21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE XITIJI

高等数学习题集

（上册）

余世成◎主编

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE XITIJI

高等数学习题集

（上册）

余世成◎主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题集. 上册/余世成主编. —北京：中国人民大学出版社，2013.9
21世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-18078-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①余… Ⅲ.①高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第215482号

21世纪高等院校创新教材
高等数学习题集（上册）
余世成 主编
Gaodeng Shuxue Xitiji

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京民族印务有限责任公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16开本	**版　　次**	2013年9月第1版
印　　张	12.25插页1	**印　　次**	2013年9月第1次印刷
字　　数	286 000	**定　　价**	30.00元

前　言

本书是根据三本院校学生学习高等数学的实际情况编写的一本学习指导书。高等数学是众多专业课程的基础，其工具性尽人皆知，编写此书的目的是希望学生能更好地掌握高等数学的知识，同时理解高等数学思想的精髓，为后续专业课打下良好的基础。

全书分为上下两册，共十二章，其中上册七章，下册五章。每章包括以下几个方面的内容：

1. 学习要求与内容提要：结合教学大纲及编者多年的教学经验，列出了本章的学习要求。学习要求按考试要求分为了解、理解、掌握和熟练掌握四个层次，以便学生了解各知识点的掌握程度；同时对本章的主要内容按照基本概念、重要结论、方法与技巧等方面进行归纳总结，便于学生查找复习。

2. 疑难解答：根据编者多年经验，对容易混淆、难以掌握的知识点进行解答，突出重点、难点，深化理解，拓宽知识面。

3. 典型例题分析：总结本节的典型例题，并给出详细的分析和解答，供教师教学和学生课后复习时参考。

4. 每节选编习题：是教材习题的一个补充，习题量可以满足学习高等数学所必需的练习要求。

5. 模拟试题：在本书最后编者提供了几套各个层次的模拟试题，以供学生期末复习使用。

该习题集在编写的时候已经考虑到了三本院校各个层次学生学习的需要，学生在使用本书的时候可以根据本专业的要求学习相应部分的内容，建议教师在教学的时候为学生明确指出。

本书由余世成、苗加庆统稿，参与编写的有：余世成、徐广顺、马志民、韩红伟、张玉琴、宋丽丽、田琳、杨卓东、李密、马致远、苗加庆、冯向东、熊良鹏、黄长春、赵艳丽、张建亮、张红霞、王志龙、秦雨萍、李明鉴、郭仲三、罗绍锡、杨世坤、詹小平、太文龙。

本书在编写过程中，获得了成都理工大学工程技术学院基础部杨志军部长的大力支持和帮助，也获得了教务处相关部门领导、老师的支持，在这里表示感谢。

由于编者水平有限，对书中的不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编者

2013 年 6 月

目　录

第一章

函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，极限是微积分的理论基础，因此，熟练地掌握函数和极限是学好高等数学的关键.

学习要求与内容提要

学习要求

教学目的：

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性，会判断函数的奇偶性.
3. 熟练掌握复合函数的复合过程，掌握基本初等函数的性质及图形.
4. 掌握极限四则运算与复合运算.
5. 熟练掌握运用两个重要极限公式求极限.
6. 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系和性质，熟练掌握利用等价无穷小求极限.
7. 理解函数在一点连续的概念，知道间断点的分类，会用函数的连续性求极限，了解初等函数的连续性及连续函数在闭区间上的性质.

重点：

1. 函数的概念，复合函数和初等函数的概念.
2. 两个重要极限，等价无穷小代换定理.
3. 连续的定义，间断点.

难点：

1. 分段函数在分界点的连续性.
2. 间断点的分类.

内容提要

1. 函数的定义域：使函数的解析式有意义的所有点构成的集合.
2. 分段函数：自变量属于不同数集时函数的解析式用不同的表达式给出的函数，如
$$f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi \end{cases}.$$
3. 复合函数：设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，若 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交

集非空，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数. 例如，$y=\arcsin(1-x^2)$ 可看成由 $y=\arcsin u$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成.

