

# 数学方法论与数学文化 专题探析

郑隆炘 著

Exploration of Special Topic  
for Mathematical Methodology  
and Mathematical Culture



华中科技大学出版社  
<http://www.hustp.com>

Maths  
from a  
point of view

# 数学方法论与数学文化

---

## 专题探析

● 郑隆炘 著



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论与数学文化专题探析/郑隆焯著. —武汉:华中科技大学出版社,2013.5

ISBN 978-7-5609-8932-7

I. ①数… II. ①郑… III. ①数学方法-方法论-研究 ②数学-文化-研究 IV. ①O1-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第102740号



数学方法论与数学文化专题探析

郑隆焯 著

策划编辑:周芬娜

责任编辑:周芬娜

封面设计:范翠璇

责任校对:李 琴

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321915

录 排:武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷:湖北新华印务有限公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:13.75 插页:2

字 数:300千字

版 次:2013年11月第1版第1次印刷

定 价:39.00元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换  
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务  
版权所有 侵权必究

# 序

---

---

关于数学方法论和数学文化的话题,近年来在数学教育界一直是比较热的。这类问题可以在两个不同层面或不同水平上来讨论。一个是作为专门的研究领域来对待,例如数学方法论可以作为数学哲学的一个分支来研究。这样做适合于作为哲学家的读者,或者关心哲学的比较成熟的数学家读者,而对广大的大中学教师和一部分学生就感觉太深了。又例如数学与音乐的关系,可以研究中外乐理的区别与联系,如中国的五度相生律(也叫三分损益律)和古希腊的毕达哥拉斯乐律是一致的。而巴赫以后在西方广泛使用的十二平均律和明朝朱载堉 1581 年首创的“新法密率”也是一致的,其基础其实都是等比数列理论。对于研究乐理的人来说,这是必须知道的,许多弹吉他的人也会关心,但是广大的大中学教师和一部分学生会感觉太深了,而且不会引起兴趣。

还有另一个层面,就是从总结自己学数学和教数学的经历中,对于数学有所感悟;由于对于数学的热爱,觉得自己和其他从事数学的人多少有些“心有灵犀一点通”之处,于是有些经验愿与同行分享,自己的心路历程也愿与志同道合者交流。这样可以写出极有价值的书来。特别是一些大数学家写出的这样的书或者文章,多年来一直影响着青年数学爱好者。

既然讲到大数学家,就会想起庞加莱。他写的“数学的创造”是一篇,至今仍然广为传颂(有一个最新的版本,是由纽曼重新编辑的,发表在《现代世界中的数学》中。这是一本论文集,中译本由上海教育出版社 2004 年出版,是一本“高级科普读物”,其中有许多极好的文章,所以我愿借此机会向读者们推荐)。还有一本是李特尔伍德写的《数学随笔集》,同样出自大数学家之手,讲“数学是怎样研究出来的?”读来更是十分亲切。可以向读者报告一个喜讯:此书中译本即将由高等教育出版社出版。

讲到大数学家的经验和感悟,就不能不提到波利亚(其实正确的译音应该是波尔雅,因为他是匈牙利人,名字应该按匈牙利语发音)的名著《怎样解题》(这本书最早的中译本由周佐严先生翻译、中华书局 1948 年出版),以及其后的《数学与似然推理》(上下册)和《数学发现》(上下册)。波利亚不仅是大数学家,而且还是解题大

师,他另有一部名著《数学分析中的问题和定理》(与赛格合著)是分析数学名著,是为专门从事数学研究的人写的。波利亚的著作主要是经验总结,而且有很大的操作性,不仅对于大中学老师,而且对于大中学学生都有很大的“用处”,因此受到读者欢迎。

上面介绍的那些著作,虽然针对的读者对象数学水平不同,但这些著作却有两个共同点:一是个性突出,是个人真切的体验,所以读起来觉得好像是在和作者谈话,循循善诱,娓娓动听,绝不是东抄一段西抄一段。二是都在讲数学。既不是板着脸对您宣讲一些空话或者教条,也不是如现在在市场上流传的“一本攻略”、“学习三步(或多步)法”等等,东拼西凑、错误百出的忽悠读者的图书。

