

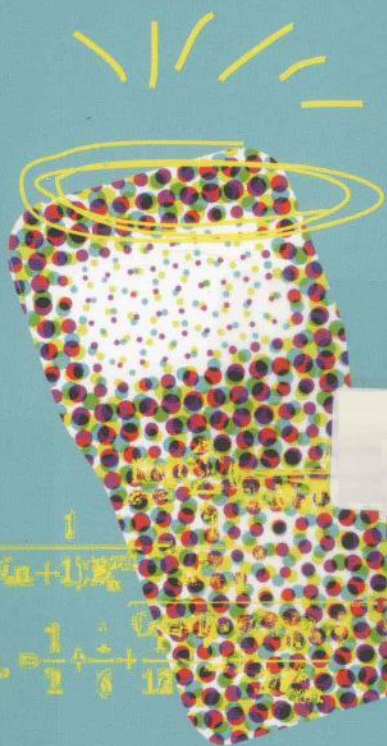
福州教育研究院 / 编

林风 黄炳锋 / 著

福州市中学数学「林风名师工作室」成果集

『图解数学』

数学教学新视角



$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

福州名师工作室文丛

“图”解数学

数学教学新视角

福州教育研究院 / 编 林风 黄炳锋 / 著

图书在版编目 (CIP) 数据

“图”解数学：数学教学新视角/林风，黄炳峰著. —福州：
福建教育出版社，2013.7
ISBN 978-7-5334-6071-6

I. ①图… II. ①林… ②黄… III. ①数学教学—教
学研究 IV. ①01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 079628 号

福州名师工作室文丛

“图”解数学

——数学教学新视角

林风 黄炳峰 著

出版发行 海峡出版发行集团

福建教育出版社

(福州梦山路 27 号 邮编：350001 电话：0591—83706771

83733693 传真：83726980 网址：www.fep.com.cn)

出版人 黄旭

发行热线 0591—87115073 83752790

印刷 福建省天一屏山印务有限公司

(福州铜盘路 278 号 邮编：350003)

开本 720 毫米×1000 毫米 1/16

印张 16.25

字数 253 千

版次 2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-5334-6071-6

定价 32.00 元

如发现本书印装质量问题，影响阅读，

请向本社出版科（电话：0591—83726019）调换。

前 言

《普通高中数学课程标准（实验）》指出，现代信息技术的发展对数学教育的价值、目标、内容以及学与教的方式产生了重大的影响。数学课程的设计与实施应重视运用现代信息技术，特别要充分考虑到计算器、计算机对数学学习内容和方式的影响，大力开发并为学生提供更为丰富的学习资源，把现代信息技术作为学生学习数学和解决问题的强有力工具，致力于改变学生的学习方式，使学生乐意并有更多的精力投入到现实的、探索性的数学活动中。2010年教育部修订的教育行业标准（JY/T 0406-2010）中首次将手持图形计算器列入高中理科教学仪器配备标准。图形计算器作为计算器的高端产品（本书以 TI-Nspire cx-c CAS 为例），成为一种有效的教学辅助工具，拥有强大的数据处理功能、函数功能、图形功能、动画功能、编程功能和进行一些数理实验的功能。它可以用数字、解析、图形和程序等多种方式表示各种数学对象，具有很好的交互性。特有的 CAS（代数操作系统）提供了包括数式、字母以及矩阵、微积分等运算，充分体现了数学的多元关联、动态演变、数形结合、多种变化的特点。图形计算器以优异的技术、鲜明的数学特点、小巧玲珑的外形、精美流畅的画面、方便易学的按键操作以及中文显示方式为数学学习提供了一种直观、自主、交互的学习环境和真实体验。图形计算器能够即时收集、反馈、诊断、评价教学效能，是既能学习知识，又能激发创新思维的优秀平台和手段，因此它受到越来越多数学教师的关注，成为数学教学的新热点和新视角。

本书是笔者几年来开展图形计算器支持下的数学探究教学的经验和体会，浓缩了大量实践和思考，通过丰富多彩的课例详尽阐述了图形计算器的使用方法、应用范围和变通之道，内容广泛、形式多样、新意迭出，充分展示了图形计算器在数学知识呈现、数学实验活动、数学探究学习等方面的强大功能，体现数学既是一门科学，也是一种技术的时代特点，本书的研究篇收集了笔者近年来在图形计算器应用上的教学研究成果，数学本质、数学文化、数学技术、数学价值交汇贯通，汇经验与思考于一集，融教学与教研于一体，彰显数学教学与科技同发展，教学与时代共进步的鲜明特征，贯穿其间的是笔者旺盛的学习热情和激荡的创新渴望。

