高等职业教育“十二五”规划教材

经济数学

刘喜梅　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等职业教育“十二五”规划教材

经济数学

刘喜梅 主 编
常瑞玲 郭 新 副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书根据《高职高专教育数学课程教学基本要求》编写，力争体现当前高职高专教学改革方针，并结合经管类专业特点和当前学生基础。本书主要包括函数、极限与连续、一元函数微积分、多元函数微分、线性代数、概率初步理论和数理统计等内容。

本书适合作为高职高专经管类专业的数学教材，也可供成人教育相关专业的读者学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学／刘喜梅主编．—北京：中国铁道出版社，2011.8

高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-13065-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①经济数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 155334 号

书　　名：经济数学

作　　者：刘喜梅　主编

策划编辑：李小军　　　　**读者热线：**400-668-0820

责任编辑：李小军　邓　静

封面设计：付　巍　　　　**封面制作：**白　雪

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街 8 号　　**邮政编码：**100054）

印　　刷：三河市文昌印刷装订厂

版　　次：2011 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 1 次印刷

开　　本：700 mm×1 000 mm　1/16　　**印张：**16.75　　**字数：**336 千

印　　数：2 000 册

书　　号：ISBN 978-7-113-13065-7

定　　价：27.00 元

版权所有　侵权必究

凡购买铁道版图书，如有印制质量问题，请与本社教材研究开发中心批销部联系调换。

前　言

本教材的编写致力于体现当前高职高专教学改革的指导方针，认真贯彻“理论适度够用，强化技能培养，服务专业教学需求，突出职教改革方向”的指导思想，使课程结构和教学内容更加符合高职高专经管类专业学生的知识需求和接受能力。教材在具体编写过程中，遵循“突出思想分析，立足能力培养，强化动手技能，解决实际问题”的原则，力求将数学思想融入数学教学过程中，体现**学习数学的目的在于应用的理念；强调数学学科与相关学科之间的横向联系**，拓宽基础知识面，使**一般能力的培养与职业能力相结合**。结合经管类专业的特点及学生的学习特点，教材力求**用通俗的语言讲清概念，减少理论求证；注意培养学生的基本运算能力和解决实际问题能力。**

为便于学生学习和巩固知识，在各节后均配备了一定数量的习题，在每章后还配备本章复习题。一方面为学生巩固所学知识和技能，另一方面为不同层次的学生学习提供更多的选择空间。

本教材所需教学课时约为120学时。带*的章节为选学内容，可根据具体专业选择。

本书由刘喜梅担任主编，常瑞玲、郭新担任副主编。参加本书编写的有刘喜梅、常瑞玲、郭新、张敬坤、张先荣、王晓东、郭兵波、刘艳苹。

在此谨向在本书编写出版过程中，提供帮助和支持的所有同志致以衷心感谢！对所参考的文献的作者表示感谢！

尽管我们在本教材的编写过程中下了很多工夫，但由于水平有限，缺点、错误在所难免，恳请专家、同行、读者批评指正。

编　者

2011.7

目　　录

第一章　函　数 …… 1
第一节　集合与函数 …… 1
第二节　函数的表示法 …… 4
第三节　函数的性质 …… 6
第四节　反函数 …… 9
第五节　基本初等函数、复合函数、初等函数 …… 10
第六节　经济学中常用的几种函数 …… 14
*第七节　利息与贴现 …… 17
*第八节　一些常用公式 …… 19
复习题一 …… 21
第二章　极限与连续 …… 23
第一节　数列的极限 …… 23
第二节　函数的极限 …… 25
第三节　无穷小量与无穷大量及其关系 …… 29
第四节　极限的四则运算法则 …… 32
第五节　两个重要极限 …… 35
第六节　函数的连续性 …… 39
复习题二 …… 45
第三章　导数与微分 …… 48
第一节　导数的概念 …… 48
第二节　导数的运算 …… 52
第三节　微分及其应用 …… 58
复习题三 …… 62
第四章　导数的应用 …… 64
第一节　微分中值定理　洛必达法则 …… 64
第二节　函数的单调性与极值 …… 69
第三节　导数在经济学中的应用 …… 75
复习题四 …… 79
第五章　不定积分 …… 81
第一节　不定积分的概念 …… 81
第二节　不定积分的性质与基本公式 …… 84
第三节　换元积分法 …… 87