下面就要讲到本书的作者郑隆忻了。我与作者相识始于20世纪60年代,算起来也是半个世纪前的事了。当时他考入武汉大学数学系,我确实是给他打过及格不及格。有一次,我给他们班同学讲学习方面的事,用现在的话说就是“讲座”。因为我读过波利亚的《怎样解题》,就是上面说的周佐严先生的译本。那是1948年我中学毕业的那一年一位老师给我看的,印象极深。后来我到了武汉大学,这本中译本找不到了,但是数学系图书室有英文本,这当然使我喜出望外,于是我就介绍了这本书讲的解题方法,而且把书中怎样解题的一个表译为中文,油印发给同学们。我知道作者把这个材料保留了许多年。作者有一个特点:他不怎么想留在高校做研究,而对中学数学教育情有独钟。所以,他毕业后一直在教育学院任教,而一直试图按照波利亚的精神,从事数学教师教育的教学工作。这么多年来我们常有交往,也都是围绕着同一个主题。我知道他一直在收集材料,特别是自己和同事们的教学经验,并认真总结自己的感悟与体验。这本书应该就是结晶了。

写一篇序言不应该尽是溢美之词,特别是面对着如波利亚这样的大师的名作,我们只能是高山仰止、景行行止,并与作者和读者共同切磋。相信读者可以从这本书里获得益处,更相信读者如果也按照波利亚的道路,总结自己的经验,并从波利亚的书中学更多的数学知识,会得到更大的收获。

齐民友

2013年5月11日

# 前 言

---

---

数学方法论与数学文化这两个分支在数学教育中的作用愈来愈重要。中小学课程改革以来,按数学课程标准(2001年颁布的义务教育阶段,2003年颁布的高中教育阶段)的要求,这两个分支的许多内容已经渗透到日常的数学教学中,成为中小学实施素质教育的重要内容之一。在大学数学教育中,不少高等院校开设了这两门课程,同时,它们加深与拓展的内容还成为相关专业的硕士研究生的课程。这方面已经有了一批很好的成果,也出版了多种教材或专著,不少课题也做过比较深入的研究。但是,仍然有一些专题没有涉及,或者虽然做过研究,但探索得不够深,或者观点陈旧,缺乏独到见解。本书就选择数学方法论与数学文化领域需要进一步探讨的若干专题,进行探析,将自己学习与研究时得到的感悟与体验,总结与提炼出来,留给后来需要者参考,当好一块铺路石子,也想为这两个数学分支的建设作一点微薄贡献。

我是一个以爱书、读书、教书、写书、品书为生命、为事业、为乐趣、为理念、为追求的人,从事数学教育40余年来一直如此。退休以后,由于“惯性”的作用,仍然没有停歇,特别是对数学教育科研情有独钟。我觉得,数学教育科研的过程,其实就是一种情怀、一种理念、一种价值取向,是最美好与最高尚的精神追求,也是自己生活方式不可分割的一部分。所以,我想在老年阶段的初中期,应该抓紧做好自己想做的事,退休的八年多来,一点不敢怠慢,一直比较用功,呕心沥血,精雕细刻,现在终于完成了本书的写作,应该说感慨甚多。

我在七十岁时写过一首七律诗,可以表达自己此时的真实情感。

## 七律·七十初度即兴

七十岁月几多难,银鬓疏稀诉暑寒。  
松遇暴雪根仍劲,菊遭严雹萼未残。  
润花著果赞教海<sup>①</sup>,催笋成林颂教坛<sup>②</sup>。  
愿作人梯堪自慰,真追长结寸心丹。

注 ① 教海:指数学科学的海洋。② 教坛:指教学的讲坛。

这首诗,反映了我们这一代知识分子在艰难曲折中成长的经历,以及多年来为

培育人才作出的无私奉献,表达了对祖国、对人民、对事业真挚的赤子之心。

下面介绍本书的定位、内容与特点。

本书书名为《数学方法论与数学文化专题探析》,是我写的《形象·灵感·审美与数学创造》、《数学思维与数学方法论概论》、《高等师范数学教育研究》等书的续篇。首先,它是一部关于数学方法论与数学文化这两个数学分支的学术专题探析的著作,提出来的一些观点与论述可供研究者探讨与争鸣;其次,它是一本大中学数学教师与数学教育类研究生进修提高的有益参考书;再次,它可作为大学生与部分有兴趣的高中生的课外读物,以进一步开拓他们的眼界,提高数学素养与综合能力,同时,还可为高等师范教育和中小学数学课程改革开设选修或校本课程提供参考。

