高等学校教学用書

射影几何学

上册

H. Φ. 切特維魯新著

高等教育出版社

高等学校教学用書

射影几何学

上册

H. Ф. 切特維魯新著
东北师范大学几何教研室譯
楊春田　　孙福元校

高等教育出版社

本書系根据苏俄教育部教育出版社（Учпедгиз）出版的切特維魯新（Н.Ф. Четверухин）著“射影几何学”（Проективная геометрия）1953年版譯出。原書經苏联高等教育部審定为师范学院教科書。

本書由东北师范大学数学系楊春田、孙福元、郭儒中、蔡昌齡、黃啓瑲、王銘文、王家彦等譯出，由楊春田、孙福元校閱。

射影几何学

上册

Н. Ф. 切特維魯新著

东北师范大学几何教研室譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号）

京華印書局印刷　新華書店总經售

書号13010•89　開本 850×1168 1/32　印張 6 6/16　字數 156,000

一九五五年五月北京第一版

一九五六年八月北京第二次印刷

印數 5,001 –.,000　定價（8）¥ 0.75

上册目錄

第一章　仿射几何的基本概念

§1. 两个平面的透視仿射对应

1. 假定有两个平面 ω 和 ω' 相交于直綫 xx(圖 1)。已知某条直綫 l 与这两个平面都相交。在平面 ω 上任意指定一个点 A，并且通过 A 引平行于 l 的直綫把 A 投射到平面 ω' 上。設投射綫与平面 ω' 交于点 A'。点 A' 可以看作是点 A 在平面 ω' 上的射影。这样的射影叫做平行射影，而由已知直綫 l 所决定。

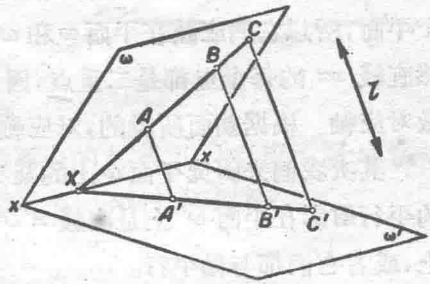

圖 1.

从点 A 的射影 A' 的作法可以看出，点 A 也可以看作是点 A' 在平面 ω 上的射影。因此平行射影对于平面 ω 和 ω' 来說是具有完全同样意义的工具。它使第一个平面的每个点(A)能完全决定第二个平面的一个点(A')，并且反过来也一样。我們得到平面 ω 和 ω' 的点成对的对应。这种对应是一对一的，也就是一个平面的每个点对应第二个平面的唯一点，并且反过来也一样。

利用平行射影所建立的平面 ω 和 ω' 的对应叫做透視仿射对应或相关对应①。

如果我們把由已知平面中的一个（例如，ω）变为另一个(ω')的过程[在这个过程里，一个平面(ω)的每个点(A)变为另一个平

① 拉丁語：*Affinitas* 是屬性或亲屬的意思。

面(ω')的对应点(A'),]看作是單方面的，那么它就叫做平面(ω)到平面(ω')的变換。

把平面ω平行投射到平面ω'上，就做出了由平面ω到平面ω'的透視仿射变換。

这样一来，以后在說到平面的透視仿射对应，或者說到一个平面到另一个平面的变換时，我們都遵照上面所作的說明。

現在我們的任务是研究平面的透視仿射对应的性質。

首先注意在我們的对应中的二重点或不动点的問題。这样的点、就是与自身的对应点重合的点。因为每个二重点应該屬于兩个平面，所以它們应該在平面ω和ω'的交綫xx上。另一方面，显然直綫xx的每个点都是二重点，因为它是自身对应。直綫xx叫做对应軸。根据前面所說的，对应軸可以定义为二重点的軌迹。

其次我們来研究平面ω上的某条直綫AB(圖 1)。这条直綫的平行射影在平面ω'上是直綫$A'B'$。这兩条直綫或者交于軸xx上，或者它們都与軸平行。

这样，一个平面上的直綫对应另一个平面上的也是直綫。透視仿射对应的这个性質叫做同素性。根据直綫的平行射影是它的所有点射影的軌迹这一定义，所以在一条直綫上的每个点总对应着它的对应直綫上的一个点。因此一个平面上的点与直綫的从屬性也就决定了另一个平面上对应元素的从屬性。