4. 隐函数：函数关系没有明确地写成 $y=f(x)$，而是隐藏在方程 $F(x, y)=0$ 中的函数，如 $x\sin y+y^2=0$.

5. 基本初等函数：常量函数、幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数.

6. 初等函数：由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算与有限次的复合，且能用一个解析式表示的函数.

7. 函数的特性：有界性，单调性，奇偶性，周期性.

8. 数列极限的性质：

(1) 如果数列收敛，则极限唯一；

(2) 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 必有界；

(3)（夹逼定理）设 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$；

(4) 单调有界数列必有极限.

9. $x\to\infty$ 时函数的极限：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

10. $x\to x_0$ 时函数的极限：

(1) 单侧极限：

若当自变量 x 从 x_0 的左侧不断地向 x_0 靠近时，函数 $f(x)$ 的函数值与常数 A 无限接近，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

若当自变量 x 从 x_0 的右侧不断地向 x_0 靠近时，函数 $f(x)$ 的函数值与常数 A 无限接近，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(2) 极限与单侧极限的关系：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在且相等.

11. 两个重要极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin wx}{wx}=\lim_{x\to0}\frac{wx}{\sin wx}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

12. 无穷小：

(1) 定义：极限为零的函数称为无穷小.

(2) 性质：有限个无穷小的代数和是无穷小；

有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3) 无穷小的比较：设 $\lim\alpha=\lim\beta=0$ 且 $\beta\neq0$，

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小；

特别的，若 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 是 β 的等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$；

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta^k}=A\neq 0$ 且 $k>0$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

(4) 等价无穷小代换定理：设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$存在，则 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

注：使用等价无穷小代换定理时，只能是整个分子、分母或者分子与分母的乘积因子代以相应的等价无穷小，若是几个无穷小的代数和，则不能盲目地代入.

13. 无穷大与无穷小的关系：

(1) 若 $\lim f(x)=\infty$，则 $\lim \frac{1}{f(x)}=0$；

(2) 若 $\lim f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim \frac{1}{f(x)}=\infty$.

14. 连续的定义：

(1) 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

15. 左右连续：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域（右邻域）有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$），则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续（右连续）.

16. 连续与左右连续的关系：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

17. 第一类间断点：左右极限都存在的间断点称为第一类间断点.

(1) 左右极限都存在且相等的间断点称为可去间断点；

(2) 左右极限都存在但不相等的间断点称为跳跃间断点.

18. 第二类间断点：除了第一类间断点以外的其余间断点统称为第二类间断点，其中极限为无穷大的间断点称为无穷间断点.

19. 初等函数的连续性：一切初等函数在其有定义的区间内都是连续的.

疑难解答

问题 1： 分段函数是初等函数吗？

解　分段函数一般不是初等函数，不同区间上其解析式不相同，即它不能用一个解析式来表示，所以说分段函数一般不是初等函数. 但是，也有特殊情况，如 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x\leqslant 0 \end{cases}$，它与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数，故 $f(x)$ 可以用一个解析式表示，从而这里的分段函数 $f(x)$ 是一个初等函数.

问题 2： 两个无穷大之和还是无穷大吗？

解　不一定. 例如，x 是 $x\to+\infty$ 时的无穷大量，$1-x$ 也是 $x\to+\infty$ 时的无穷大量，但其和为 1，不是无穷大量.

问题 3： 无穷大量与无界量有什么区别和联系？

解 区别：(1) 无穷大量是在某变化过程中的一个变量：$\forall M>0$，$\exists$某时刻，若此时刻后，有$|f(x)|>M$，则称$f(x)$在该过程中是无穷大量. 即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty \Longleftrightarrow \forall M>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|>M$.

(2) 无界量是针对某数集而言：若$\forall M>0$，$\exists x_0\in X$，使得$|f(x_0)|>M$，则称$f(x)$在数集X上无界.

联系：无穷大量是一种特殊的无界变量，而无界量不一定是无穷大量.