本书的内容包括5章:关于数学方法论与数学文化的几个问题(数学方法论的分支归属,从数学学科的发展史看数学研究对象的历史演变,数学文化的涵义、特征及其在数学教育中的作用);数学思想方法专题探析(数学思想方法的涵义、分类及其作用,解数学问题的两大基本思想,数学发现的思想方法);数学美的涵义、实质、基本内容,以及数学美学方法在学习与创造中的作用;数学家的创新精神与思想方法研究(柯瓦列夫斯卡娅,勒贝格,四位中国数学大师);数学与音乐、美术、中国古典诗词关系的探索。

探析就是探讨与分析,探析的灵魂是创新,这也是笔者写本书时必须遵守的根本原则。本书的许多内容是笔者多年来的研究成果,也有一部分汲取了近十多年来数学教育界诸多专家、教授的研究精华,因此具有一定的学术性与创新性。此外,有相当一部分内容是笔者在广泛猎取有关论著的基础上,进行了深度加工与重新表述,并与自己的观点融为一体,使全书的内容和写作风格具有统一性与连贯性。考虑到大中学数学教师、研究生、大学生与部分高中生读者的需求,写作时,努力做到思路清晰、内容新颖、推演准确、阐述精练、通俗易懂、实践性强,对所举例题,都进行认真的剖析与研究,因此,有较强的针对性与可读性。

与国内流行的数学方法论与数学文化方面的书中重复的内容,这里都不讨论或较少阐述,这样,可以突现新颖之处。本书的许多内容曾作为课程或讲座,向中学数学教师或大学生讲过,有的内容则在有关学术会议上以论文报告形式作过发言。从反馈情况看,是好的或比较好的。大致上说,本书的第1章的1.1节、1.2节,第2、4章属于数学方法论的内容,第1章的1.3节,第3、5章属于数学文化的内容,其中很多内容也可说是两个分支的交叉与延伸。

本书的顺利出版,是得到众多群体与个人关心、支持与鼓励的结果。在这里,首先,我要感谢我的恩师、著名数学家齐民友教授,他认真审阅了我的初稿,提出很

好的意见,并为我提供了丰富的参考资料,根据他的意见我又对书稿进行了修改与充实,他还为本书作了热情、清晰、深刻、实在的序言。其次,我要感谢华中科技大学出版社的领导与编辑们的热情支持。再次,我要感谢黄石市民营企业家曾铁鸣先生对本书出版的无私赞助。我要感谢同事、学生欧阳仲威、巴英等为本书的出版所做的工作,感谢武汉市老教授协会对本书出版的支持,感谢徐志雄教授对我诗作的指点。最后,我要感谢我的家人,是他们长期、无条件、真诚而实际的支持与鼓励,我才能一步一步迈向目标的彼岸。

在本书写作过程中参考了许多著作与论文,在此谨向各位专家、学者表示衷心的感谢。本书虽然用了较长时间来研究与撰写,但花费的时间与作品的质量有时并不一定成正比,仍然会有不少缺陷与不足,诚恳地希望学者、同行与读者朋友多多指教,提出宝贵意见。

郑隆忻

2013年5月15日

于江城拾方益园素数斋



# 目 录

---

---

<b>第 1 章 关于数学方法论与数学文化的几个问题</b> .....	(1)
1.1 论数学方法论的分支归属 .....	(1)
1.2 从数学学科发展史看数学研究对象的历史演变 .....	(8)
1.3 数学文化的涵义、特征及其在数学教育中的作用 .....	(19)
<b>第 2 章 数学思想方法专题探析</b> .....	(29)
2.1 数学思想方法的涵义、分类及其作用 .....	(29)
2.2 解数学问题的两大基本思想.....	(37)
2.3 数学发现的思想方法之一:归纳与类比 .....	(57)
2.4 数学发现的思想方法之二:联想与数学直觉 .....	(75)
<b>第 3 章 数学美的涵义、基本内容及其作用</b> .....	(92)
3.1 数学美的涵义与实质.....	(92)
3.2 数学美的基本内容.....	(96)
3.3 数学美学方法在学习与创造中的作用 .....	(115)
<b>第 4 章 数学家的创新精神与思想方法研究</b> .....	(124)
4.1 柯瓦列夫斯卡娅的数学成就与思想方法 .....	(124)
4.2 勒贝格的数学成就与创造性思想方法 .....	(132)
4.3 四位中国数学大师的创新精神及其启示 .....	(141)
<b>第 5 章 数学与音乐、美术、中国古典诗词关系的探索</b> .....	(155)
5.1 数学与音乐关系的探索 .....	(155)
5.2 数学与美术关系的探索 .....	(171)
5.3 数学与中国古典诗词关系的探索 .....	(191)

