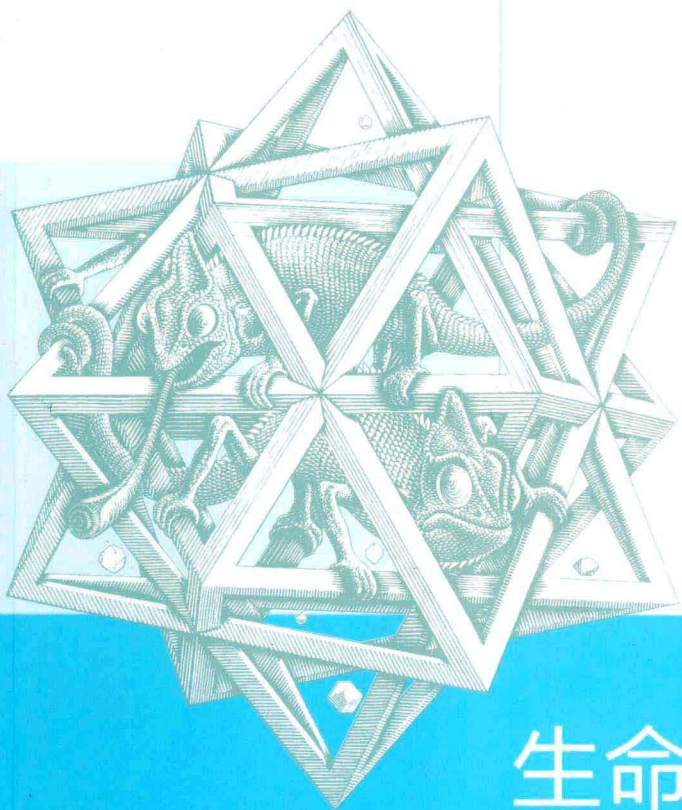


$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Panorama of Mathematics

数学概览



生命·艺术·几何

- M. 吉卡 著
- 盛立人 译
- 张小萍 刘建元 校

Panorama of Mathematics

数 学 概 论

018
54

SHENGMING YISHU JIHE

生命·艺术·几何

— M. 吉卡 著

— 盛立人 译

— 张小萍 刘建元 校



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

生命·艺术·几何 / (罗) 吉卡著 ; 盛立人译. —
北京 : 高等教育出版社, 2014. 1

(数学概览)

书名原文: The geometry of art and life

ISBN 978-7-04-035175-0

I. ①生… II. ①吉… ②盛… III. ①科学知识—普
及读物 IV. ①Z228

中国版本图书馆CIP数据核字 (2013) 第 271283 号

策划编辑 王丽萍
责任校对 杨凤玲

责任编辑 王丽萍
责任印制 韩 刚

封面设计 王凌波

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 涿州市星河印刷有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16
印 张 15
字 数 200 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2014 年 1 月第 1 版
印 次 2014 年 1 月第 1 次印刷
定 价 35.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
物 料 号 35175-00

《数学概览》编委会

主编： 严加安 季理真

编委： 丁 玖 李文林

曲安京 王善平

徐 佩 姚一隼

《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像 (CT) 深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系. 的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答. 伽利略说: “数学是上帝用来描述宇宙的语言.” 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学. 因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育.

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论. 如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支. 例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支. 老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题. 例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明. 不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹奖获得者的工作就是明证.

现代数学及其未来是那么神秘, 吸引我们不断地探索. 借用希尔伯特的一句话: “有谁不想揭开数学未来的面纱, 探索新世纪里我们这

门科学发展的前景和奥秘呢?我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标?在广阔而丰富的数学思想领域,新世纪将会带来什么样的新方法和新成就?”中国有句古话:老马识途.为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界,我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津.想象一下,如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情.这样的机会当然不多,但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养.

作为本丛书的前几卷,我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作.例如,希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期;克莱因的《数学讲座》是他在19世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的,他的报告与当时的数学前沿密切相关,对美国数学的发展起了巨大的作用;李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解;拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献,而且还是分析概率论的奠基人,他的《关于概率的哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考.这些著作历久弥新,写作风格堪称一流.我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点,良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要.

