

高等学校教学参考书

数学思维技术

SHU XUE SI WEI JI SHU

季志焯 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校教学参

01-0
127

014007817

数学思维技术

SHU XUE SI WEI JI SHU

季志焯 著



 哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1694648

01-0
127

内容简介

本书针对中学生的知识水平和心理特征,首先把复杂的解题过程分解成一些简单的基本过程,然后详细地叙述了联想、变换、分析、发现、安排、表达,等一系列在寻找解题方法的过程中十分重要的基本思维过程,详细地叙述了用它们寻找解题方法的一些基本解题技术。简单、易懂、具体、实用、为广大中学师生学习和钻研解题技术提供了一条可浅、可深、方便、灵活的新途径。

本书主要供广大中学师生学习解题用;但书中阐明的一种特殊的解题思想,对师范院校数学系的学生和其它从事解题教学和解题研究的数学工作者,对希望学一点基本思维技术的朋友们,同样具有非常重要的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学思维技术/季志焯著. -- 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013.8

ISBN 978-7-5603-4185-9

I. ①数… II. ①季… III. ①数学-思维方法 IV. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 165245 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 张佳

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传真 0451-86414749

网址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.25 字数 272 千字

版次 2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-5603-4185-9

定价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61
新编中学数学解题方法全书(自主招生卷)	2013-08	88.00	261

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28
数学思维技术	2013-09	38.00	260

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128
三角形中的角格点问题	2013-01	88.00	207
含参数的方程和不等式	2012-09	28.00	213

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录

书 名	出版时间	定 价	编号
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
平面几何天天练上卷·基础篇(直线型)	2013-01	58.00	208
平面几何天天练中卷·基础篇(涉及圆)	2013-01	28.00	234
平面几何天天练下卷·提高篇	2013-01	58.00	237
平面几何专题研究	2013-07	98.00	258
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名解析几何经典著作钩沉——平面解析几何卷	即将出版		
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷I)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷II)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
圆锥曲线习题集(上)	2013-06	68.00	255



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯几何大师——沙雷金论数学及其他	即将出版		
俄罗斯平面几何 5000 题	2011-03	58.00	89
俄罗斯初等数学问题集	2012-05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011-03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011-01	48.00	79
俄罗斯初等数学万题选——三角卷	2012-11	38.00	222
俄罗斯初等数学万题选——代数卷	2013-08	68.00	225
俄罗斯初等数学万题选——几何卷	即将出版		226
463 个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188

超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009-01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论(第二版)	2013-08	58.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
解析数论基础	2012-08	28.00	216
数论入门	2011-03	38.00	99
数论开篇	2012-07	28.00	194
解析数论引论	2011-03	48.00	100
无穷分析引论(上)	2013-04	88.00	247
无穷分析引论(下)	2013-04	98.00	245
数学分析中的一个新方法及其应用	2013-01	38.00	231
数学分析例选:通过范例学技巧	2013-01	88.00	243
三角级数论(上册)(陈建功)	2013-01	38.00	232
三角级数论(下册)(陈建功)	2013-01	48.00	233



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
三角级数论(哈代)	2013-06	48.00	254
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
随机过程(I)	2012-12	78.00	224
随机过程(II)	2013-01	68.00	235
整数的性质	2012-11	38.00	192
初等数论100例	2011-05	18.00	122
初等数论经典例题	2012-07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148
初等数论(I)	2012-01	18.00	156
初等数论(II)	2012-01	18.00	157
初等数论(III)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172
平面几何与数论中未解决的新老问题	2013-01	68.00	229
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006-05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008-09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012-08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012-08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012-01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012-07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00	43
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(上编)	2012-04	28.00	169
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(下编)	2012-04	38.00	170
整函数	2012-08	18.00	161
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
模糊分析与特殊泛函空间	2013-01	68.00	241
受控理论与解析不等式	2012-05	78.00	165
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011-11	28.00	147
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012-02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009卷(第1辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究 2010卷(第2辑)	2010-05	30.00	68
中国初等数学研究 2011卷(第3辑)	2011-07	60.00	127
中国初等数学研究 2012卷(第4辑)	2012-07	48.00	190
数阵及其应用	2012-02	28.00	164
绝对值方程—折边与组合图形的解析研究	2012-07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012-02	28.00	154
不等式的秘密(第二卷)	即将出版		268
初等不等式的证明方法	2010-06	38.00	123
数学奥林匹克问题集	即将出版		
数学奥林匹克不等式散论	2010-06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011-09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011-08	158.00	134,135
近代拓扑学研究	2013-04	38.00	239