# 第1章 关于数学方法论与教学文化的几个问题

---

本章前两节探讨的内容均属于宏观数学方法论的范畴,是数学方法论中的重要问题。后一节属于数学文化的范畴。

## 1.1 论数学方法论的分支归属

数学家、数学方法学家徐利治教授(1920—)曾对数学方法论下过精辟的定义:“数学方法论主要是研究与讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中发现、发明与创新等法则的一门学问。”这个定义是正确的。近30年来,正在形成与发展的数学方法论的教学与科研实践已证实了这一点。为了使数学方法论的研究更加深入,更紧密地和数学教育与应用相结合,有必要多层次、多视角作进一步研究。笔者论述的观点是:数学方法论是哲学方法论与数学交叉的数学教育分支。

### 一、数学方法论的产生和发展

#### 1. 常量数学时期

在常量数学时期(前6世纪—16世纪)的前期,古希腊一些哲学家,同时也是数学家,在哲学与数学领域中的成果,就蕴含了数学方法论的萌芽。这个时期的代表人物主要是古希腊的柏拉图(Plato,约前427—前347)、亚里士多德(Aristotle,前384—前322),欧几里得(Euclid,约前330—前275)等。柏拉图是古希腊影响最大的哲学家之一,是第一个把严密推理法则加以系统化的人,他认为数学概念不依赖于经验而自有实在性,只能为人所发现,并非为人所发明或塑造,即“柏拉图实在”(理念化的存在)。在他的倡导下,柏拉图学派中产生了不少数学家,他们发现了圆锥曲线,对不可公度的量作过研究。亚里士多德是人们公认的哲学方法论的创立者,他完整地提出数学中所使用的逻辑体系,首创了科学认识的“归纳—演绎”的方法论程序模式。他首创的模式中,“归纳法”包括“单纯归纳法”与“直观性归纳法”,“演绎法”则依据“三段论法”方式进行。柏拉图与亚里士多德的哲学方法论思想、数学与逻辑的成果,对欧几里得影响很大。欧几里得在前人成果的基础上,经

过整理加工与补充论证,使得十分零散的数学知识得到逻辑推理的链条,写出数学巨著《几何原本》。他创造了公理化思想方法构建数学理论的第一个范例,从此,证明与逻辑演绎成了数学的基本方法。公理化思想方法也成为数学方法论萌芽初期的主要方法。

在这个时期,中国数学则在与天文、技术、测量、哲学、教育以及社会生活等的结合中突出了数学实用思想,重视实际计算与应用,形成另一种数学思想方法。成书于汉代的《九章算术》包括了汉以前的重要数学成果,标志着我国的初等数学已形成体系。《九章算术》的思想方法主要包括:开放的归纳体系,内容的算法化,数学模型化的建构体系法,使用算筹作为计算工具等。三国时期的刘徽(225—295)对《九章算术》进行了详细注解,并作了补充。他注意寻求数学内部的一般规律,重视转化与数学推理的逻辑性,同时也注意到数学的直观性,他还在“割圆术”中提出极限思想。到了宋元时期,我国的数学则由以几何为中心转到以代数为中心,更加重视解决社会实际中提出的各类数学问题,其对应的数学思想方法进一步得到发展。如秦九韶(1202—1261)的《数书九章》是中世纪数学史上的鸿篇巨著,该书提出了开放的、归纳与演绎相结合的、算法化与抽象化相结合的思想方法,并对算筹的布列方式作了研究,由此发展为筹图法。

我们将《几何原本》与中国古代的《九章算术》、《数书九章》等的思想方法作一比较,会发现西方、东方的数学在思想方法方面都各有自己的特色,前者以形式逻辑方法把全书内容贯穿起来,没有谈到应用问题,后者以问题的性质分类编排,以解应用问题为主,二者相辅相成,共同成为古代数学思想方法的两大源泉。

## 2. 变量数学时期

变量数学时期(17世纪—19世纪中期)是数学方法论的酝酿、孕育阶段,数学方法论的内容得到充实与发展,并在哲学方法论与数学的推动下艰难地前进。这个时期数学发展得很快,取得了许多重要成就,一些数学家、哲学家或兼而有之的学者,也作出了数学方法论研究方面的成果。这里略举几个加以说明。