问题 4： 在利用等价无穷小代换求极限时，一般都强调对无穷小因子进行等价代换，而对含有加、减项的无穷小一般不能随便代换，为什么？

解 等价无穷小代换的原理是：在自变量的某变化过程中，若$f(x)\sim g(x)$，则$\lim\dfrac{f(x)}{h(x)}=\lim\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot\dfrac{g(x)}{h(x)}\right)=\lim\dfrac{g(x)}{h(x)}$. 从而可对因子（即乘积部分）进行等价无穷小代换，但不能随意扩大到加、减项. 例如，在某过程中，若$f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，$\lim\dfrac{f\pm g}{h}=\lim\dfrac{f_1\pm g_1}{h}$一般不成立，其原因在于此时一般不能保证$f\pm g\sim f_1\pm g_1$成立，因而，不符合等价代换原理. 例如，在$x\to 0$时，虽然$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，但$\tan x-\sin x$与$x-x$不等价，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$是错误的运算.

问题 5： 函数在一点x_0处有定义、存在极限、连续这三个概念之间的关系是怎样的？

解 (1) 函数$f(x)$在点x_0处有定义，不一定在该点存在极限，更不一定连续；(2) $f(x)$在点x_0处存在极限，但在点x_0处不一定有定义，也不一定连续；(3)若$f(x)$在点x_0处连续，则$f(x)$在点x_0处既有极限又有定义，而且极限值等于函数值.

问题 6： 怎样理解函数的间断点及其分类？

解 函数的间断点是以否定连续性来定义的. 要讨论点x_0是不是$f(x)$的间断点，首先，看$f(x_0)$是否存在，若$f(x)$在点x_0处无定义，则说明点x_0是$f(x)$的间断点；其次，看$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在，若不存在，则也说明点$x_0$是$f(x)$的间断点；最后，看$f(x_0)$是否等于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，如果不相等，则仍说明点$x_0$是$f(x)$的间断点. 间断点是根据$f(x)$在点$x_0$处的左、右极限的不同情况进行分类的：左、右极限都存在且相等的间断点称为第一类间断点. 其中左、右极限存在且相等的间断点称为可去间断点. 左、右极限存在但不相等的间断点称为跳跃间断点，此时$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$，因而，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在. 第一类间断点以外的间断点称为第二类间断点，即左、右极限至少有一个不存在的间断点，其中包括无穷间断点（此时$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$）、振荡间断点.

§1.1 函　　数

一、典型例题分析

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$;

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

解 (1) 由所给函数知，要使函数 y 有定义，必须满足偶次根式的被开方式大于等于零且对数函数符号内的式子为正，于是

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi, n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\end{cases}$$

这两个不等式的公共解为 $-4\leqslant x<-\pi$ 或 $0<x<\pi$，所以函数的定义域为 $[-4,\ -\pi)\cup(0,\ \pi)$.

(2) 由所给函数知，要使函数有定义，必须分母不为零且偶次根式的被开方式非负；此外，反正弦函数符号内的式子绝对值小于等于 1，于是

$$\begin{cases}3-x^2>0\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{cases},$$

即 $0\leqslant x<\sqrt{3}$. 因此，所给函数的定义域为 $[0,\ \sqrt{3})$.

例 2 判断函数 $f(x)=(\sqrt{x})^2$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同.

解 要判断两个函数是否相同，需要比较它们的定义域、值域以及对应法则是否相同. $f(x)$ 的定义域是 $[0,\ +\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，两者不相同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

例 3 证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,\ +\infty)$ 内是单调增加的函数.

证 在 $(-1,\ +\infty)$ 内任取两点 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 x_1，x_2 是 $(-1,\ +\infty)$ 内任意两点，所以 $1+x_1>0$，$1+x_2>0$.
又因为 $x_1-x_2<0$ 故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,\ +\infty)$ 内是单调增加的.

例 4 判断函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$ 的奇偶性.

解 因为函数的定义域关于原点对称，且

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^x}{1+e^x}\left[-\ln\frac{1-x}{1+x}\right]=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x).$$

故由定义知 $f(x)$ 为偶函数.

例 5 分析复合函数 $y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 的复合过程.