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第四节 分部积分法 …… 93

*第五节 简易微分方程 …… 96

复习题五 …… 100

第六章 定积分 …… 102

第一节 定积分的概念及性质 …… 102

第二节 微积分基本定理 …… 108

第三节 定积分的积分法 …… 112

第四节 广义积分 …… 115

第五节 定积分的应用 …… 119

复习题六 …… 123

第七章 多元函数微分学 …… 125

第一节 平面区域与空间直角坐标系 …… 125

第二节 二元函数 …… 127

第三节 偏导数 …… 130

第四节 全微分 …… 133

*第五节 复合函数与隐函数的微分法 …… 134

复习题七 …… 137

第八章 行列式 …… 138

第一节 排列与对换 …… 138

第二节 n 阶行列式的定义 …… 139

第三节 n 阶行列式的性质 …… 146

第四节 克拉默(Cramer)法则 …… 150

复习题八 …… 152

第九章 矩 阵 …… 153

第一节 矩阵的概念 …… 153

第二节 矩阵的运算 …… 156

第三节 矩阵的逆 …… 163

第四节 初等矩阵 …… 165

第五节 矩阵的秩 …… 169

复习题九 …… 171

第十章 线性方程组 …… 172

第一节 一般线性方程组 …… 172

第二节 一般线性方程组的解法 …… 173

第三节 线性方程组解的判定 …… 178

复习题十 …… 180

第十一章 概率初步理论 …… 182

第一节 随机事件 …… 182

第二节 频率与概率 …… 187

第三节 等可能(古典)概型 …… 190
第四节 条件概率与全概率公式 …… 192
第五节 随机变量及其分布 …… 198
第六节 随机变量的数字特征 …… 207
复习题十一 …… 213
第十二章 数理统计初步理论 …… 215
第一节 总体及随机样本 …… 215
第二节 抽样分布 …… 218
第三节 参数估计 …… 222
第四节 参数的区间估计 …… 226
第五节 参数的假设检验 …… 229
复习题十二 …… 233
附 录 …… 235
附录 A 泊松分布表 …… 235
附录 B 标准正态分布表 …… 237
附录 C χ^2 分布表 …… 238
附录 D t 分布表 …… 240
附录 E 希腊字母表 …… 241
习题参考答案 …… 242

第一章

函　数

微积分是高等数学的最重要的概念，它以函数为研究对象。本章将在中学数学已有函数知识的基础上进一步理解函数概念，并介绍反函数、复合函数及初等函数的主要性质，为微积分的学习打下基础.

第一节　集合与函数

一、集合的概念

1. 集合

集合是现代数学中最基本的概念，它已渗透到现代数学的各个分支，集合不能用更简单的概念来定义，只能用描述的方式来加以定义.

定义 1　一般地，具有某种确定性质的对象的全体称为**集合**，简称为**集**.

例如：一个教室里的全体学生；所有正偶数的全体；某三角形内所有的点，等等，它们都是集合. 其中的对象称为集合的元素. 通常以大写拉丁字母 A、B、C 等表示集合，而以小写拉丁字母 a、b、c 等表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$（读作 a 属于 A）；若 a 不是集合 A 的元素，记作 $a\notin A$（读作 a 不属于 A）.

一般地，常用的集合表示法有两种：一种是列举法，就是按任意顺序列出集合的所有元素，并用“{ }”括起来.

【例 1】　24 的约数的集合 A，可表示为 $A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

【例 2】　方程 $x^2-3x+2=0$ 的根所组成的集合 B，可表示为 $B=\{1,2\}$.

另一种是描述法，它的一般形式是：

$$A=\{x\,|\,x \text{ 具有性质 } P\}.$$

其中 P 是关于 x 的某个性质，即 $a\in A$ 的充要条件是 a 满足性质 P.