笛卡儿(Descartes, 1596—1650)在数学上最重要的贡献是创立了解析几何。1637年笛卡儿出版哲学著作《方法论》,其书末有3篇附录,其中之一是《几何学》。《几何学》有三卷,第一卷是将几何问题化为代数问题;第二卷讲述曲线的性质,这是解析几何的开始;第三卷讨论代数方程的理论,给出笛卡儿符号法则。他通过建立坐标系,把几何与代数联系起来研究,用代数方法研究几何,将几何学代数化,并引进“变量”,完成数学史上一项划时代的变革。笛卡儿的方法强调了数学演绎法,并加以哲学上的概括,创立了以数学为基础、演绎法为核心的哲学方法论。应该说,他的方法论,在哲学方法论与数学方法论中都占有一席之地。

牛顿(Newton, 1642—1727)和莱布尼茨(Leibniz, 1646—1716)是创立微积分的两位大师级的数学家。他们在数学、天文学、物理学等方面的贡献是巨大的。牛顿创立的微积分是以运动学为背景的,他在1666年的论文《流数简论》中,已经以速度形式引进了“流数”概念。牛顿微积分学说最早的公开表述是在1687年出版的力学名著《自然哲学的数学原理》之中,这也是数学史上一部划时代的著作。在这部书中,牛顿用数学演绎法建立了古典力学体系。用数学推导取代了逻辑演绎,使得数学在科学中由整理科学知识的工具发展成建构科学的工具,这也是他在方法论上的贡献。莱布尼茨创立的微积分是以几何学为背景的,他用特征三角形引入微积分概念。他于1684年、1686年分别发表论文《一种求极大值与极小值和求切线的新方法》、《深奥的几何与不可分量及无限的分析》,在论文中他阐述了自己的微积分思想,并引进微分记号 $dx$ 、积分记号 $\int$ 。莱布尼茨最早提出科学数学化的方法论思想。他认为,本质上一切科学都能最终化为数学。他非常重视方法论的研究,曾断言:数学的本质不在于它的对象,而在于它的方法,强调了数学方法的地位与作用。

### 3. 现代数学时期

在现代数学时期(19世纪中期—),数学飞跃发展,速度之快、规模之大、抽象程度之高、应用之广泛都是过去不可比拟的。数学方法论在哲学方法论与数学的相互作用、相互结合中形成和得到较快的发展。19世纪末20世纪初,雄视全局的数学家有康托(Cantor, 1845—1918)、希尔伯特(Hilbert, 1862—1943)、庞加莱(Poincare, 1854—1912)等人,他们对数学作出重要贡献的同时,从战略的高度,也在方法论上建立了丰碑。

康托是集合论的创始人,他关于无穷集合与超无穷数理论,不仅给现代数学提供了统一的基础,而且也对数学哲学与数学方法论的发展产生了强烈的影响。康托用他丰富的想象力与创新精神描述了数学无穷世界的图景,还提出“无限是可分层次的”思想,这一点对于数学哲学与数学方法论来说,是奠基性的工作。希尔伯特在不变量理论、几何基础、数学基础等多个领域取得的科研成果中,蕴含着丰富的思想方法。他的数学思想方法的特点是直接攻重大而关键的问题,并取得理论上的突破。希尔伯特的反常规的思想方法,几乎渗透到他所有的科学精神中。他的形式公理化与思想方法直接丰富了数学基础以及数学方法论的知识宝库。庞加莱数学思想方法的特点是:假设、直觉、数学美和事实的选择。他在学术会议上专门作报告《数学上的创造》,对数学创造心理过程作出实际生动又精辟的论述,他是第一次深入探讨数学创造规律的数学家。他充分肯定了

