互動數學 3B

蘇一方
黃鳴嬋

教師版

隨課本附送
唯讀光碟 3

唯讀光碟

互動數學 3B

蘇一方
黃鳴嬋

教師版

文達出版(香港)有限公司
MANHATTAN PRESS (H.K.) LTD.

出版　文達出版（香港）有限公司
香港新界葵涌華星街八至十號
華達工業中心 B 座六樓一至六室

第一版　1999 年

印刷　亨泰印刷（香港）有限公司

ISBN 962-342-630-5（學生版）
ISBN 962-342-721-2（教師版）

隨書附送之唯讀光碟 3B 並非課本的一部分，只作為額外的補充學習材料，學生可沿用無唯讀光碟 3B 附送之課本。出版社亦有獨立的唯讀光碟 3B 可供購買。

編務統籌　莫玉倩
責任編輯　莫玉倩、黃大文
助理編輯　張敏儀、何凱斯
設計　李冠華、岑天駿
攝影　王穎灝
製作及繪圖　鄭海勳、曾文君、李冠華、余育銓、梁詠珍、馮秀儀、李仕平、孔富玲、李月娟

序言

互動數學乃依據香港課程發展議會所頒佈的數學課程綱要編寫的。適合中一至中三的學生，共分六冊。

在數學教學中，重要的是要使學生概念清楚，運算熟練，並能夠靈活運用。這也是本書編者所追求的目標。而為配合母語教學的推行，本書用中文編寫，因而可全面、清晰及深入地用流暢淺白的文字去闡述及解釋所討論的課題，使學生能有效地利用本教科書，從而更輕鬆地學習數學科。

再者，為體現數學教育的精神和目標，故無論是教材或練習的編寫與挑選都非常著重數學基本知識的理解、技能的學習以及思考、探索和解決問題的訓練。本書精心挑選了內容豐富的例題，配合詳盡的題解，由各個角度示範數學公式及技巧的使用方法。同時在例題右側設置課堂練習，方便學生即時練習，以鞏固所學的知識。此外，本書提供的習題編排由易至難，由淺入深，循序漸進。既使一般學生掌握基本的答題技巧，獲得學習滿足感，亦使能力較高的學生的思考、分析及解決問題的能力得以進一步提高。

為了使學生領略數學的趣味性及提高學習的興趣，本書搜集了一些數學史上的趣聞軼事，趣味數學及富有啟發性的猜想問題，以拓廣學生的思路。書中亦附有大量配合課文既美觀又有趣的插圖，及富有幽默感的漫畫，圖文並茂，生動活潑。

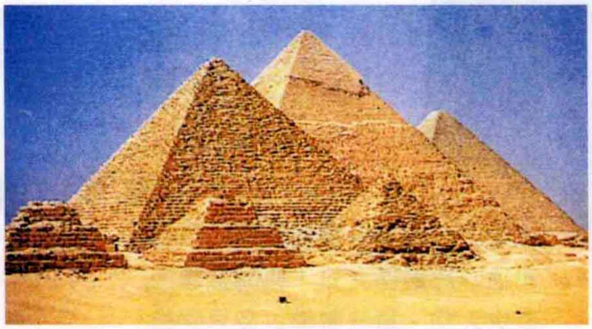
希望本書能成為教師、學生及家長所期望的一本嶄新的高質素教科書，也是一本便於教、便於學和便於輔導的好書。