福建省福州市第三中学 林风

目 录

第一章 操作篇

第一节 命令操作指南

1.1	complete (配方)	3
	——精彩案例: 求二元函数的最小值	
1.2	factor, cFactor (因式分解)	5
	——精彩案例: 利用 factor 证明一个完全平方式问题	
1.3	Define (自定义函数)	6
	——精彩案例: 周期函数的求值问题	
1.4	piecewise, when (分段函数)	9
	——精彩案例: 公交汽车的票价问题	
1.5	count (计数), countIf (条件计数)	12
	——精彩案例: 数列的大小比较	
1.6	solve (解方程、解方程组、解不等式)	14
	——精彩案例: 利用 solve 解高考题	
1.7	zeros (零点)	17
	——精彩案例: 一道竞赛题的快解	
1.8	fMax (最大值), fMin (最小值)	20
	——精彩案例: 利用 fMin 求三角形面积的最小值	

1.9	tCollect (合并化简)	23
	——精彩案例: 三角函数性质的讨论	
1.10	tExpand (展开)	25
	——精彩案例: $\tan k\alpha$ 展开式构成的“正切三角形”	
1.11	sum (求和), sumIf (条件求和)	27
	——精彩案例: 高考数列求和问题的求解	
1.12	seq (数列)	29
	——精彩案例: 取整方程的整数解的讨论	
1.13	seqGen (递推数列)	33
	——精彩案例: 递推数列在概率中的应用	
1.14	limit (极限)	36
	——精彩案例: 莱布尼茨三角形中的数列极限	
1.15	derivative (导数)	39
	——精彩案例: 曲线的切线问题	
1.16	integral (定积分)	42
	——精彩案例: 阿基米德螺线与等差数列	
1.17	nCr (组合), nPr (排列)	44
	——精彩案例: 一道求组合数前 n 项和的高考题的解法探究	
1.18	rand (随机数), randInt (随机整数)	47
	——精彩案例: 概率模拟实验	

第二节 程序使用指南

2.1	赋值语句, 输入语句, 输出语句	51
	——精彩案例: 计算半期考平均分	
2.2	条件语句	54
	——精彩案例: 行李托运费用的计算	
2.3	循环语句	57
	——精彩案例: 奇怪的约分	
2.4	自定义函数	60
	——精彩案例: 用自定义函数画椭圆及其内部整点	

第三节 菜单操作指南

3.1 矩阵	65
——精彩案例：选餐问题的求解	
3.2 摘要图（条形图，饼图）	69
——精彩案例：添加摘要列表作对比条形图	
3.3 圆点图，箱型图，柱状图（快速绘图）	73
——精彩案例：二项分布的频率分布直方图	
3.4 单变量统计与双变量统计	78
——精彩案例：数学与物理到底有没有关系	
3.5 线性回归	82
——精彩案例：用线性回归方程进行预测	
3.6 数据捕获	86
——精彩案例：捕获静止数据建立拟合函数	
3.7 独立性检验（ χ^2 检验）	92
——精彩案例：休闲方式与性别	

第二章 课例篇

第一节 函数模型的应用实例	99
第二节 （整数值）随机数的产生	109
第三节 数列的性质研究	115
第四节 一元二次不等式及其解法	121
第五节 三次函数的图象与性质	129

第三章 研究篇

第一节 “掌”握数学的利器——TI 图形计算器	141
第二节 TI-Nspire 手持技术支持下的数学实验	147
第三节 基于教学实效性的数学课堂探究活动	157

第四节	基于图形计算器开展数学实验的实践与思考	165
第五节	“TI”支持下数学探究的四个特点	173
第六节	新技术背景下数学教学的新视角、新启示	181
第七节	曲线拟合教学要有三个突破	192
第八节	散点图的功能与应用的再认识	200
第九节	图形计算器处理数列问题的特点与优势	208
第十节	一类定值条件下轨迹问题的探究实验	216
第十一节	图形计算器背景下的数据处理方法	225
第十二节	利用图形计算器化解轨迹教学之难	234
第十三节	TI-Nspire™图形计算器与 TI-Navigator™无线导航系统对教学的影响	241

第一章

—— 操作篇 ——

第一节 命令操作指南

□1.1 complete (配方)

命令格式

completeSquare (表达式或方程, 变量)

completeSquare (表达式或方程, 变量^幂)

completeSquare (表达式或方程, 变量1, 变量2[, ...])