数学是一个整体,数学的各个领域从来就是不可分割的,我们要以整体的眼光看待数学的各个分支,这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来.除了大师们的经典的数学著作之外,我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版,希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域.我们选书的唯一标准就是:该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论,具有历史价值,有趣且易懂,它们应当能够激发读者学习更多的数学.

作为人类文化一部分的数学,它不仅具有科学性,并且也具有艺术性.罗素说:“数学,如果正确地看,不但拥有真理,而且也具有至高无上的美.”数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”.数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性,数学的美还表现在它内部的和谐和统一.最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美,它应该而

且能够被我们理解和欣赏. 怎么来培养数学的美感? 阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径. 我们希望这套《数学概览》译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友.

严加安、季理真

2012 年秋于北京

代译序

什么是美？

季理真 (王善平 译)

1 美之魅力

世所公认, 显而易见: 众人皆爱美物、美地和美人, 也爱谈论美. 纵观整个历史, 遍览不同文明: 有那么多的人为美而战, 为美而死. 曾几何时, 特洛伊战争因美丽的海伦而起: 古代中国几位绝代佳人曾使帝国崩溃, 内乱频生. 如今, 当你漫步昆明街头, 仍能听到美女令万里长城无用、让大明皇朝倾覆的故事. 时代的进步也许没有给人的本性带来多少变化. 我们每天听到世界各地的新闻报道: 人们为了得到美好的东西或为赢得芳心而在牺牲或毁灭自己的生命. 寻求美是人的天性. 但享受美并非是必需的, 而是奢侈的: 相比世界其他地方, 当今的中国尤其如此.

美常与真同行, 或更准确地说, 真、善、美经常三位一体. 例如, 著名的普林斯顿高级研究所使用的徽标, 上面的图案是两位女性: 一位裸体, 一位着装: 分别代表了真与美.

虽然真很重要, 并且与美关系密切: 但并没有那么多的人会为真而战、为真而死. 相应地, 大众和媒体也较少谈论真. 当然, 那些为真理献身的少数人还是被人们牢记, 受到赞颂.

然而, 什么是美? 如何认识美? 或者说, 如何辨识美? 这些是困难而复杂的问题. 显然, 不同的人对于美好的东西、美丽的脸庞和美妙的身材有着不同的标准, 但大多数人还是能够对通常一些美的事物和地方取得一致看法. 例如, 古今中外的人都认为西湖很美.



但是，如何定义美，刻画美？

上面的讨论表明，这是一个实践（或很实际）的问题，甚至是生死问题。每个人都关心这个问题，并想要找到答案。（谁不想看到美丽和英俊？）

于是，并不令人惊讶，这也成了追求终极真理的哲学所关注的问题¹。研究美的学问叫做“美学”（aesthetics），是哲学的一个重要分支。例如，美学考察美（比如说，艺术）的本质，研究人们对美和自然环境体验的特点。我因才疏学浅，虽然在大学里学了那么多的关于马克思主义的哲学课，却直到现在才开始了解美学。

历史上所有重要的哲学家都思考过关于美的基本问题。让我们来看几个例子。

在古时候，人们相信美存在于人的特定经验之外，是客观之物。

奥古斯丁（Augustine）说，事物因为美而给人带来愉快。提示美等同于快乐。

¹哲学中一些简单而重要的问题包括：我是谁？我们如何得到知识？什么是对或错？我应该做什么？生命的意义是什么？自然还包括，什么是美，为什么？

那么，什么是美？在大多数场合，美给人带来快乐：这也许成为有些人的生活意义。美总能带来快乐吗？人们是因为美所带来的快乐而想它、赞美它的吗？

让我们再引述几位哲学家的看法。

柏拉图 (Plato) 把美与对爱和欲望的反应联系在一起：但他坚持认为美是由不同部分之间确定的关系和比例 —— 比如说，黄金比例 —— 决定的。

普罗提诺 (Plotinus) 写道：“我们认为，世界上所有的‘可爱’ (loveliness) 都来自与‘理想形式’ (ideal-form) 的‘交流’ (communion) …… ‘丑陋’ 则是那些其‘模式’ (pattern) 还没有被完全掌握的事物。”他还写道：“这是美必须引起的心境：‘奇妙’和‘有趣的困难’，渴望和爱，以及完全表达愉快的颤抖。”