作者謹識

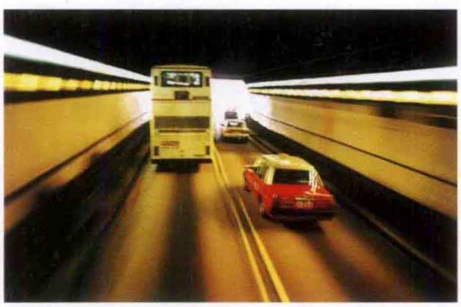
一九九八年

目錄

3B



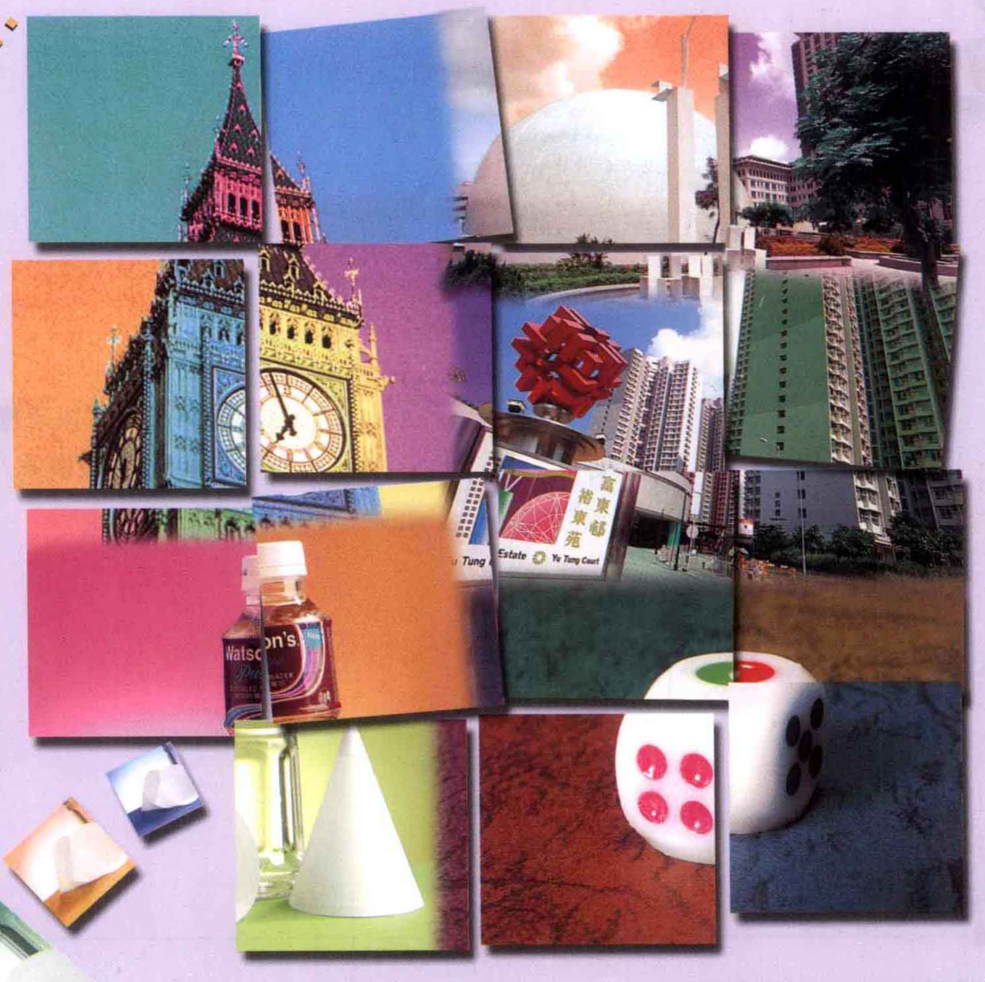
第三部分



第四部分

目錄

第三部分



求積法
代數不等式
一元二次方程
綜合練習三

8 求積法

設問

試想想小蕙可以怎樣求得其手掌的面積及體積呢？

學習目的

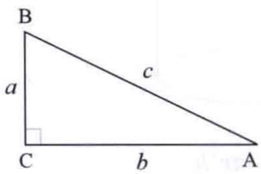
通過學習本章，同學將學會

1. 角錐體與正方體的體積關係。
2. 圓錐體與角錐體的體積關係。
3. 計算直立角錐體及直立圓錐體的體積及表面面積。
4. 計算球體的體積及表面面積。
5. 相似立體的體積之比、對應面積之比及對應綫段之比，三者間的關係。

備忘錄

1. 畢氏定理 (勾股定理)