应用举例

回答下列问题: (1) 求抛物线 $y = 3x^2 - 4x + 5$ 的对称轴. (2) 求圆 $x^2 + y^2 - 2.3x + 4.4y - 26 = 0$ 的圆心、半径.

添加一个计算器页面, (1) 输入 $\text{completeSquare}(y = 3x^2 - 4x + 5, x)$, 按键 (enter) , 得到抛物线的对称轴为 $x = \frac{2}{3}$. (2) 输入 $\text{completeSquare}(x^2 + y^2 - 2.3x + 4.4y - 26 = 0, x, y)$, 按键 (enter) , 得到 $\left(x - \frac{23}{20}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{5}\right)^2 = 32.1625$, 所以圆心为 $\left(\frac{23}{20}, -\frac{11}{5}\right)$, 半径为 $\sqrt{32.1625}$ (图 1-1).

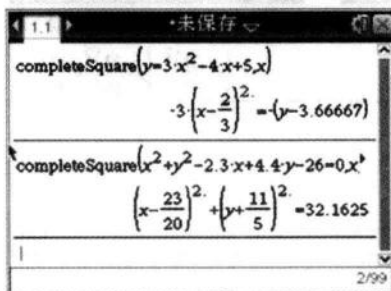


图 1-1

实战演练

例 判断五个连续的自然数的平方和是否是完全平方数.

添加一个计算器页面, 输入 $\text{completeSquare}(n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2)$, 按键 enter , 得到 $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 = 5(n+2)^2 + 10$, 所以五个连续的自然数的平方和不是完全平方数 (图 1-2).

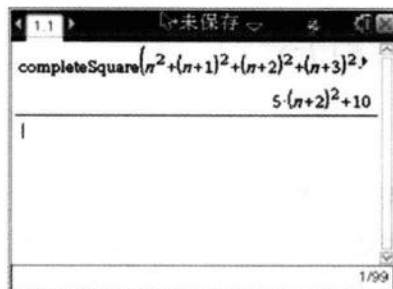


图 1-2

精彩案例

求二元函数的最小值

求 $x^2 + y^2 - 2.3x - 4.6y + 12$ 的最小值.

添加一个计算器页面, 输入 $\text{completeSquare}(x^2 + y^2 - 2.3x - 4.6y + 12)$, 按键 enter , 得到原式 $= \left(x - \frac{23}{20}\right)^2 + \left(y - \frac{23}{10}\right)^2 + \frac{431}{80}$, 因此当 $x = \frac{23}{20}$, $y = \frac{23}{10}$ 时原式的最小值为 $\frac{431}{80}$ (图 1-3).

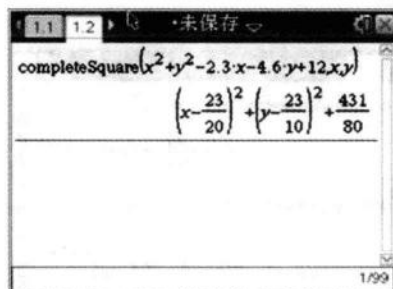


图 1-3

1.2 factor, cFactor (因式分解)

命令格式

factor (表达式 [, 变量])

应用举例

分别在实数范围和复数范围内因式分解: (1) $x^4 + y^4 + x^2 y^2$ (实数范围); (2) $x^4 + y^4 + x^2 y^2$ (复数范围).

添加一个计算器页面, (1) 输入 $\text{factor}(x^4 + y^4 + x^2 \cdot y^2)$, 按键 enter , 得到原式的因式分解结果为 $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$. (2) 输入 $\text{cFactor}(x^4 + y^4 + x^2 \cdot y^2, x)$, 按键 enter , 得到原式的因式分解结果为:

$$\frac{(2x + (-1 + \sqrt{3}i)y)(2x - (-1 + \sqrt{3}i)y)(2x + (1 + \sqrt{3}i)y)(2x + (1 - \sqrt{3}i)y)}{16}$$

(图 1-4).