到了 18 世纪，这种观点开始被颠覆。

休谟 (Hume) 说：“美并不是事物本身的性质：它只存在于对事物进行思考的心灵中：每个心灵领悟到不同的美。一个人甚至可以在其他人感觉美之处看见丑陋。”

桑塔亚纳 (Santayana) 写道：“一个客观对象不可能是美的，如果它不能给任何人带来快乐的话：一个所有人始终对它无动于衷的美是一个矛盾的用词 …… 美就是快乐。”

贝克莱 (Berkeley) 写道：“每个人都知道，美就是快乐。”

美 (或关于美的观点) 的一些共同特征如下：

(1) 它是一种简单的、不可定义的性质 —— 无法用其他任何性质来定义。

(2) 它是客观对象的一种性质，可以在任一合适的领悟者中产生某种快乐的体验。

(3) 它能产生特定的快乐体验，虽然这种体验对于不同之人是不同的。

柏拉图相信，美的形式 (或本质) 是可知的、精确的、合理的、可度量的。特别是他认为，简单的几何形体、简单的色彩和音乐符号都具

有内在的美——它能在其领悟者中唤起一种纯粹的、没有任何掺杂的快乐，并且不受环境的影响。

圣·托马斯 (St. Thomas) 提出，美具备三个要素：完整（或完美），比例适当，清晰。

然而，到了 20 世纪初，美作为哲学课题的研究开始衰落。结果，在绘画、音乐和建筑领域，人们开始避免追求古典标准的美。出现了许多怪异、难看的大楼或标志性建筑——如巴黎的蓬皮杜中心 (Pompidou Centre)，它是法国国家现代艺术博物馆的所在地。那些抽象艺术，例如油画，令人感到很不舒服（或对于许多人来说，是丑陋的）：而令人感到愉快的油画作品则被认为没有任何艺术价值。

2 中国与西方美学观之比较

我翻阅了几本有名的中英文哲学入门书，其中很少有关于美的讨论。我一开始有些惊讶，后来明白，这里有两个原因：其一，美学可能属于哲学中相当专门的研究领域：如在中国著名学者/哲学家朱光潜写的更专门的书中，就有主要是关于艺术之美的论述。其二，中国的美学尚未真正形成一个独立的学科，它被淹没在艺术和文学下面的众多分支领域内的评论和理论中。

我在写本文初稿时，人还在美国，未能看到多少种关于中国美学的书。此次回到中国，在北京的书店里，以及经与几位中国朋友交谈，发现好几本论述美学、深刻而有趣的书。其中，宗白华的《美学散步》和朱光潜的《谈美》尤为精彩：道出了作者对于中国文化和中国艺术品位的深刻理解。李泽厚的《美的历程》也很有趣。西方和中国的美学有明显不同之处：在西方，人们重视直接的视觉和刺激，并经常将其作为认识和欣赏美的基础。而中国的传统文化强调对内在美的微妙培养和欣赏：所谓“意境”，一种精神或情感的境界，一直未能被西方人理解，至今依然。在某种意义上说，西方的美学观多从几何的和静态的角度出发，而中国的美学规则强调变化、动态和对比。这里举几个例子来说明。

例如，裸体女性是西方油画或古典雕塑的通常主题。而在中国的水画中，山、石的安排，弯曲的路径，以及墨迹与空白之间的对比，创造出空间的音乐和时间的流曲：人需要进入画中，才能真正体验个中三昧，从而欣赏这幅画。