在直角 ΔABC 中，$a^2 + b^2 = c^2$。

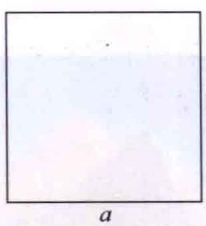


2. 相似三角形的性質

對應角相等，對應邊成比例。

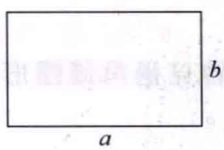
3. 平面圖形

(a) 正方形



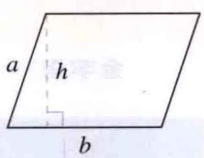
周長 $= 4a$
面積 $= a^2$

(b) 長方形



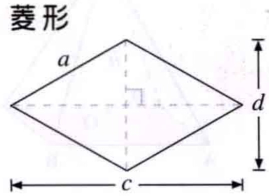
周長 $= 2(a + b)$
面積 $= ab$

(c) 平行四邊形



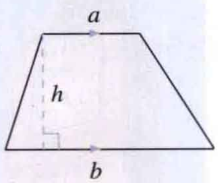
周長 $= 2(a + b)$
面積 $= bh$

(d) 菱形



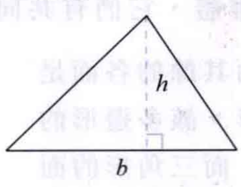
周長 $= 4a$
面積 $= \dfrac{cd}{2}$

(e) 梯形



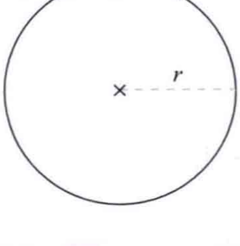
面積 $= \dfrac{1}{2}(a + b)h$

(f) 三角形



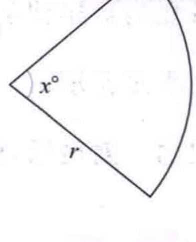
面積 $= \dfrac{1}{2}bh$

(g) 圓



周長 $= 2\pi r$
面積 $= \pi r^2$

(h) 扇形



弧長 $= \dfrac{x°}{360°} \times 2\pi r$

面積 $= \dfrac{x°}{360°} \times \pi r^2$

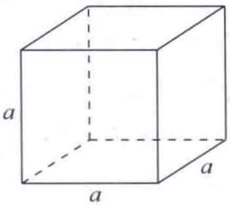
4. 立體圖形

8.1 課時：5

要點：

1. 讓學生認識角錐體的各面及各綫條的名稱。
2. 學生必須緊記角錐體的體積公式及表面面積的求法。
3. 介紹求積公式時，不宜作嚴密的推導。

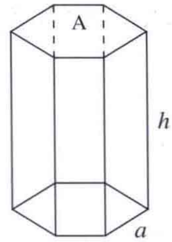
(a) 正立方體



體積 $= a^3$

表面面積 $= 6a^2$

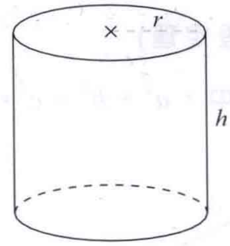
(b) 正角柱體



體積 $= Ah$

表面面積 $= 6ah + 2A$

(c) 圓柱體



體積 $= \pi r^2 h$

表面面積 $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

4. 學生容易忽略平截頭錐體這名稱，故須加以強調。
5. 應向學生強調正角錐和直立角錐的區別：正角錐的底面是正多邊形，而直立角錐的底面只需是中心對稱圖形(例如矩形、菱形等)。因此，直立角錐的側棱未必全部相等。
6. 在介紹「角錐的高垂直於底面，即垂直於底面上的所有直綫。」，及「若用一平行於角錐底面的平面去截角錐，所得的截痕和底面多邊形在同一側面上的邊互相平行。」，這些有關立體幾何的知識時，應盡量列舉日常生活中的例子和用教學模型從直觀的角度來說明。
7. 必須強調「高、側棱及側棱在底面上的射影所組成的三角形是一直角三角形。」，因學生解題時經常會忘記這一關係。

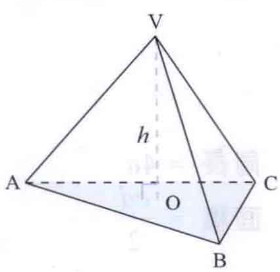
8.1 角錐體

A. 簡介

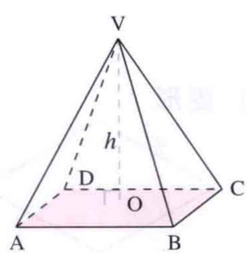
在日常生活中，我們都曾見過**角錐體**形狀的物體。例如，金字塔或建築物的屋頂等。