【例 3】　全体奇数的集合 C，可表示为：

$$C=\{x\,|\,x=2n+1,n \text{ 为整数}\}.$$

由某些数组成的集合称为**数集**. 例如全体自然数组成自然数集，用符号 $\mathbf{N}$ 表示；全体正整数组成正整数集，用符号 $\mathbf{N}_+$ 表示；全体整数组成整数集，用符号 $\mathbf{Z}$ 表示；全体有理数组成有理数集，用符号 $\mathbf{Q}$ 表示；全体实数组成实数集，用 $\mathbf{R}$ 表示等.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 例如，集合$\{x|x\in\mathbf{R},x^2+x+1=0\}$是空集.

以后用到的集合主要是数集，即集合中的元素都是数，如果没有特别说明，以后用到的数均指实数.

2. 区间

高等数学中，常用的集合是区间. 介于两个实数间的全体实数构成的集合称为**区间**，这两个实数称为**区间端点**，两端点间的距离称为区间的**长度**. 常见的区间有以下几种，如表 1.1 所列.

表 1.1

区间	区间符号	区间名称	区间定义
有限区间	(a,b)	开区间	$\{x\|a<x<b\}$
	$[a,b]$	闭区间	$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$
	$(a,b]$	左开右闭	$\{x\|a<x\leqslant b\}$
	$[a,b)$	左闭右开	$\{x\|a\leqslant x<b\}$
无穷区间	$(a,+\infty)$	无穷开区间	$\{x\|x>a\}$
	$[a,+\infty)$	无穷半闭区间	$\{x\|x\geqslant a\}$
	$(-\infty,b)$	无穷开区间	$\{x\|x<b\}$
	$(-\infty,b]$	无穷半闭区间	$\{x\|x\leqslant b\}$
	$(-\infty,+\infty)$	无穷区间	$\{x\|-\infty<x<+\infty\}$

3. 邻域

定义 2 设$a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，数集$\{x||x-a|<\delta\}$，即实数轴上和$a$点的距离小于$\delta$的点的全体，称为点$a$的$\delta$**邻域**，记作$U(a,\delta)$.

如图 1-1-1(a)所示，点a与数δ分别称为这邻域的**中心**和**半径**. 有时用$U(a)$表示点a的一个泛指的**邻域**. 数集$\{x|0<|x-a|<\delta\}$称为点a的**去心δ邻域**，记作$U^0(a,\delta)$或$U^0(a)$，如图 1-1-1(b)所示.

图 1-1-1

显然，$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$U^0(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

二、函数的概念

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量常常不是孤立的，而是相互影响

相互制约的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化，如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么称这些变量之间存在着函数关系.

定义 3　设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，任取 $x\in D$，变量 y 依照某个对应规则（如 f）总有唯一确定的数值与之对应，记作 $f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的**函数**. 这里 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

定义域和对应规则是确定函数的两个要素，只有当两个函数的定义域和对应规则都相同时，才认为这两个函数是相同的，否则认为是不同的函数.

例如，$y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=x$ 因为定义域不同，所以不表示同一个函数；同理，$y=2\ln x$，$y=\ln x^2$ 不表示同一个函数，而 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$ 则表示同一个函数.

【例 4】　中央电视台每天都播放天气预报，经统计，某地 1999 年 9 月 19 日—29 日每天的最高气温如表 1.2 所示.

表 1.2

日期 9 月 t(日)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温 N(℃)	28	28	27	25	24	26	27	25	23	22	21

表 1.2 表示了某地的最高气温 N 随日期 t 变化的函数关系，它的定义域 $D=\{19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29\}$

【例 5】　已知 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，求：$f(-1)$，$f(0)$，$f(x^2+1)$，$f(x-1)$.

解　$f(-1)=\dfrac{1+(-1)}{1-(-1)}=0$；$f(0)=\dfrac{1+0}{1-0}=1$；

$f(x^2+1)=\dfrac{1+(x^2+1)}{1-(x^2+1)}=\dfrac{2+x^2}{-x^2}$；$f(x-1)=\dfrac{1+(x-1)}{1-(x-1)}=\dfrac{x}{2-x}$.

【例 6】　求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+\sqrt{9-x^2}$；　　(2) $f(x)=\log_2(4x+3)$；

(3) $f(x)=\arccos(3x-2)$；　　(4) $f(x)=\dfrac{\lg(x-1)}{\sqrt{x+1}}$.