2. 下面的透視仿射对应的性質，涉及到所謂直綫上三个点的簡單比。

我們来研究在一条直綫上的三个点A, B和C(圖 2)。点A, B, C的簡單比用下面公式来定义：

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}.$$

在这个公式里，点A和B看作是基础点(或底点)，而点C看作

是分点。簡單比(ABC)是分点与基础点所决定的綫段長度的比。如果点 C 在綫段 AB 的外部，則兩个綫段 AC 和 BC 同方向，因而在这种情形下，簡單比 (ABC) 是正的。分点 C 在 A, B 之間的情形，簡單比 (ABC) 是負的。給定一条直綫上三个点的簡單比 (ABC)① 与另一条直綫上的一对基础点 A' 和 B'，則在第二条直綫上适合$(A'B'C')=(ABC)$的分点 C' 的位置唯一地确定。作分点 C' 可以利用下面的方法。移动第一条直綫使点 A 与 A' 重合，同时引直綫 $CC' \parallel BB'$，就找到点 C'(圖 2)。

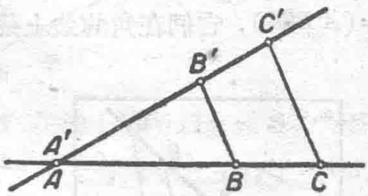

圖 2.

我們再回来研究透視仿射对应的性質，特别是，回到圖 1。在这个圖里我們看到，平面 ω 的点 A, B, C 对应平面 ω' 的点 A', B', C'。因为投射綫 AA', BB', CC' 平行，所以有

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'},$$

或
$$(ABC)=(A'B'C').$$

我們得到結論：在透視仿射对应里，一个平面上一条直綫的三个点的簡單比总等于另一个平面上三个对应点的簡單比。

3. 在进行研究其他透視仿射对应性質以前，我們談一下关于空間里对应平面 ω 和 ω' 的可能位置的問題。

直到現在，我們都是假定这兩个平面不是重合的，而且假定它們相交于直綫 xx。这样作的目的是为了用平行射影法建立上面討論过的透視仿射对应。建立了这样的对应以后，我們可以使兩个平面中的一个繞軸 xx 旋轉，使这兩个平面重合，同时兩个平面上的所有几何圖形都不受任何改变。因此，無論在平面旋轉的任何

① 特别是，如果在圖里已知在一条直綫上的三个点 A, B, C。

瞬間，或者当它与第二个平面重合时，以前所建立的透視仿射对应不被破坏。

联結对应点的直綫AA', BB', CC', $\cdots$，对于旋轉平面的任何位置，仍然是平行的，而且当旋轉平面与不动平面重合时，还是平行的。这因为所提到的直綫里每两条（例如，AA', BB'）总在一对相交直綫（AB 和 $A'B'$）所决定的一个平面上，并且因为 $(ABX)=$ $=(A'B'X)$，它們在角的边上截成比例綫段。当平面 ω 和 ω' 重合时，投射綫（AA', BB', $\cdots$）是在由两个重合的平面 ω 和 ω' 所構成的平面上(圖 3)。

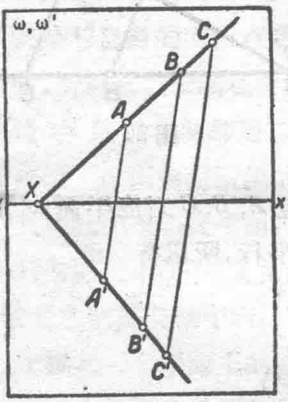

圖 3.