再有，中国美学强调艺术之美，而非更实际的物质之美。在此意义上讲，西方的美学较为原始，因而——如许多西方哲学家所强调的——与快乐的感觉联系更多；而中国的美学则更精致（或较少物质性），因此要经过训练和指导才能发现和欣赏美。

尽管存在上述的差异，中西美学还是有许多共同之处。例如，在中国美学中，“美”实在依赖于观察者的背景和素养，以及他与所论“美物”——一棵树、一幅画、一首诗、一篇散文、或一座花园，等等——之间的联系。这在朱光潜的《谈美》书中有很好的论述。在宗白华的《美学散步》书中，对欣赏中国艺术的正确方法也作了很有趣讲述。这样的观点与现代西方的美学观是一致的，后者认为：美既非客观也非主观：准确地讲，美产生于观察者与观察物之间关联和互动的模式。我们还注意到，中国画与西方传统油画一样，也很讲究协调与几何空间的安排。

近来一些研究提示，对称与美之间存在紧密联系的一个原因是：对称的图案能更有效地传递信息，即美与低复杂性之间有关联。每个人都会选择轻松的工作和快捷的交通，而不太费神的欣赏则能给大多数的人带来较多的快乐。

3 公众眼中的美

考虑到自文明开始以来，美在每个文化中都占有相当重要的地位：所以，丝毫不奇怪的是，美一直是大众文化和大众媒体的重要内容。想想，有多少的时间和金钱花费在使人——特别是女性——看上去更漂亮！到世界各地的购物中心逛一下，就很容易证明这一点。

如上所述，定义美很困难，而精确地测量和辨别美更困难。一般的规则是：当我们看到才知道。常言说：“情人眼中出西施”（beauty lies

in the eye of the beholder).

但是,事情并非完全如此.有的人几乎被公认是漂亮的.一个例子是著名的玛丽莲·梦露(Marilyn Monroe).这些人有什么特别之处?什么使得他/她们美丽?近年来有许多关于美丽的脸庞和美丽的身材的研究.看来仍然是数学——或更准确地说,是比例——起着关键的作用.例如心理学家发现,世上的男人喜欢腰-臀比例低的女性——最佳值是0.7,这正是梦露和其他几位著名美人的比例.这些腰-臀比例,或胸-腰-臀比例,也常常(至少以某种参照方式)被用于世界各地的选美竞赛中.当然,大众媒体中的男女们也总在谈论它们.近日,我在与一位著名的数学家共进午餐时,提到比例对于参加选美比赛的女孩子们所起的作用.出乎我的意料,他立即说出了胸-腰-臀的理想尺寸.这也许并不能归因于有些数学家对数字特别敏感.

在大众文化中,描述美的最常用方法也许是通过油画、照片和数字图像.因特网的一大优点是使人们可以方便地看到各地风光和其他事物的美丽照片:不过,这也似乎让事情失去了控制.类似地,美也是在中西方大众音乐中不断出现的主题:虽然有些差异,但它们有很多共同之处.

人们经常不自觉地认为,长得好看的人具有诸如聪明、诚实的正面品性.这种聪明与长得好看之间的联系,在男人中表现得比在女人中更强.近来,有持进化论观点的心理学家提出,聪明和长得好看可能都表示人的基因健康.强调长得好看的另一个理由是,这是表明具有生育能力、健康和良好基因的特征.世上万事万物都能找到很好的解释!

4 中庸之美

中国哲学的一个重要特点是取中庸之道.无处不在的高斯正态分布(以及大数定律)也表明,中庸是最佳选择.近日研究的另一个发现是,有着平均数据的外表比有着出众数据的外表更吸引人.例如,用德国小姐竞赛参加者的脸部平均数据合成的一张脸,被认为比竞赛获胜