直觉、灵感、数学美在无穷个组合的选择中的作用,提出“有意识工作—无意识工作—有意识工作”的创造模式。可以说,庞加莱是探讨数学中发现、发明与创新理论的奠基人。

近几十年来,数学的发展可以说是日新月异,新的数学理论伴随新的数学方法而出现。许多数学家、数学哲学家、数学教育家重视“介于哲学和数学科学之间的一般方法学”的探索,从各自角度开展研究,对正在形成的数学方法论学科推动很大。国外首推 G. 波利亚(G. Pólya, 1887—1985),国内首推徐利治教授。波利亚是美籍匈牙利数学家、数学教育家,他的三本名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》对世界数学教育产生了巨大的影响,这三本书也是数学方法论的经典著作。他研究的数学启发法,以归纳、类比等非证明推理为主要内容的合情推理模式等都是数学方法论的重要内容。在波利亚的学术论述中,哲学方法论、数学、数学教育是有机结合并融为一体的。徐利治教授是著名的数学家,当别人问及他的成就如何介绍时,他意味深长地讲:数学方法学。这决不是一时的冲动,是数学家本人从心里认为,他具体的数学成就,没有在数学哲学与方法论层次的有效工作更加有意义,表现出他的远见卓识与大家风范。多年来,徐利治教授就积极倡导并推进数学方法论的教学与研究,他与他的学生们在数学模式真理观、数学真理度、数学抽象分析法、数学直觉层次性、关系映射反演(RMI)原理等方面的成果,极大地丰富了正在形成的数学方法论学科的内容,这些首创成果,为今后进一步的研究打下了基础,体现了他“方法引路在先,哲学思索在后”的创造风格。

从数学方法论产生与发展简述的历史可以看出,数学方法论是在数学与哲学方法论的发展中,酝酿、孕育、成长起来的。数学的突飞猛进带动了数学方法论的改进,同时,数学在一定程度上又受到数学方法论的制约与反作用。数学方法的积累,以及一些数学基础问题的解决,为数学方法论的大厦添砖加瓦。在总结各个时代科学(包括数学)成就的基础上,概括形成的哲学方法论,则从总的指导思想与方法原理方面,为数学方法论的前进指明了方向。数学方法论就在这两个分支的相互作用、相互结合、相互渗透中形成雏形,并不断充实与发展。

## 二、数学方法论的体系结构以及与数学教育的关系

### 1. 数学方法论的体系结构

数学方法论从哲学方法论和数学中孕育出来,但并非等同母体学科,而是具有自身特点的体系结构。

徐利治教授在《数学方法论选讲》、《数学方法论教程》、《徐利治论数学方法学》

等著作中,将数学方法论划分为宏观的数学方法论与微观的数学方法论,前者包括数学发展规律、数学家成长规律分析等,后者包括数学模型方法、关系映射反映原理、公理化方法、结构主义方法、抽象度分析法、数学直觉思维、数学美学等。数学哲学家郑毓信教授(1944—)在《数学方法论》、《数学思维与数学方法论》、《数学方法论入门》等著作中,把数学活动论、数学文化论等纳入宏观的数学方法论范畴,把波利亚的数学启发法、数学中的非逻辑成分(如数学美、数学直觉)等纳入微观的数学方法论范畴。又经过多年的研究与积累,近年由徐利治、王光明教授撰写的《数学方法论选读》一书中,把数学方法论的内容体系列成图 1.1。

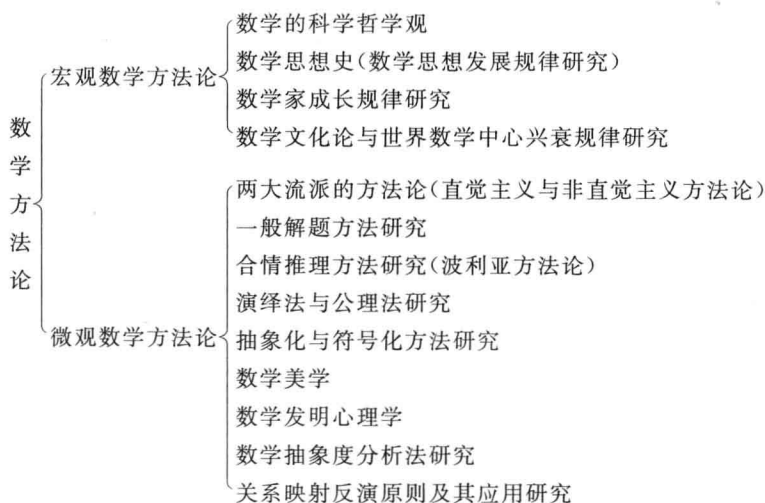


图 1.1

尽管目前关于数学方法论(或数学方法学)的体系与研究的内涵上还有不同意见,但从上述徐利治、郑毓信等教授的著作,以及国内一些对数学方法论初步形成的体系与结构的论述,笔者认为,宏观数学方法论应该主要从社会生产实践、科技与人才发展规律角度进行研究,并带有浓厚的哲学方法论与人文社会科学色彩,当然,也结合了数学史和数学哲学的内容。微观数学方法论研究的重点应该是数学思想方法与数学中发现、发明与创新等法则。数学思想方法不仅包括数学本身独有的方法、形成数学体系的方法,还包括逻辑方法与非逻辑方法在数学中的有机结合与应用。这些方法既有哲学方法论层次的气息,又有数学的特点,还有浓厚的数学教育的味道,是哲学方法论与数学的交叉。数学中发现、发明与创新法则是数学发现应该遵守的规律,不管你是否承认,当你在从事数学研究与发现时,总会在