解　(1) 在分式 $\dfrac{1}{x-3}$ 中，分母不能为零，所以 $x-3\neq 0$，解得 $x\neq 3$；

对于 $\sqrt{9-x^2}$，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$.

综上，定义域为 $[-3,3)$.

(2) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x+3>0$，解得 $x>-\dfrac{3}{4}$，即定义域为 $\left(-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

(3)反余弦符号后面的式子的绝对值必须小于等于1,所以有$-1\leqslant 3x-2\leqslant 1$,解得$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$,即定义域为$\left[\frac{1}{3},1\right]$.

(4)对于$\frac{\lg(x-1)}{\sqrt{x+1}}$,必须有$\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases}$,解得$x>1$,即定义域为$(1,+\infty)$.

注意:函数的定义域,对于具有实际意义的函数来说,则要按实际意义来确定;对于抽象地用公式表达的函数,其定义域是使公式有意义的自变量的一切取值.例如,圆面积S与半径R之间的函数关系为$S=\pi R^2$,这时它的定义域为$(0,+\infty)$,但抛开实际含义考虑函数$y=\pi R^2$的定义域,则应该为$(-\infty,+\infty)$.

第二节　函数的表示法

常用的函数表示法有三种:解析法、表格法和图像法.

一、概念

解析法　把两个变量之间的函数关系用数学式子来表示的方法,叫做解析法.用解析法表示函数,变量之间的数量关系明确,便于理论分析.例如,$y=x^3+2x^2+1$,$y=\sqrt[3]{x^2+2}$等就是用解析法表示的函数.

表格法　把两个变量之间的对应值列成表格来表示函数关系的方法,叫做表格法.用表格法表示函数,变量之间的函数关系一目了然,应用方便.数学用表中的平方表、立方表等都是用表格法表示的函数.

图像法　用平面直角坐标系中的几何图形表示两个变量之间的函数关系,叫作图像法.用图像法表示函数,变量之间的关系形象直观.

分段函数　有些函数对于定义域内自变量x的不同值,不能用一个统一的数学解析式表示出来,而要用两个或两个以上的解析式来表示,这种在自变量的不同取值范围内用不同的解析式表示的函数称为分段函数.

注意:(1)分段函数是由几个对应关系式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数,在科技、工程等实际应用中经常用到.

(2)分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

(3)在求分段函数的函数值时,应先确定自变量的取值范围,再按相应的式子计算.

【例1】　设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & 当\ x>0\\2 & 当\ x=0,\\3x & 当\ x<0\end{cases}$

求$f(0)$,$f(2)$,$f(-5)$及函数的定义域并作图.

解　因为$x=0$时,$f(x)=2$,所以$f(0)=2$;

因为$2\in(0,+\infty)$,所以$f(2)=2^2+1=5$;

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

因为 $-5\in(-\infty,0)$，所以 $f(-5)=3\times(-5)=-15$.

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 函数图形如图 1-2-1所示.

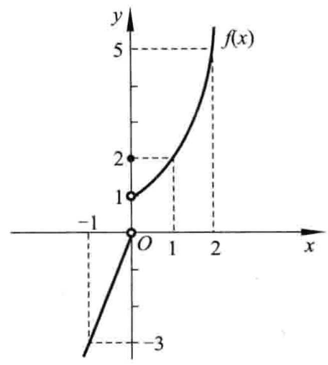

图 1-2-1

【例 2】 用分段函数表示函数 $y=3-|2-x|$，并画出其图形.

解 根据绝对值定义可知，当 $x\leqslant 2$ 时，$|2-x|=2-x$；当 $x>2$ 时，$|2-x|=x-2$. 于是有

$$y=\begin{cases}3-(2-x) & 当\ x\leqslant 2\\ 3-(x-2) & 当\ x>2\end{cases},$$

即

$$y=\begin{cases}1+x & 当\ x\leqslant 2\\ 5-x & 当\ x>2\end{cases}.$$

函数图形如图 1-2-2 所示.

【例 3】 绝对值函数：$y=|x|=\begin{cases}x & 当\ x\geqslant 0\\ -x & 当\ x<0\end{cases}$.

它的图像如图 1-2-3 所示.