解 最外层是二次方，即 $y=u^2$，次外层是正弦函数，即 $u=\sin v$，从外向里第三层是幂函数，即 $v=w^{-\frac{1}{2}}$，最里层是多项式，即 $w=x^2+1$. 所以该复合函数是由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{-\frac{1}{2}}$，$w=x^2+1$ 复合而成.

例 6 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$.

例 7 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由于 $f(x)=e^{x^2}$，所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$，根据题设知 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，故 $[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$，因为 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，由 $\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases}$，得函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

二、习题

习题 1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；

(2) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\arccos(1-x)$；

(4) $y=e^{\frac{1}{x}}$；

(5) $y=\ln(1+x)$；

(6) $y=\arcsin(2x+3)+\arctan x$；

(7) $y=\frac{1}{\ln(2x+3)}+\sqrt{x+2}$.

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2, 4]$，求 $f(1+x^2)$ 的定义域.

3. 判断下列各对函数是否相同：

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$，$g(x)=x-1$.

4. 判断函数 $y=x+\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x\sin x$；

(2) $f(x)=\sin x-\cos x$；

(3) $f(x)=3x^2-x^3$；

(4) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$；

(5) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(6) $f(x)=x^2+\ln\frac{1-x}{2+x}$.

6. 分析下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$；

(2) $y=e^{\arctan x^2}$；

(3) $y=\cos^2\ln(2+x)$；

(4) $y=\sqrt[3]{\arctan\cos e^{2x}}$；

(5) $y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$.

7. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$，求 $f(x)$.

8. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

9. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

10. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sin\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2$，$|x|>1$，求 $f(x)$.

习题 2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt[3]{2x+1}+\arctan\frac{1}{x}$；　　(2) $y=\ln\frac{x+1}{x^2}+\arcsin(1-2x)$；

(3) $y=(|x|-\sqrt{x^2})\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；　　(4) $y=\tan(x+1)+\sin\sqrt{x}$；

(5) $y=\arccos\ln x+\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

2. 判断下列各对函数是否相同：

(1) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，$g(x)=\sin x$；　　(2) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(2) $y=x\frac{a^x-1}{a^x+1}\,(a>0,\ a\neq1)$.

4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，则函数 $f(x)-f(-x)$ 的图形关于______对称.

5. 设 $f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$，求 $f(x)$.

6. 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(-\frac{1}{x}\right)=\sin x$，其中 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

§1.2　数列的极限

一、典型例题分析

例 1　根据数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

分析：要使 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon$，只需 $n>\frac{a^2}{\varepsilon}$.

证　对$\forall \varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]\in Z^+$，使得当$n>N$时，恒有$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

例 2　根据数列极限的定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

分析：要使$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|=\frac{2^n}{n!}=2\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n}<\frac{4}{n}<\varepsilon$，只需$n>\frac{4}{\varepsilon}$.

证　对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]\in Z^+$，使得当$n>N$时，恒有$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

二、习题

1. 观察一般项x_n如下的数列$\{x_n\}$的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$；　　(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；

(3) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$；　　(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$；

(5) $x_n=(-1)^n n$.

2. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：当数列$\{|x_n|\}$有极限时，数列$\{x_n\}$未必有极限.

§1.3　函数的极限

一、典型例题分析

例 1　用极限的定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{-1}{x^2}}=1$.

分析：首先，当$x\to\infty$时，$\left|e^{\frac{-1}{x^2}}-1\right|=1-e^{\frac{-1}{x^2}}$，要使$\left|e^{\frac{-1}{x^2}}-1\right|=1-e^{\frac{-1}{x^2}}<\varepsilon$，则两边取对数化简得$|x|>\frac{1}{|\ln(1-\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}}$，因此只需取$X=\frac{1}{|\ln(1-\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}}$.

证　对$\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\frac{1}{|\ln(1-\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}}\in R^+$，使得当$|x|>X$时，恒有$|x|>\frac{1}{|\ln(1-\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}}$，即$\left|e^{\frac{-1}{x^2}}-1\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{-1}{x^2}}=1$.

例 2　用极限的定义证明$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

分析：要使$\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\varepsilon$，只需取$\delta=\varepsilon$.