接受某种观念与思想的指导,这种观念与思想是相当重要的,数学方法论将此纳入自己的范围是必然的,对数学教育与科研而言,是有益的。波利亚数学思想既是数学思想方法,又是数学教育中概括总结出来的理论,同时也是数学方法论的具体内容。笔者认为,数学方法论的体系结构可以用图 1.2 表示。

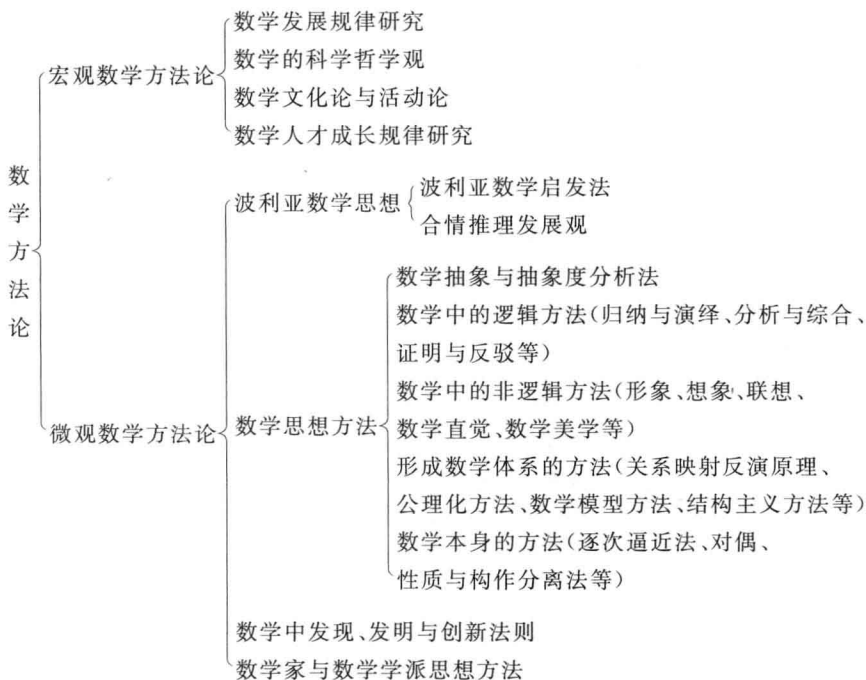


图 1.2

徐利治教授曾指出:“简单地说,学习和研究数学方法论的目的无非是为了正确地认识数学,有效地运用数学以及很好地发展数学。”数学方法论这个学科创立就是以正确认识、有效运用与很好发展数学为目的的,上述内容,正是长期在数学科研与教育实践中积累与形成的。尽管这些内容今后还会有取舍,并有待进一步加工完善,不断修正改进,但这个体系结构应该还是比较符合 30 年来数学方法论研究与发展实际的,也是广大数学工作者与数学教育工作者充分肯定与具体实际应用的。

## 2. 数学方法论与数学教育的关系

数学方法论在我国一产生,就深深扎在数学教育实践之中。1980 年以来,在徐利治教授的倡导与亲自授课的推动下,数学方法论已经成为数学教育界的一门

重要课程,在教师教育与高等师范院校中开设,成立了相应的研究中心,培养了一批数学方法论方向的研究生,出了一批数学方法论的著作、教材与丛书。在数学教育的研究领域,许多学者把数学方法论与数学课程论、数学教学论、数学学习论并列,成为4个有机组成部分之一,鲜明地提出把数学方法论纳入数学教育体系之中。如早在1993年,郑毓信教授在关于数学教育学新的理论框架中就把数学方法论排在数学课程论后,名列第二位。这一方面是目前数学方法论还未形成完善体系,所积累的许多内容大都与数学教育紧密相连,另一方面是数学教育要跳出传统的旧框框,成为演好数学教育的剧本与设计的指导书,也要有知识即思想方法的支撑。实践已经证明,数学方法论对数学教育改革起着核心思维与催化剂的作用。