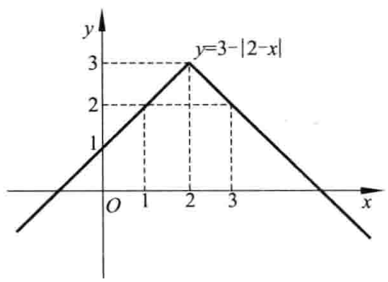

图 1-2-2

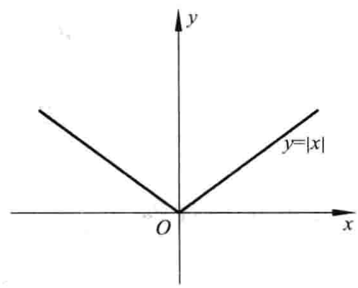

图 1-2-3

二、常见分段函数

1. 取整函数

$$y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n\in\mathbf{Z}.$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，即若 $n\leqslant x<n+1$，则 $[x]=n$（n 为整数）. 因此其数学表达式为

$$[x]=\begin{cases}\cdots & \cdots\\ -2 & 当\ -2\leqslant x<-1\\ -1 & 当\ -1\leqslant x<0\\ 0 & 当\ 0\leqslant x<1\\ 1 & 当\ 1\leqslant x<2\\ 2 & 当\ 2\leqslant x<3\\ \cdots & \cdots\cdots\end{cases}.$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数(见图1-2-4).

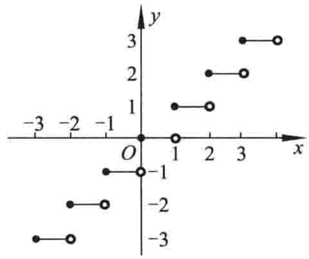

图 1-2-4

2. 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0 \\ 0 & \text{当 } x=0. \\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域$\{-1,0,1\}$(见图 1-2-5). 有时可以运用它将某些分段函数写得简洁一些.

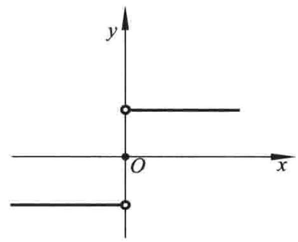

图 1-2-5

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2} & \text{当 } x\leqslant 0 \\ x\sqrt{1+x^2} & \text{当 } x>0\end{cases}$

可以记为 $f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{sgn} x$.

又如，$|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.

以上 $\operatorname{sgn} x$ 起了符号的作用，因此称为**符号函数**.

3. 狄利克莱函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in\mathbf{Q} \\ 0 & \text{当 } x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}.$$

第三节　函数的性质

一、函数的奇偶性

定义 1　设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$)，如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**；如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**；否则称 $f(x)$为**非奇非偶函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称；奇函数的图像关于原点对称.

【例 1】　判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=x^2+3x^4$；　(2)$f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$；　(3)$f(x)=x^3+\cos x$.

解　(1)因为 $f(-x)=(-x)^2+3(-x)^4=x^2+3x^4=f(x)$，所以 $f(x)=x^2+3x^4$ 是偶函数.

(2)因为 $f(-x)=(-x)^3+\dfrac{1}{-x}=-x^3-\dfrac{1}{x}=-\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，所以 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$是奇函数.

(3)$f(-x)=(-x)^3+\cos(-x)=-x^3+\cos x\neq f(x)$，同样可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=x^3+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

二、函数的单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$在(a,b)内是**严格单调增加（或减少）**的；如果对于(a,b)内的任意两点 x_1和 x_2，当 $x_1<x_2$时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$在(a,b)内是**单调增加（或减少）**的.

严格单调增加函数与严格单调减少函数统称为**严格单调函数**.使函数严格单调的区间称为函数的**严格单调区间**.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.使函数单调的区间称为函数的**单调区间**.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的；单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的.

【例 2】　讨论函数 $y=x^2$的单调性.

解　$y=x^2$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

在区间$(-\infty,+\infty)$内任取两点 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2).$$

在$(-\infty,0)$内，则有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $y=x^2$在$(-\infty,0)$内单调减少；

在$(0,+\infty)$内，则有 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x^2$在$(0,+\infty)$内单调增加.