金字塔

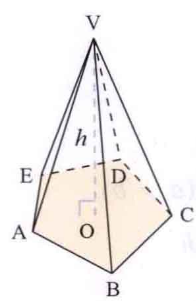
建築物的屋頂



三角錐體



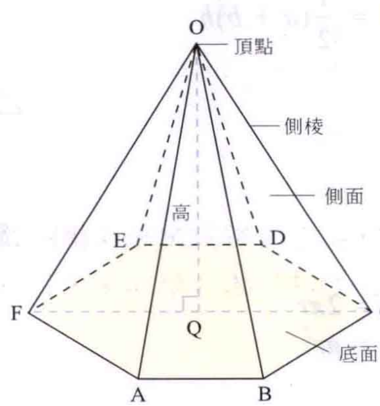
四角錐體



五角錐體

上圖的各立體都是角錐體，它們有共同的特點：

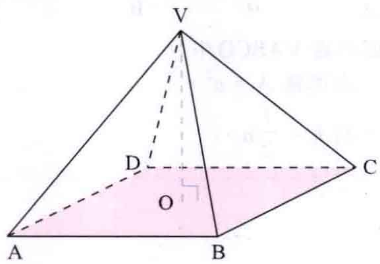
有一個面是多邊形，而其餘的各面是具有公共頂點的三角形。該多邊形的面稱為角錐體的**底面**，而三角形的面稱為**側面**，相鄰側面的公共邊稱為**側棱**，而各側棱的公共端點稱為**頂點**，由頂點至底面的垂直距離稱為**高**。



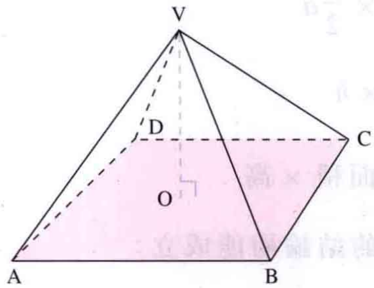
角錐體 pyramid　底面 base　側面 lateral face　側棱 slant edge　頂點 vertex　高 height

角錐體是依底面的形狀而命名，若底面是三角形則稱它為三角錐體；底面是四邊形則稱它為四角錐體，……依此類推。

角錐體是用頂點及底面多邊形的各頂點的字母表示，例如下圖的兩個四角錐體都可記為：角錐體 VABCD。



角錐體底面為菱形，而高 VO 過菱形的中心 O，故 VABCD 是直立角錐體。



角錐體底面為正方形，而高 VO 過正方形的中心 O，故 VABCD 是正角錐體。

繽紛數學

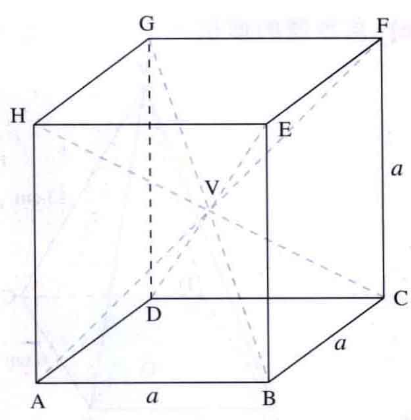
埃及有 80 多座呈四角錐體的金字塔，其中最大的金字塔是由十萬個奴隸花了 20 多年時間才建成的，當中更耗用了250餘萬塊 2.5 噸的石塊。

在一個角錐體中，若高與底面相交於底面的中心，則稱該角錐體為**直立角錐體**。

若直立角錐體的底面是正多邊形，則稱它為**正角錐體**。它的各側棱相等，而側面是彼此全等的等腰三角形。

B. 角錐體的體積

下圖所示為一個邊長是 a 的正立方體。



圖中，AF、BG、CH 及 DE 稱為正立方體的對角綫，這四條對角綫交於同一點 V，並把正立方體分成六個完全相同的四角錐體。因此，

正方體中，六個全等的角錐體分別為：
VABCD、VEFGH、
VBCFE、VADGH、
VABEH 及 VCDGF。

直立角錐體 right pyramid　　正角錐體 regular pyramid

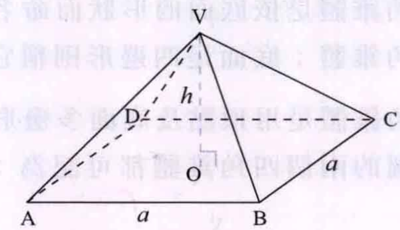
四角錐體 VABCD 的體積 $= \frac{1}{6}$ 正立方體的體積

$$= \frac{1}{6} \times a^3$$

$$= \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{1}{2}a$$

$$= \frac{1}{3} \times A \times h$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$$