者的脸更漂亮。

如前所述，人们常常把美与对称联系在一起，特别是对于那些受西方美学观点影响的人来说。一张漂亮的脸必然具有一定的对称性——面部对称。然而，太多的对称并不一定会使事物更漂亮、更迷人。例如，最漂亮的脸当然不会是很圆的脸（请注意，最具对称性的二维有界图形是圆）：人的身材——特别是肚子——如果像一个球形，肯定不会被大多数人认为是美的（当然，从美观的角度，身材保持适当的圆形是自然而必需的）。一个困难的问题是，需要多少对称性才能使脸变得漂亮？还有一个稍微不同的问题是，什么使脸变得迷人？（当然，这就产生了关于“漂亮”和“迷人”之间异同的问题。）在这种情况下，某种对称破缺也许能帮上忙。人们会想起在著名人气歌手麦当娜的漂亮脸蛋上，那颗非对称的胎记。

中庸之道的可行之处也许在于避免了会产生不平衡或非和谐的极端情况：而且，稍许不对称带来了变化，避免了单调，从而使美更吸引人。

5 数学之美

近来，科学家借助于强大的计算机开发出脸部识别技术，并用它来理解什么使脸变得漂亮。答案似乎是一系列数字之间的比例：如两眼之间的距离，鼻子的大小，眼睛的大小，耳朵的长度和两耳之间的距离，等等。所以看来，在对漂亮的脸形成一致看法的背后，有一定的数学依据：也就是说，美在某种程度上是有普遍性和客观性的。这也能说明这样一种观察现象：婴儿对漂亮的脸注视的时间更长。我们可将此事当作是一个客观公正的判断，因为婴儿尚未被这个世界感染，或者说，还没有受到大人们所珍视之物的影响。

尽管精确的数学能提供美的理由，但指出这一点也很有益：人们通常不相信根据（作为数学标志的）推理得到的美。例如，没有一个具有正常感觉的人会站在一幅画前，经过长时间的分析推理，宣称这幅画是美丽的并且他从中得到了快乐。相同的情况还有：与人见面，以及两

人一见钟情的现象。一个热恋中的女孩有时会问她的男友：为什么他会喜欢她？（或反过来，男孩问女孩。）这个问题往往不太好回答。以上的简短分析表明，这种问题严格来说并不是一个好问题（或者说，问题提法不好），因为可能得不到合乎逻辑的回答。爱与推理并不常在一起，正如美与推理也不常在一起。

虽然比例与几何图案的协调为美提供了某种坚实的基础，但人们通常还是认为美依赖于时代和文化。这很容易从近一千年来关于美人的著名绘画（特别是西方的半裸人物绘画）作品中看出。例如，现在瘦削的身材很流行，但在以前并不是这样。（想想中国唐代的画或 17 世纪鲁本斯 (Paul Peter Rubens) 的画。)

数学家常常谈论数学之美。他们赞美漂亮的概念、漂亮的证明、漂亮的理论以至漂亮的发现。数学以及科学中的许多理论和成果都受到了美的驱动。一位数学家给另一位数学家的最高赞扬就是，“这是一个漂亮的定理”，“这是一次漂亮的报告”，或“这篇文章/这本书写得真漂亮”。

然而，这些意味着什么？什么是数学之美？即使在这个讲究精确的场合，人们也很难定义它们。在数学家中，即使是大数学家，对于数学之美的特点一直有许多讨论。除了对一些通常的特点——如出乎意料的联系、简单性、非平凡性（或深度），他们之间的观点往往不同，甚至对立。但有一件事似乎很清楚：所有这些漂亮的东西给数学家带来了快乐和满足。也许每位数学家都可以证实，当他们理解或发现了某些结果或概念时所得到的满足感。

在此引用爱因斯坦讲关于科学工作之快乐的一段话也许很合适：“有许多人所以爱好科学，是因为科学给他们以超乎常人的智力上的快感，科学是他们自己的特殊娱乐，他们在这种娱乐中寻求生动活泼的经验和对他们自己雄心壮志的满足。”

所以说，美与快乐之间的等式——或许要加一个小修正项——在数学中也成立！这个可能的修正项是罗素 (Bertrand Russell) 在其自传中所写：“现在对于我来说，数学似乎能达到任何音乐所能达到的艺

术上之卓越,或许还要超过:并不是由于它所给予(虽然非常纯粹)的快乐,无论在强度或在感受人的数量上,堪与音乐相比:而是由于它给予了一种绝对的完美,这种完美把神一般的自由与不可避免的命运感觉结合在一起——这是伟大艺术的特征.因为,它构造了一个理想的世界,其中任何事物都是完美的——除了真实性.”