三、函数的周期性

定义 3　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，如果存在正数 T，对任意的 $x\in D$，使 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称此函数为**周期函数**. T 称为函数 $y=f(x)$的**周期**.

对于每个周期函数来说，定义中的 T 有无穷多个，因为如果 $f(x+T)=f(x)$，那么就有：

$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$；

$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f(x)$，等等.

可知，对于以 T 为周期的函数，自变量每增加 T，函数值就重复一次，因此，只需研究一个周期内函数的性态，便可推知函数在整个定义域上的性态.若函数 $f(x)$有最小的正周期，通常将这个最小正周期称为函数 $f(x)$的**基本周期**，简称为**周期**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的函数.

【例 3】 设函数 $y=f(x)$是以 ω 为周期的周期函数,试证函数 $y=f(ax)(a>0)$是以$\frac{\omega}{a}$为周期的周期函数.

证明 要证的是:$y=f(ax)=f\left(a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right)$.

因为 $f(x)$以 ω 为周期,所以 $f(ax)=f(ax+\omega)=f\left(a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right)$,所以 $f(ax)$是以$\frac{\omega}{a}$为周期的周期函数.

例如 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数,所以 $y=\sin 2x, y=\cos\frac{1}{2}x$ 的周期分别是 π 和 4π.

四、函数的有界性

定义 4 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 D 上是**有界**的. 如果不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$在 D 上是**无界**的.

显然,函数 $f(x)$在区间 I 上有界$\Leftrightarrow$函数 $f(x)$在区间 I 上既有上界又有下界$\Leftrightarrow$存在闭区间$[-M,M](M>0)$,使$\{f(x)|x\in I\}\subset[-M,M]$.

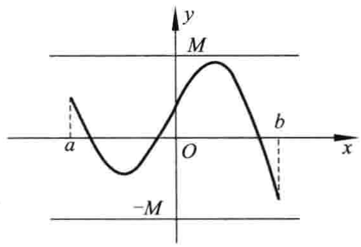

图 1-3-1

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界的几何意义是:存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$,函数 $y=f(x)$的图像位于以这两条直线为边界的带形区域之内,如图 1-3-1 所示.

如果 $f(x)$在定义域 D 上有界,则称 $f(x)$为**有界函数**. 例如函数 $\sin x$ 是有界函数. 函数 $\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的,但它在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上是有界的.

注意:(1)函数 $y=f(x)$在(a,b)内有界时,正数 M 不是唯一的. 例如,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,即$|\sin x|\leqslant 1$,但也可取 $M=2$,即$|\sin x|<2$,事实上,任何大于 1 的数都可取为 M.

(2)函数的有界性除了与函数本身有关外,还与所讨论的区间有关. 例如,$y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$内是无界的,但在区间$(1,+\infty)$内是有界的.

第四节　反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 A，则 $\forall x\in D$，按照对应关系 f，对应唯一一个 $y\in A$. 反之，$\forall y\in A$，能否对应唯一一个 $x\in D$，使 $y=f(x)$ 成立呢？这就是这节要讨论的问题.

若 $\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 是 D 与 A 间的**一一对应**. 否则称函数 $y=f(x)$ 是 D 与 A 间的非一一对应.

【例 1】　$y=\log_3 x$，$D=\{x\,|\,x>0\}$，$A=\mathbf{R}$，是 D 与 A 间的一一对应；

$y=x^2$，$D=\mathbf{R}$，$A=\{x\,|\,x\geqslant 0\}$，是 D 与 A 间的非一一对应.

一般来说，函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 与其值域 A 间是非一一对应. 但也存在这样的函数，它在定义域的某个子集 I 与其对应的值域 $f(I)$ 间是一一对应.

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$I\subset D$. 当 $x\in I$ 时，$y\in f(I)$. 如果 $y=f(x)$ 是 I 与 $f(I)$ 间的一一对应，则 $\forall y\in f(I)$，有唯一一个 $x\in I$ 与之对应，使 $f(x)=y$，即在 $f(I)$ 上定义了一个函数，则称此函数是函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(I)$.