四角錐 VABCD 中，
底面積 $A = a^2$，
高 $h = \frac{1}{2}a$。

事實上，對於任意的角錐體，以下的結論均能成立：

角錐體的體積 $= \frac{1}{3} \times$ 底面積 $\times$ 高

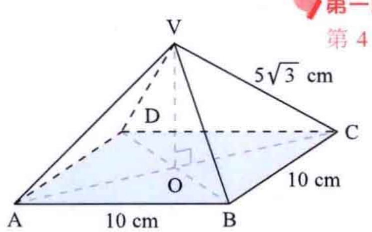
習題 8.1
第一階 第 1 – 3 題

左邊公式的證明，不在本書的討論範圍內。

例題 8 - 1

下圖所示，正角錐體 VABCD 的底是邊長為 10 cm 的正方形，側棱長度為 $5\sqrt{3}$ cm，求此角錐體的體積。(答案以分數表示。)

習題 8.1
第一階 第二階
第 4 題 第 10 題



解

連結 AC。

在直角 ΔABC 中，

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \quad \text{(畢氏定理)}$$

$$= \sqrt{10^2 + 10^2} \text{ cm}$$

$$= 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

O 為 AC 的中點， 正方形對角綫互相平分。

$$\therefore \quad CO = \frac{1}{2}AC$$

$$= 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

側棱 $VC = 5\sqrt{3}$ cm

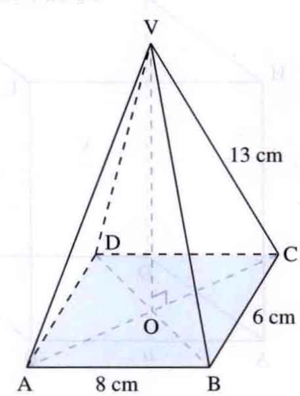
課堂練習

下圖所示，直立角錐體 VABCD 的底面是一個長 8 cm，闊 6 cm 的長方形，側棱的長度為 13 cm。求

(a) 底面對角綫 AC 的長度。

(b) 角錐體高 VO。

(c) 角錐體的體積。



解

(a) 在直角 ΔABC 中，

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \quad \text{(畢氏定理)}$$

$$= \sqrt{8^2 + 6^2} \text{ cm}$$

$$= \underline{\underline{10 \text{ cm}}}$$

(b) O 為 AC 的中點，

$$\therefore \quad CO = \frac{1}{2}AC$$

∴　在直角 ΔVOC 中，

$$VO = \sqrt{VC^2 - CO^2} \quad \text{(畢氏定理)}$$
$$= \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2})^2}\text{ cm}$$
$$= 5\text{ cm}$$

即　角錐體 VABCD 的體積

$$= \frac{1}{3} \times (10 \times 10) \times 5\text{ cm}^3$$
$$= \frac{500}{3}\text{ cm}^3$$

例題 8-2

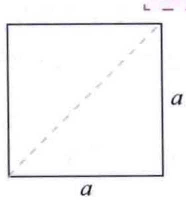
習題 8.1 第二階　第 11 題

正四角錐體的體積為 54 cm³，高為 9 cm，求其底面對角綫的長度。

解

設正四角錐體的底面邊長為 a cm，則其面積為 a^2 cm²。

底為正方形。



$$54 = \frac{1}{3} \times a^2 \times 9$$
$$a^2 = \frac{54 \times 3}{9}$$
$$= 18$$

∴　底面對角綫的長度 $= \sqrt{a^2 + a^2}$ cm (畢氏定理)

$$= \sqrt{18 + 18}\text{ cm}$$
$$= 6\text{ cm}$$

$$= \frac{1}{2}(10)\text{ cm}$$
$$= 5\text{ cm}$$

側棱 VC = 13 cm

∴　在直角 ΔVOC 中，

$$VO = \sqrt{VC^2 - CO^2} \quad \text{(畢氏定理)}$$
$$= \sqrt{13^2 - 5^2}\text{ cm}$$
$$= 12\text{ cm}$$

