但这些论文在他死后才发表。Riemann 不仅为所有的现代数学研究注入这些级数理论打下基础，而且给 Hermann Hankel (1839—1873) 灌输科学研究的方法，由此我们可以断定实变函数论作为一门独立学科的年代。Hankel 在 Riemann 的复变函数论的基础上用反射法规定了研究主题。它的中心是如何说明下列问题：数学的需要迫使我们在最普通的函数概念之外研究问题（关于这点，Dirichlet 含蓄地阐述过），引进复变量，进而最终达到 Riemann 在他的就职演说中强调开始使用的那个概念。为了达到这个目的，Hankel 通过对 Dirichlet 概念所包含的各种可能性进行彻底的检验，着手研究他 1870 年提出的“Untersuchungen Über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen；ein Beitrag zur Feststellung des Begriffes der Function überhaupt”。[1]

Riemann 在 1854 年所写的一篇论文中，他从 Dirichlet 只解决一种特殊情形的普遍化问题着手：如果一个函数可按三角级数展开，那么，当自变量连续变化时，函数值的变化会有什么样的结果？（即：使函数变成间断且有极大极小值的最普通的方法是什么？）正如 Fourier 指出的那样，Fourier 级数的自变数是一个实变量，它对于单实变数 x 也许是收敛的。这尚不能完满答复我们刚才提出的问题，也许由于这个原因，该著作在 Riemann 的有生之年不曾公开发表；然而幸运的是——该著作与我们关系比较特殊的那

① 原文意思是：关于无穷次摆动和不连续的函数。

个部分（看起来要充实）——Dirichlet 所写的引人注目的微积分学原理的修订本的前言，写有给出可积函数 $f(x)$ 的充分必要条件所得到的结论。这点给 Riemann 的研究提供了一个必要的准备工作。于是，导致 Riemann 给出比 Cauchy 甚至比 Dirichlet 所注视的方法意义更为深远的积分方法，在两个任意靠近的含有独立变量的极限之间，构造一个无穷次间断的可积函数：如果 x 为实变量，(x) 表示 x 超过最靠近整数的正超出量或负超出量，或当 x 为两个整数中点时超出量为零，则（x）为具有间断点 $x=n+\frac{1}{2}$（其中 n 是一个整数（正、负数或零））的含有变量 x 的单值函数，且分别以 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 为上下极限。而且，（νx）在 $\nu x=n+\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{1}{\nu}$（$n+\frac{1}{2}$）间断，其中 ν 为整数。因此我们可以想到级数

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu x)}{\nu^2}$$

对于形如 $x=\frac{p}{2n}$ 的所有 x 的值会是间断的。这里，因为 $\frac{1}{\nu^2}$ 确保级数对所有 x 的值都收敛。p 是与 n 互质的一个奇数。1870 年，Hankel 在某些方面推广了这种方法。在 Riemann 的例子中，出现一个解析表达式——它就是在 Euler 意义上的“函数”，由于“函数”有各种各样的奇点，所以它不容许象 Riemann 的“复变函数”一样具有这些普通性质。而 Hankel 给出构成以每个有理点为奇点的解析表达式的一种方法，其原理通过这个例子加以暗示。于是，他不得不含蓄地说，在 Dirichlet 意义上的每个“函数”同样也是 Euler 意义上的一个“函数”。

虽然 Riemann，Hankel 以及他们的继承人的工作与 Georg Cantor 的某些部分工作紧密连接，然而对 Georg Cantor 影响最大的似乎不是他们所实践的工作，而是 Riemann 的同时代人 Weierstrass，