我們特別有兴趣的是平面位置重合的情形。因为在这种情形下，我們可以利用平面圖毫無歪曲地表示出来所建立的对应。

在重合的情形下，（二重的）平面上的每个点都可以看作是屬于平面 ω 或者 ω'，并且用不帶小撇或帶小撇的大写字母来表示它。这样，我們就得到**平面到它自身的变换**，并且用字母 ω 表示原来的情形（变换前的平面）而用字母 ω' 表示新的情形（变换后的平面）。

应該注意，在平面重合以后，对应軸 xx 不再是已知两个平面的交綫，但是第二个定义仍保持着，卽它仍是二重点或不动点的軌迹。

4. 現在我們可以放弃用以建立在两个平面間透視仿射对应的空間工具（平行射影），并且不进到空間而确定二重平面上的透視仿射对应。为了这个目的我們来証明下面的命題：

平面到它自身的透視仿射变换由軸(xx)与一对对应点(A,A')

完全确定。

証明 假設已知透視仿射变換的軸 xx 与一对对应点(A', A)(圖 4)。我們来証明：对于平面的任意点 B，总可以作出完全确定的唯一的对应点 B'。

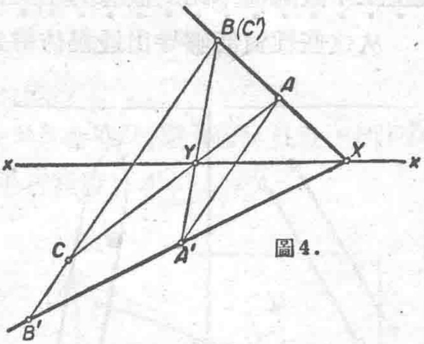

圖 4.

引直綫 AB，設 X 是它与軸 xx 的交点。因为点 X 自身对应(在軸上)，所以直綫 AX 对应直綫 $A'X$。最后，点 B' 应該在直綫 $A'X$ 上并且也在平行于 AA' 的投射綫 BB' 上。这就可以作出所求的点 B'。因此，已知条件是充分的，并且对应点 B' 是唯一解。

应該注意，这个透視仿射对应是实际实現了，因为上面的作圖不能引出矛盾。这只要使作圖与平行射影工具相对照，就容易驗証出来。

事实上，如果沿直綫 xx 变动圖 4，使平面 ω 和 ω' 構成二面角，則所有的投射綫(联結对应点的直綫，例如 BB')是直綫 AA' 的平行綫(根据綫段成比例的性質)。所以我們作成的对应可以看作是平行射影的結果。

注 如果在圖 4 里，我們把点 B 归于平面 ω'，用 C' 表示它，則由对应点的作法我們就得到点 C。从圖 4 我們看到，这个点不总与 B' 重合。我們可以証明，使它們重合(也就是透視仿射对应与点归于那一个平面無关①)的必要且充分的条件就是綫段 AA' 必須被它与軸 xx 的交点所平分。

所以在这种情形下，对应是斜的或是直的对称(对于軸 xx 而言)。

5. 在以后研究透視仿射对应时，我們將依据前面已經确定的性質：1)同素性与 2)三个对应点的簡單比相等。

应該注意，在透視仿射变換里，这些性質表明直綫的概念与直

① 这样的对应性質叫做“对合性”(参考 § 29)。

綫上三个点的簡單比的概念的不变性或是不变量。

从这些性質能够导出透視仿射变换的許多其他“不变”性質。因此，这些引申出的性質不是独立的①。

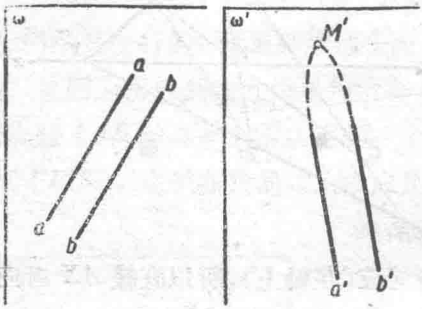

圖5.

首先来証明直綫平行的不变性。假定在平面 ω 上有兩条直綫 a 和 b，它們在平面 ω' 上对应直綫 a' 和 b'。假定直綫 a 和 b 平行($a\|b$)，我們来証明 $a'\|b'$。我們应用“反証法”。假定直綫 a' 和 b 相交，并且用字母 M' 表示它們的交点(圖5)。于是根据平面 ω 和 ω' 的一对一对应，平面 ω' 的点 M' 对应平面 ω 上的点 M。点 M 应該屬于直綫 a 也屬于直綫 b。所以，点 M 是直綫 a 和 b 的交点。这

① 在研究透視仿射对应的第二个性質，三个点的簡單比时，我們应該預先知道对应的同素性。代替这个，可以把第二个性質敘述成另一种形狀，而不預先假定变換的同素性。在这样情形下，同素性就成为第二个性質的推論了。