新编 640 个世界著名数学智力趣题	2013-02	88.00	242
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000 个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300 个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500 个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

王连笑教你怎样学数学——高考选择题解题策略与客观题实用训练	即将出版		
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
我怎样解题	2013-01	48.00	227
2011年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140,141
30分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
全国中考数学压轴题审题要津与解法研究	2013-04	78.00	248
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167

格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	2012-12	18.00	228
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	2012-10	18.00	221
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵可夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-10	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	2013-04	38.00	238
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	2013-03	38.00	236
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	2013-06	18.00	256
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-08	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	2012-08	18.00	217
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012-08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	2012-10	28.00	218
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	2013-04	38.00	244
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012-08	28.00	214
代数几何中的贝祖定理(第二版)——从一道 IMO 试题的解法谈起	2013-08	38.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	即将出版	18.00	199
置换多项式及其应用	2012-10	18.00	220
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考题谈起	2012-10	38.00	219
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	2012-08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	2013-01	38.00	240
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2013-04	58.00	246
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道日本数学奥林匹克试题谈起	2013-04	48.00	249
李天岩—约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特—莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学期刊》征解问题的解法谈起	即将出版		
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编号
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	176
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
非光滑优化及其变分分析	2013-01	48.00	230
疏散的马尔科夫链	即将出版		
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
古典数学难题与伽罗瓦理论	2012-11	58.00	223
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187
矩阵论(上)	2013-06	58.00	250
矩阵论(下)	2013-06	48.00	251
抽象代数:方法导引	2013-06	38.00	257

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从炘数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
高等数学解题全攻略(上卷)	2013-06	58.00	252
高等数学解题全攻略(下卷)	2013-06	58.00	253
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@163.com

目 录

第一章 解题基本概念	1
第二章 基本解题技术	5
第一节 联想	5
1.1 联想的基本知识	5
1.2 寻找解题方法的联想	6
1.3 寻找解题规律的联想	15
1.4 广泛地联想是解决熟悉问题的基本策略	17
第二节 变换	18
2.1 变换的基本知识	18
2.2 基本变换	21
2.3 命题变换	57
2.4 灵活地变换是解题的基本方针	62
第三节 分析	79
3.1 分析的基本知识	79
3.2 问题简化的重要标志	84
3.3 分析过程的两种基本形式	94
3.4 正确地分析是解决陌生问题的基本途径	95
第四节 发现	102
4.1 发现的基本知识	102
4.2 发现前的具体化过程	103
4.3 发现前的猜想过程	110
4.4 巧妙地发现是解决特殊问题的基本手段	113
第五节 安排	124
5.1 安排的基本知识	124
5.2 解题方案的组成	128
5.3 解题方案的设计与调整	141
5.4 恰当地安排是解决复杂问题的基本措施	151
第六节 表达	166
6.1 表达的基本知识	166
6.2 规范化在解题中的作用	169

6.3 系统化在表达过程中的作用	178
6.4 合理地表达是解决困难问题的基本技能	182
第三章 综合解题技术	188
第一节 一组实用的解题工具	188
第二节 一套简便的教学模型	195
第三节 一个标准的解题能手加工厂	206
第四节 一种与众不同的解题思想	215
作者的话	222
后记	225
读后感	227

第一章 解题基本过程的概念

解数学问题的过程是一个十分复杂的过程,它不仅需要我们具备足够的数学知识,还需要我们具备足够的心理学知识.许多中学生在自己遇到问题的時候感到十分困难,束手无策.但当他们看到别人的解题过程的时候,又觉得十分简单,十分熟悉,甚至于觉得容易到不应该作不出来.他们往往奇怪地想“我怎么想不到呢?”其实道理很简单:他们已经具备了足够的数学知识,但还没有掌握正确的思维方法.