数学方法论的生命力在于数学教育。实施了多年的“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质”的数学教育实验方案(简称MM实验),是以无锡特级教师徐沥泉先生牵头的教学实验组实施的,后来在天津、江苏、湖北、新疆等地扩展,形成规模实验,已经取得可喜的成绩。实验教师从他们的教学设计中体验与总结出多条数学教学的狭义性原则(其中最能体现MM特色的是“教学、研究、发现”同步协调原则,“既教猜想又教证明”的原则,适度强化原则,优势迁移原则与教学相长原则),促进数学教学中的许多发现,又在提高学生科学素养的同时,提高了学习成绩,发展了学生的数学品质。全国数学方法论与数学教育学术研讨会已开过十多届,会议认真探讨波利亚数学思想与数学方法论中的重要问题,总结与探索MM实验的经验,锻炼与提高这方面研究与实验的队伍,推动MM实验向纵深发展。近年来,MM教育方式又有了新的发展,如高效和谐的数学教育方式(简称GH数学教育方式)。GH数学教育方式是以数学方法论的运用为其教学策略,追求数学教学的高效率,注重数学素质的培养,提高学生数学文化修养,促进学生全面和谐发展。这两个实验的丰硕成果,充分说明了数学方法论的方式对于数学教育来讲,是指导思想与观念层面上的,起着把向与支撑作用的,也说明数学方法论是一门典型的数学教育实践的学科。

美国《数学评论》杂志研究主题的分类法中,列出两项有关数学教育的研究主题:00—01 教学阐述(教科书、教学论文等),00A35 数学方法论、教学法。把数学方法论与教学法并列在一起,且不讨论他们所命名的数学方法论内容与中国的数学方法论有多少内容相同,多少内容不同,只说明数学方法论与数学教育有着血肉的联系。

总之,可以这么说,数学方法论是哲学方法论与数学交叉的数学教育分支,是带有人文精神与科学精神的数学教育分支。



## 1.2 从数学学科发展史看数学研究对象的历史演变

徐利治、王光明教授曾指出：“考察数学对象的历史演变，总结前人在理解数学对象时的经验教训，无疑对今天的数学教育有着重要的启发意义。”数学研究对象的历史演变及存在方式是数学本体论的主要问题，也是宏观数学方法论必须讨论的问题。对于学数学、教数学、研究数学的人来说，这些都是回避不了的。

本节通过数学学科发展史的事实，了解数学学科分支的形成与发展，探索数学研究对象的历史演变，对这个争论甚久、尚无定论的课题，从数学发展的、变迁的探索中，谈谈笔者的看法。

### 一、19世纪以前数学研究的对象

人类社会从石器时代开始就已经学会制造石头武器，发明弓箭，制作简单器具，丈量土地，以及对打猎的动物进行分配，这就开始接触“数与形”，记数法开始出现，并得出初步的长度、面积与容积的度量，这是早期数学研究对象的写照。

后来，数学进入常量数学时期与变量数学初中期（前6世纪—18世纪），经过漫长的一千多年，数学领域逐渐形成的分支有：算术、初等代数、几何学、分析学等，19世纪以前数学研究的对象是“数与形及其之间的关系”。

#### 1. 算术

算术，英文为 arithmetic，源于希腊文，是“数数(shǔ shù)”的意思。算术研究的数，是人类在生产劳动与日常生活中，由于计数的需要，而产生于“数数(shǔ shù)”与测量的实践活动。这是数的概念的第一次抽象。最初是自然数的概念，尔后才出现分数等概念。古希腊算术多半是把数归结为几何图形，数是线段，乘积是面积，后来，欧几里得在算术方面做的工作，都是采用这种几何的方法。而中国古代算术与此不同，特别重视对数的运算、计算方法的研究，甚至将几何问题转化为数的计算问题，这方面《九章算术》都有详细的记载。

算术研究的是离散固定的数，它是研究数及数集上的运算的数学分支。它包括数的概念、计算方法、各类数的运算、数的性质、简单的应用题、数集的公理结构等内容。算术研究整数的性质，后来经过长期积累发展成为初等数论，而算术的公理化体系直到19世纪才全部完成。

#### 2. 初等代数

初等代数也称古典代数，它是研究数字和文字的代数运算理论和方法的数学分支，更确切地说，是研究实数和复数，以及以它们为系数的多项式的代数运算理