如函数 $y=x^2$ 的定义域是 $D=\mathbf{R}$，值域是 $A=[0,+\infty)$，它在整个定义域上没有反函数. 但当 $x\in I=[0,+\infty)\subset D$ 或 $x\in I=(-\infty,0]\subset D$ 时，$y=x^2$ 分别有反函数 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$，它们的定义域都是 $f(I)=[0,+\infty)$，而值域分别是 $I=[0,+\infty)$ 和 $I=(-\infty,0]$.

显然，如果 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，即它们互为反函数. 并且，如果函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域 A 和定义域 D. 于是有

$$f^{-1}(f(x))\equiv x,x\in D;\quad f(f^{-1}(y))\equiv y,y\in A.$$

如函数 $y=x^3$ 在它的定义域 $\mathbf{R}$ 上存在反函数 $x=\sqrt[3]{y}$，$x=\sqrt[3]{y}$ 的定义域是 $y=x^3$ 的值域 $\mathbf{R}$，而其值域是 $y=x^3$ 的定义域 $\mathbf{R}$.

习惯上，总是以 x 表示自变量，用 y 表示自变量的函数，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$. 例如：函数 $y=3x-2$ 的反函数是 $x=\dfrac{y+2}{3}$，要改写为 $y=\dfrac{x+2}{3}$. 一般所说的反函数都是指改写后的函数.

注意：(1)并不是所有的函数都有反函数. 严格单调的函数必存在反函数.

(2)函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像，在坐标平面上是同一点集. 当把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调后，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的步骤为：

(1)从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2)交换 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x 和 y 的位置.

【例 2】 求函数 $y=\frac{x+1}{4}$ 的反函数.

解 由函数 $y=\frac{y+1}{4}$ 解得 $x=4y-1$，然后交换 x 和 y，得 $y=4x-1$，即 $y=\frac{x+1}{4}$ 的反函数是 $y=4x-1$.

第五节 基本初等函数、复合函数、初等函数

一、基本初等函数

把中学学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

基本初等函数是研究其他更为复杂函数的基础，以下将复习它们的定义域、值域、图像和性质.

1. 幂函数

形如 $y=x^{\alpha}$（常数 $\alpha\in\mathbf{R}$）的函数称为**幂函数**. 其定义域及其性质与 α 的取值有关，但对任意 $\alpha\in\mathbf{R}$，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内都有意义.

为了便于比较，这里只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形，而 $x<0$ 时的情形可根据函数的奇偶性确定.

当 $\alpha>0$ 时，函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界；

当 $\alpha<0$ 时，图像不过原点，但仍过点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少、无界，曲线以坐标轴为渐近线.

图 1-5-1 中画出了 $\alpha=\pm 1$，$\alpha=2$，$\alpha=\frac{1}{3}$ 的情形.

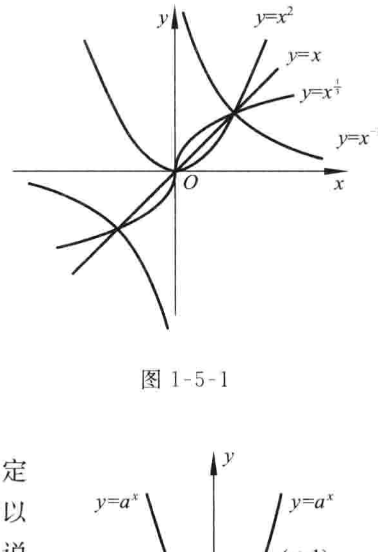

图 1-5-1

2. 指数函数

形如 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$ 的函数称为**指数函数**. 其定义域为 $\mathbf{R}$，由于无论 x 取何值，总有 $a^{x}>0$ 且 $a^{0}=1$，所以它的图像全部在 x 轴上方，且都通过点 $(0,1)$. 也就是说它的值域是 $(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 x 轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 x 轴为渐近线. 如图 1-5-2 所示.

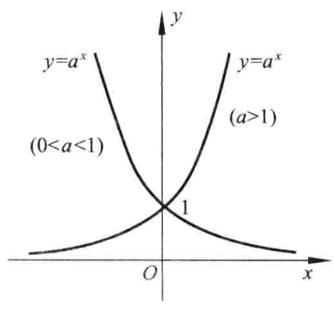

图 1-5-2

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com