要把解题的思维过程完全讲清楚是十分困难的,但是我们可以把它看作是由一些简单的思维过程组成,我们把它们称为解题的六个基本过程.

为了叙述的方便,我们假设某一解题过程的思维顺序如下:



现在,我们来看看我们是怎样解题的.

首先,在看到一个问题之后,我们应当想到相应的数学知识,这就是联想.联想到的知识越多,解决问题的可能性就越大.

其次,我们应当想方设法把要解决的问题简化,使较复杂的问题逐步转化为较简单的问题,这就是变换.变换的方法越灵活,问题简化的速度就越快.

接着,是一个选择的过程.它首先帮助我们对问题是否接近解决作出判断,然后帮助我们通过比较去寻找问题接近解决的新的目标,这就是分析.分析的过程越正确,我们所走的弯路就越少.

如果上述过程连遭失败,那么它是在告诉我们,问题中一定存在着一种特殊的巧合.利用一些暗示、线索和感觉,通过猜测和想象来找到问题中的巧合,这就是发现.它是一个综合、提高、创造的过程.发现能力越强,我们解题的手段就越高.

经过联想、变换、分析和发现,我们的解题过程暂时告一段落.这时一般有三种情形:第一种,问题已经可以解决;第二种,问题虽然还没有得到解决,但已经简化,因而可以说已经接近解决;第三种,问题遇到了不可克服的障碍.当第三种情况出现时,我们应当对解题过程作适当的调整,我们要制定出一个解题方案绕过障碍,这就是安排,它是一个计划与组织的过程.

上述解题过程可能要重复好多次,直到问题完全解决为止.当问题解决之后,我们还要对解题过程进行记录、整理、化简和改造,以便让别人能明白我们

的解题过程,这就是表达.它是一个识别、理解和叙述的过程.

下面,我们通过一个简单问题的具体解决过程,来进一步说明上述解题思想.

问题 A. 已知: a, b, c 是正实数.

求证: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

这是高中课本中不等式证明中的一个重要定理,大家一定十分熟悉,现在我们来讨论解决这一问题的一个思维过程.

首先,我们由所给出的问题联想到相应的数学知识.比如,立方和公式、立方公式、因式分解、函数 $y = x^3$ 、对数 $\lg abc = \lg a + \lg b + \lg c$ 等.上述知识都可以用来解决我们的问题,课本上就是用因式分解来证明的.当然,我们也可能想到就在它前面的另一个定理 $a^2 + b^2 \geq 2ab$,想到用这一个定理来解决我们的问题,这就是联想过程.

然后,我们开始设法运用 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 来使问题简化.比如,我们得到 $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + (b^3 + c^3) \geq 2\sqrt{a^3 \cdot (b^3 + c^3)}$,这就是变换过程.

接着,我们开始把上述结果 $2\sqrt{a^3 \cdot (b^3 + c^3)}$ 与我们希望得到的结果 $3abc$ 加以比较,不难发现二者之间有许多差别.比如说,它们的系数不同,一个是2,一个是3;它们一个有根号,一个没有根号;一个有“+”号,一个没有“+”号;…….很明显,消除这些差别,就可以使问题简化.但要同时除去所有的差别还很困难,因而我们只能设法先消去其中的一部分,比如“+”号.这就是分析过程.