第二个性質可以敘述成下面的样子。

如果 A, B, C 是第一个平面里一条直綫上的三个点，而 A', B', C' 是第二个平面上的三个对应点，則总有

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

事实上，从所写的比例式可以推出

$$\frac{AB+BC}{BC}=\frac{A'B'+B'C'}{B'C'}.$$

这个等式的左边等于 $\frac{AC}{BC}$，因为点 A, B, C 在一条直綫上。另一方面，根据上面敘述的性質：

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}.$$

所以，有：

$$\frac{A'B'+B'C'}{B'C'}=\frac{A'C'}{B'C'}.$$

由此，$A'B'+B'C'=A'C'$，也就是点 A', B' 和 C' 也在一条直綫上(証完)。

样,就引出矛盾。直綫 a' 和 b' 相交的假定是不可能的,所以 $a' \parallel b'$。

因此直綫的平行是透視仿射变换的不变性質。

其次,我們来研究两个平行綫段的比。

設在平面 ω 上有两个綫段 AB 和 CD（圖 6）,并且設 $AB \parallel CD$。它們在平面 ω' 上也对应两个平行綫段: $A'B' \parallel C'D'$。

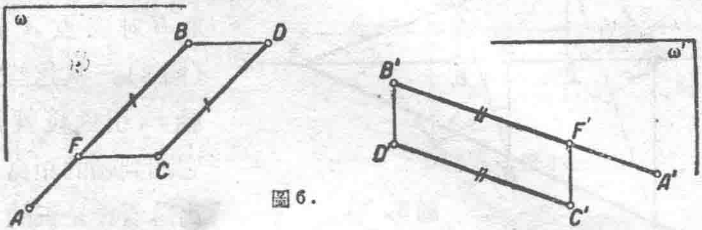

圖 6.

联結 B 和 D 并且通过 C 引直綫 $CF \parallel DB$。在平面 ω' 上直綫 CF 的对应直綫 $C'F' \parallel D'B'$（根据平行的不变性），因而，点 F 將对应点 F'。

已知三个点的簡單比是不变的,我們可以写出

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{FB}=(AFB)=(A'F'B')=\frac{A'B'}{F'B'}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

因此我們得到等式:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

最后的等式表明: 两个平行綫段的比是透視仿射对应的不变量。

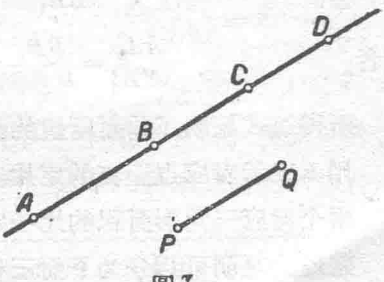

圖 7.

如果綫段 AB 和 CD 在一条直綫上（圖 7）,則它們的比在透視仿射对应里,仍然是不变的。事实上,設 PQ 是平行于直綫 AB 的任意綫段。于是就有

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{PQ}\cdot\frac{PQ}{CD}=\frac{A'B'}{P'Q'}\cdot\frac{P'Q'}{C'D'}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

(証完)。

6. 我們轉到对应圖形面积的研究。先証明下面的預备定理：

从兩个对应点(A, A')到对应軸(xx)距离的比一定，与对应点的取法無关。

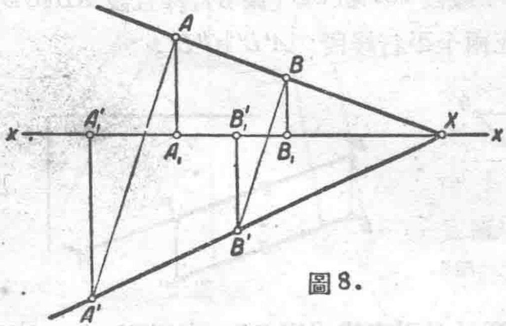

圖 8.