然而,美是经常等同于真和完美的.所以,这一修正可能终究不能成为修正.

6 本书有何特色

由马提拉·吉卡 (Matila Ghyka) 写的这本书《生命·艺术·几何》,试图按照古典的美学观点——特别是柏拉图的观点,来解释并表达隐藏在自然之美、生物之美以及人类艺术作品之美背后的数学原理——或更准确地说,几何原理.

如前所述,柏拉图强调预先存在一个比例体系:特别是包括了黄金比例、和谐组成以及诸如正多面体的结构.实际上,对于柏拉图来说,比例 (proportion) 不仅蕴含了人体或古典建筑各部分之间确定的比例,还包括各部分与整体之间的一致性、协调性与平衡性.

由于美往往更多地与视觉经验有关,所以本书强调了其几何学的方面,尽管柏拉图的美学观点源自毕达哥拉斯 (Pythagoras) 关于音乐和谐的理念——其中数起着基本作用,因为毕达哥拉斯声称:“万物皆数”.

隐藏在美背后的客观原因可归结为“对称性” (symmetry). 在此意义上,本书的书名改用《艺术与生命中的对称性》也许更合适.

柏拉图的观点对西方的哲学和艺术有很大的影响.例如,亚里士多德曾经说:“美的主要形式是秩序、对称性和明确性,数学在特殊的程度上证明了这些形式.”

古罗马建筑师维特鲁威 (Vitruvius) 很好地总结了这种关于美和对称的古典观念:

“秩序就是分别对工程的细节部分进行平衡调整，从而在整体上安排比例适当，以产生对称性的视觉结果。

比例蕴涵优美的外表：细节部分在各自的背景下适当地展现。它的获得来自使工程的细节部分的高度与其宽度相适合，宽度与其长度相适合：总之，使每部分都具有对称的相关性。

对称性也来自于工程本身细节部分适当的协调性：每一给定细节与作为整体的设计形式之间的相关：如人体，从肘、足、掌、身高取得协调的对称性质。”

吉卡的这本书从基本概念出发，包含了许多插图，还有不少包含真知灼见或具有哲学意义的评述。例如，看似简单的比例概念其实并不简单。第一章讲述空间和时间的比例：其中不仅有数学，还包括了关于比例及相关概念历史的精彩评述。例如，它以三种不同的方式定义了“韵律” (rhythm)。当你读完了只有 6 页的第一章，就可能对比例有了与以前不同的看法。第二章以数学的严格性介绍了黄金比例，用大量的篇幅介绍它的来源，并用许多简单但不平凡的插图来演示它。当然，其中也包含了历史背景介绍，并辅之以令人获教益、机智的评述。

对于本书的其他部分，我们可以给予同样的评论。你可以看到一些熟悉的事物，并且也能感到惊奇。它给出了关于几何学、生物器官、自然界和建筑物中对称性和比例，相当全面的介绍。特别有价值的是其关于古典建筑中对称性应用的讨论。

这本书读之令人感到愉快，从中可以学到许多知识。它在古典艺术、建筑和生物学的背景之下，以对称性 (或美) 为关键概念，熟练地编织出一张综合历史、哲学、数学和科学的知识之网。不像近来出现的一些介绍对称性的科普书，其中含有大量的水分，或者说，太大众化了：本书包含了实实在在的知识。例如，除了描写在自然界和生物中观察到的对称性现象，它还解释了为什么这种对称性会存在。我们需要慢慢地读这本书，品味其中的妙处。令人惊讶的是，这本文仅 174 页