注: cFactor 表示复数范围的因式分解, 其命令格式是: cFactor (表达式[, 变量]), cFactor (数组[, 变量]), cFactor (矩阵[, 变量]).

实战演练

例 1 分解因式: (1) $x^5 + x^4 + 1$; (2) $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6a \cdot b + 10b \cdot c$.

添加一个计算器页面, (1) 输入 $\text{factor}(x^5 + x^4 + 1)$, 按键 enter , 得到 $x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$. (2) 输入 $\text{factor}(a^2 - 16b^2 - c^2 + 6a \cdot b + 10b \cdot c)$, 按键 enter , 得到 $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6a \cdot b + 10b \cdot c = (a + 8b - c)(a - 2b + c)$ (图 1-5).

例 2 说明当 n 为大于 2 的整数时, $n^5 - 5n^3 + 4n$ 能被 120 整除.

添加一个计算器页面, 输入 $\text{factor}(n^5$

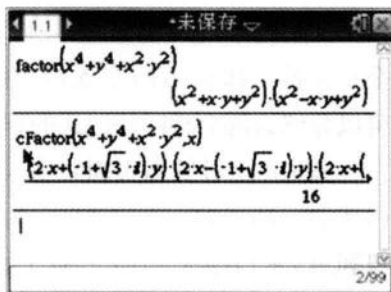


图 1-4

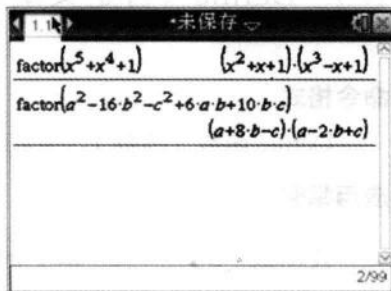


图 1-5

$-5n^3 + 4n$), 按键(enter), 得到 $n^5 - 5n^3 + 4n$ 的因式分解结果为 $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)$ (图 1-6), 即为五个连续整数的乘积, 因此 $n^5 - 5n^3 + 4n$ 能被 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ 整除.

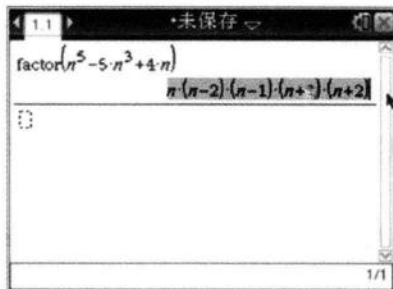


图 1-6

精彩案例

利用 factor 证明一个完全平方式问题

证明四个连续整数的积加 1 是一个完全平方数. 即证明四个连续整数的积加 1 可以分解为两个相同的因式的积.

添加一个计算器页面, 输入 $\text{factor}(x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + 1)$, 按键(enter), 得到 $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$ (图 1-7).

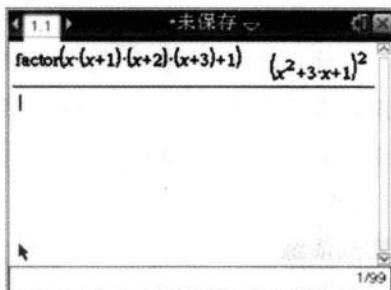


图 1-7

1.3 Define (自定义函数)

命令格式

Define 函数 (参数 1, 参数 2, ...)

应用举例

设函数 $f(x) = -x + \ln \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(-\frac{1}{2012}\right)$ 的值.

添加一个计算器页面, 输入 $\text{define } f(x) = -x + \ln \frac{1-x}{1+x}$, 按键(enter), 得

到 $f(x) = -x + \ln \frac{1-x}{1+x}$, 输入 $f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(-\frac{1}{2012}\right)$, 按键 enter , 得到 $f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(-\frac{1}{2012}\right)$ 的值为 0 (图 1-8).

注: 自定义函数还有其他两种方式: ① 按键 ctrl , $[\text{=}]$ (赋值键, 给指定变量赋值), ② 按键 ctrl , $[\text{sto}\cdot]$ (定义键, 定义函数或变量), 用这两种方式定义的结果如图 1-9.