証明　假定点 A 和 B 对应点 A' 和 B' (圖 8)。从这些点向軸 xx 引垂綫就得到它們到軸的距离。距离总看作是正的，与垂綫的方向無关。

我們可以写出：

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AX}{BX};\ \frac{A'A'_1}{B'B'_1}=\frac{A'X}{B'X}.$$

但是由圖看出，$$\frac{AX}{BX}=\frac{A'X}{B'X},$$

所以，$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{A'A'_1}{B'B'_1},$$

或者 $$\frac{AA_1}{A'A'_1}=\frac{BB_1}{B'B'_1}=k=\text{常数}。$$

所得等式証明了前面所說的預备定理。

用 k 表示对应点距离的定比。我們来証明下面的定理。

兩个对应三角形面积的比一定，并且等于 k。

定理的証明可以分为下面三种情形：

1°. 在軸 xx 上有公共边的三角形。

圖 9 表示这样的三角形。它們面积的比可以表示成下面的形狀①：

① 在以后計算里，三角形 ABC 的面积用記号 $\triangle ABC$ 表示。

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot CC_1}{A'B'\cdot C'C_1'}=\frac{CC_1}{C'C_1'}=k.$$

2°. 在軸 xx 上有公共頂点的三角形。

圖 10 里就是这样的两个三角形。这两个三角形的对应边 BC 和 $B'C'$ 应該交于軸 xx 上(点 X)。所研究的情形归結为前面那样。事实上，根据前面所說的可以写出:

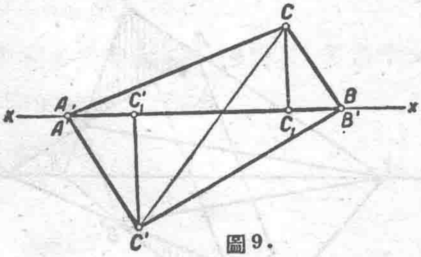

圖 9.

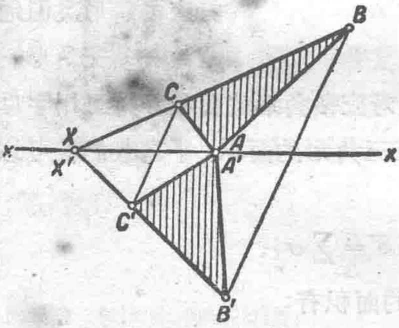

圖 10.

$$\frac{\triangle ABX}{\triangle A'B'X'}=k;$$

$$\frac{\triangle ACX}{\triangle A'C'X'}=k.$$

但是，$\triangle ABC=\triangle ABX-\triangle ACX$(面积 $\triangle A'B'C'$ 用同样方法表示)，因此有:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=k.$$

3°. 两个对应三角形的一般情形。

設在圖 11 里有两个对应三角形 ABC 和 $A'B'C'$。我們来研究这两个三角形中的一个，例如 ABC。这个三角形的面积可以表示成下面的形狀:

$$\triangle ABC=\triangle YXC-\triangle YBA-\triangle YXB.$$

这个等式右边所有的三角形都属于已研究过的两种情形。因此，应用我們証明过的定理，可以把上面的等式改写为:

$$\triangle ABC=k\cdot\triangle YXC'-k\cdot YB'A'-k\cdot\triangle YXB';$$

或: $\triangle ABC=k(\triangle YXC'-\triangle YB'A'-\triangle YXB')=k\cdot\triangle A'B'C'.$

所以，　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=k=\text{常数}$$　（証完）。

7. 我們所导出的兩个对应三角形面积的性質，很容易推广到对应多角形的情形。事实上，每个多角形可以分为許多三角形，并且多角形的面积可以用組成它的三角形的面积和来表示。把对应多角形类似地分为許多三角形。

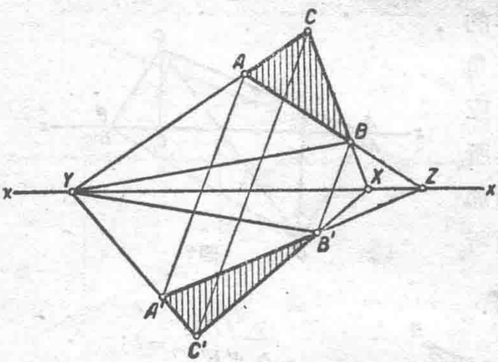

圖 11.