证　对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，使得当$0<|x-0|<\delta$，有$|x|<\varepsilon$，因此恒有$\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

例 3　设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+\sin 2x, & x\geqslant 0\end{cases}$在$x=0$处的极限存在，求$a$的值.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+\sin 2x)=a$，并且$f(x)$在$x=0$处的极限存在，故$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，即$a=1$.

二、习题

1. 当$x\to\infty$时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$，问$X$等于多少，可使得当$|x|>X$时，$|y-1|<0.01$?

2. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{x+1}=-1$.

3. 当$x\to 2$时，$y=x^2\to 4$，问δ等于多少，可使得当$|x-2|<\delta$时，$|y-4|<0.001$?

4. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；　　(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$；

(5) $\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$.

5. 求当$x\to 0$时$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$的左、右极限，并说明它们在$x\to 0$时的极限是否存在.

6. 设$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

7. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$，讨论$f(x)$在$x\to 0$，$x\to 1$以及$x\to\infty$时的极限.

8. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1}(a>0), & -1<x<0\\ \dfrac{(m-1)x-m}{x^2-x-1}(m\neq 0), & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，问$a$为何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在?

§1.4 无穷小与无穷大

一、典型例题分析

例 1 函数 $y=x\sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是否有界？该函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大？

解 取 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$y_n=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，则对 $\forall M>0$，取 $n_0=[M]+1$，由于 $x_{n_0}=2n_0\pi+\frac{\pi}{2}\in(0, +\infty)$，$y_{n_0}=2n_0\pi+\frac{\pi}{2}>M$，所以 $y=x\sin x$ 是无界的.

下面取 $x_n=2n\pi$，则 $y_n=0$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n=2n\pi\to+\infty$，但 $y_n\to0$，故当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=x\sin x$ 不是无穷大.

二、习题

1. 判断题：

(1) 非常小的数是无穷小；

(2) 零是无穷小；

(3) 无穷小是一个函数；

(4) 两个无穷大的和一定是无穷大.

2. 下列函数在指定的变化过程中，(　　) 是无穷小量.

(A) $e^{\frac{1}{x}}$，$x\to\infty$　　　　(B) $\frac{1}{x^2+2x}$，$x\to\infty$

(C) $\ln(1+x)$，$x\to1$　　　　(D) e^x，$x\to+\infty$

3. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x-1)=+\infty(a>1)$.

4. 求下列极限并说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1-x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-4}{x-2}$.

5. 判断 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$ 是否存在，若将极限过程改为 $x\to0$ 呢？

§1.5 极限运算法则

一、典型例题分析

例 1 讨论极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ 是否存在.

解 $x\to+\infty$ 时，$\sin\sqrt{x+1}$ 与 $\sin\sqrt{x}$ 的极限均不存在，但不能认为它们差的极限也不存

在，这时应先用三角公式进行变形：

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0.$$

最后这一步用了“有界量与无穷小的乘积为无穷小”的结论.

例 2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-4)^n}{2^{n+1}+(-4)^{n+1}}$.

解 因为$(-4)^{n+1}$的绝对值最大，因此分子、分母同除以$(-4)^{n+1}$，于是

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^n}{(-4)^{n+1}}+\dfrac{(-4)^n}{(-4)^{n+1}}}{\dfrac{2^{n+1}}{(-4)^{n+1}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(-1)^{n+1}+\dfrac{1}{-4}}{\left(\dfrac{2}{-4}\right)^{n+1}+1}=-\frac{1}{4}.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$.

解 因为分子最高次项的次数为$2\times3+4=10$，分母最高次项的次数为$2\times5=10$，分子、分母最高次项的次数相等，故原极限等于分子、分母最高次项的系数之比，分子最高次项的系数为$4^3\cdot3^4$，分母最高次项的系数为6^5，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}=\frac{4^3\cdot3^4}{6^5}=\frac{2}{3}.$$

例 4 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求$a$，$b$的值.

解 因$\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\dfrac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}}=2,$$

故$\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2\end{cases}$，解得$a=25$，$b=20$.

例 5 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$.

解 因为$\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]$，所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$