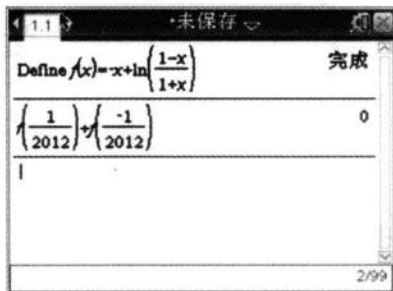


图 1-8

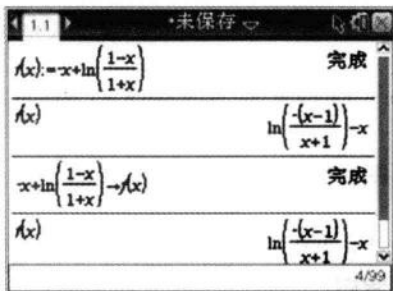


图 1-9

实战演练

例 1 设 $a > 0$, $f(x) = \frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 求 a 的值.

(1) 添加一个计算器页面, 输入 Define $f(x) = \frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x} \mid a > 0$, 按键 enter , 得到 $f(x) = \frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x} \mid a > 0$.

(2) 输入 $\text{solve}(f(x) = f(-x), x) \mid a > 0$, 按键 enter , 得到 $x = 0$ 或 $a^2 = 1$.

(3) 输入 $\text{solve}(a^2 - 1 = 0, a) \mid a > 0$, 按键 enter , 得到 $a = 1$ (图 1-10).

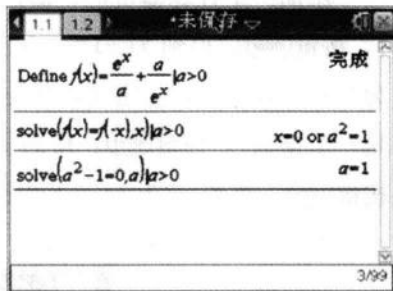


图 1-10

例 2 设 $f(x) = \sin \frac{\pi}{6}x$, 求 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2012)$ 的值.

(1) 添加一个计算器页面, 输入 Define $f(x) = \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right)$, 按键 enter , 得到 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{6}$.

(2) 输入 Define $a = \text{seq}(f(n), n, 1, 2012)$, 按键 enter , 得到数组 $a = \{f(1), f(2), \dots, f(2012)\}$.

(3) 输入 a , 按键 enter , 得到数组 a

$$= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots \right\}.$$

(4) 输入 $\text{sum}(a)$, 按键 enter , 得到

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2012) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2}$ (图 1-11).

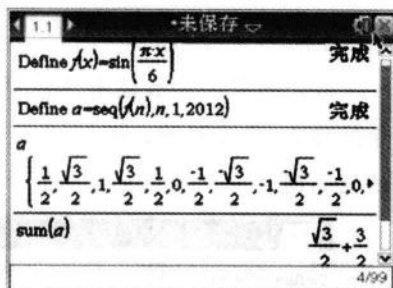


图 1-11

注: seq (数列), sum (求和) 的操作请见相关的命令.

精彩案例

周期函数的求值问题

已知函数 $f(x) = f(x+2)$, $f(x) = x \sin x + \cos x (-1 \leq x \leq 1)$, 求 $f(3.3)$, $f(-2.1)$ 的值.

添加一个计算器页面, 输入 Define $f(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x) | -1 \leq x \leq 1$, 按键 enter , 得到 $f(x) = x \sin x + \cos x (-1 \leq x \leq 1)$, 根据题意 $f(x)$ 为周期为 2 的函数, 所以自定义函数 $g(x)$, 即输入 Define $g(x) = f(x+2 \cdot \text{int}(k))$ ($\text{int } k$ 是一个整数), 按键 enter , 得到 $g(x) = f(x+2 \cdot \text{int}(k))$, 输入 $g(3.3) | k = -2$, 按键 enter , 得到 $f(3.3) = 1.21579$, 输入 $g(-2.1) | k = 1$, 按键 enter , 得到 $g(-2.1) = 1.00499$ (图 1-12).

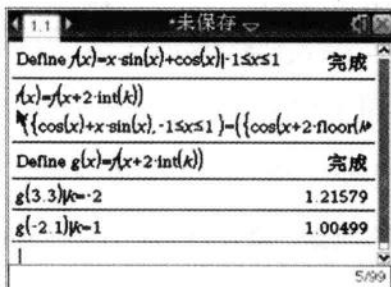


图 1-12