如何使我们变换的结果不出现“+”呢?我们可以使用二次变换,这就是安排.根据这样的安排,我们又可以得到一个新的变换结果,即

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 2\sqrt{a^3 b^3} + c^3 \geq 2\sqrt{2\sqrt{a^3 b^3} \cdot c^3}$$

把第二次变换的结果 $2\sqrt{2\sqrt{a^3 b^3} \cdot c^3}$ 再与我们希望的结果 $3abc$ 进行比较,仍然可以看到它们还有许多差别.但变换过程的两次失败,使我们注意到:如果我们增加一项,把 c^3 也变换两次,那么 abc 的指数即可相同;如果我们能把 $a^3 b^3 c^3$ 变成 $a^4 b^4 c^4$,那么我们就可以除去根号.这时我们心中一动,我们不是看到,而是突然感觉到,代数式 abc 在这里正合适,这就是发现.由此,我们又可以得到一个新的变换过程,即

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq 2\sqrt{a^3 b^3} + 2\sqrt{c^3 abc} \geq 4\sqrt{a^4 b^4 c^4} = 4abc$$

这一结果与我们希望的结果已经很接近了,但是 $a^3 + b^3 + c^3 + abc \neq a^3 + b^3 + c^3$.

既要保证变换的顺利进行,又要使它开始时能与 $a^3 + b^3 + c^3$ 相等,这就需

要安排.

我们使 $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + abc - abc$, 并且只变换前面四项, 保持最后一项不变. 通过这样恰当的安排, 我们就得到了比较合适的变换, 即

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + abc - abc \\ &\geq 2\sqrt{a^3b^3} + 2\sqrt{c^3abc} - abc \\ &= 4abc - abc = 3abc \end{aligned}$$

这一次我们成功了, 我们找到了问题中的一个特殊的巧合.

问题解决之后, 我们还要把它记录下来, 让别人也能明白, 这就是表达.

上述问题可以如下表达:

问题 A. 已知: a, b, c 都是正实数.

求证: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

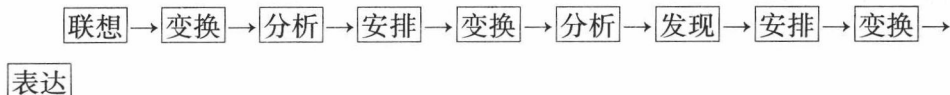
证明 由 a, b, c 都是正实数可知

$$\begin{aligned} \text{左} &= a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + abc - abc \\ &\geq 2\sqrt{a^3b^3} + 2\sqrt{c^3abc} - abc \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{a^3b^3} \cdot 2\sqrt{c^3abc}} - abc \\ &= 4abc - abc = 3abc = \text{右} \end{aligned}$$

故不等式成立.

我们当然不必记录那些失败的解题过程, 但是我们要记住“ a, b, c 都是正实数”这一条件, 它保证 $\sqrt{a^3b^3}$ 和 $\sqrt{c^3abc}$ 有意义. 我们还要注意使叙述有条理、符合规范和适合读者的水平.

上述解题过程可以由下列流程图表示:



这是笔者解决这一问题的实际思维过程, 它非常巧妙地帮助我们找到了两个重要定理之间的联系.

上述解题过程虽然简单, 但是具有一定的代表性, 它向我们清楚地表明, 我们通常看到的解题过程只是经过整理的实际解题过程中的一部分. 实际的解题过程主要由解题方法和解题技术两部分组成. 解题方法是解决问题的方法, 主要由数学知识组成; 解题技术是寻找解题方法的技术, 主要由思维技术组成. 对于一些数学问题, 我们很快就可以找到解题方法, 无需解题技术, 它们的解题过程, 主要由解题方法组成; 对于另外一些数学问题, 我们可能需要考虑较长时间才能找到解题方法, 它们的解题过程, 主要由解题技术组成. 不难看出, 解题方法和解题技术是解题过程的两种不同的表现形式. 为了了解怎样去寻找解题方