如果用字母 S 和 S' 来表示兩个对应多角形的面积，并且用字母 σ_i 和 σ'_i 来表示分成的兩个对应三角形的面积，于是我們就可以写成：

$$S=\sum\sigma_i;\quad S'=\sum\sigma'_i.$$

此外，因为对于对应三角形的面积有：

$$\sigma_i=k\sigma'_i,$$

于是

$$S=\sum\sigma_i=\sum k\sigma'_i=k\sum\sigma'_i=kS'.$$

这样，我們就得到：

$$\frac{S}{S'}=k=\text{常数}。$$

最后，我們可以把关于面積比的定理，推广到由任意形狀的对应曲綫圍成的兩个面積的情形。

用 Δ 和 Δ' 表示由兩个对应曲綫圍成的面积。我們画出圍成面积 Δ 的曲綫的內接多角形，并且用字母 S 表示这个多角形的面积。在內接多角形的每个边趋近于零的条件下，它的边数趋于無

限，那么得到：

$$\Delta=\lim S.$$

对于面积 Δ' 將有类似的过程：

$$\Delta'=\lim S',$$

这里 S' 表示多角形 S 所对应的多角形面积。因为在（多角形变化的）整个过程里，根据上面証明的定理，应該有

$$S=kS',$$

再变成極限就得出

$$\Delta=k\Delta'.$$

所以，

$$\frac{\Delta}{\Delta'}=k.$$

所得到的性質，可以看作是透視仿射对应的不变性質。

事实上，我們用 Δ 和 Δ_1 表示由任意形狀的兩个曲綫圍成的面积，而且用 Δ' 和 Δ_1' 表示由对应曲綫圍成的面积，于是按所証明的，就有：

$$\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\Delta_1}{\Delta_1'}=k,$$

或者，交換比例的內項：

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\Delta'}{\Delta_1'}.$$

这个等式，可以用下面的辞句表明：任意兩个面积的比在透視仿射对应下不变（是不变量）。

§ 2. 一般的仿射对应

1. 在前一节里，我們研究过兩个平面的透視仿射对应。我們已經知道，这样的对应可以利用平行射影得到。

現在我們来研究，由多次应用平行射影所構成的兩个平面的对应。譬如，在圖 12 里，把平面 ω 按直綫 l 的方向平行投射到平

面 ω' 上。再把平面 ω' 按直綫 l' 的方向平行投射到平面 ω'' 上。最后，把平面 ω'' 按直綫 l'' 的方向平行投射到平面 ω''' 上。这样，平面 ω 和 ω''' 之間就建立了一种对应，在这种对应里前一个平面的点 A, B, C 对应后一个平面的点 A''', B''', C'''。不难断定，这个对应可能不是平行射影对应，但是它同时具有透視仿射对应的不变性質。事实上，構成平面 ω 和 ω''' 間的对应是一个接連的平行射影鏈。因为每个平行射影都保持同素性与三个点的簡單比，所以平面 ω 和 ω''' 的合成对应显然也应該具有同样性質。

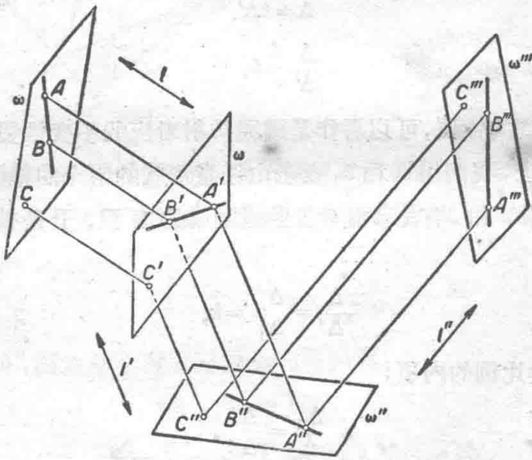

圖 12.

在透視仿射对应的情形下所研究的其他不变性質，也可以这样說。透視仿射对应不过是一种特殊情形，在这种情形下，联結对应点偶的直綫相互平行：

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \ldots$$

由于这个緣故，这样的对应才叫做透視仿射对应。

平面 ω 和 ω''' 的对应叫做仿射对应。我們是利用透視仿射变换鏈（或平行射影鏈）得到这个概念。如果用字母 P, P′, P″ 表示