(c)　角錐體 VABCD 的體積

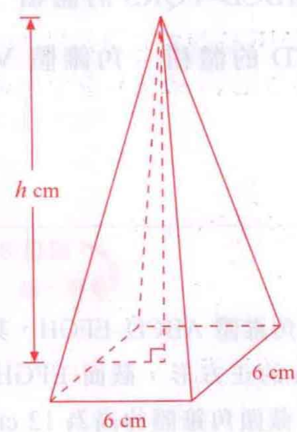
$$= \frac{1}{3} \times (6 \times 8) \times 12\text{ cm}^3$$
$$= 192\text{ cm}^3$$

課堂練習

正四角錐體的體積為 180 cm³，而底面是邊長為 6 cm 的正方形，求此角錐體的高。

解

設正四角錐體的高為 h cm。



$$180 = \frac{1}{3} \times 6^2 \times h$$
$$180 = 12h$$
$$h = 15$$

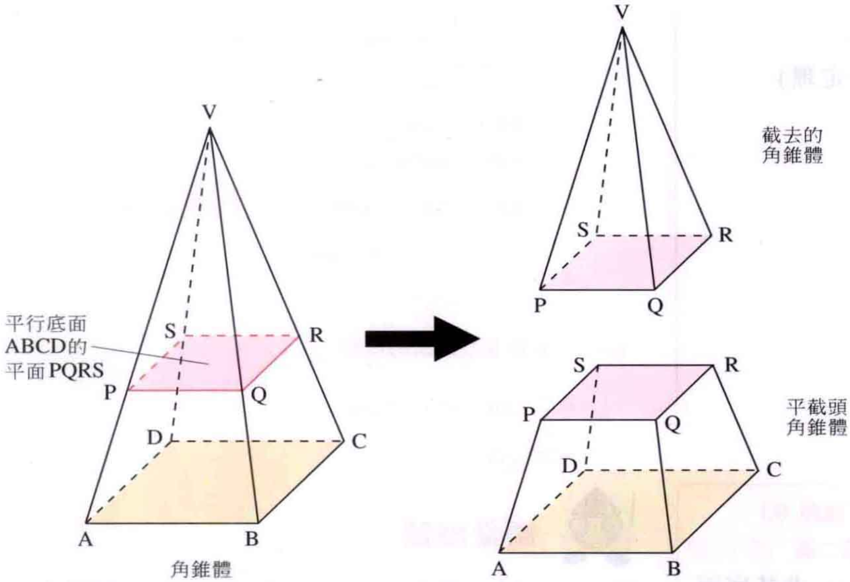
故　正四角錐體的高為 15 cm。

C.　平截頭角錐體的體積

用一個平行於角錐體底面的平面截去角錐體的頂部(也是一個角錐體)，餘下的部分稱為平截頭角錐體或**平截頭體**。

平截頭角錐體的另一名稱為棱台。

平截頭體　frustum



上圖中，VABCD 是一個角錐體，用平行 ABCD 的平面 PQRS 將頂部的小角錐體 VPQRS 截去，餘下的部分就是平截頭角錐體 ABCD–PQRS。明顯地，

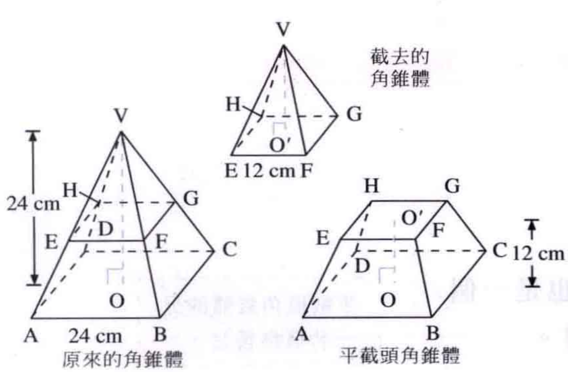
平截頭角錐體 ABCD–PQRS 的體積

= 角錐體 VABCD 的體積 – 角錐體 VPQRS 的體積。

例題 8-3

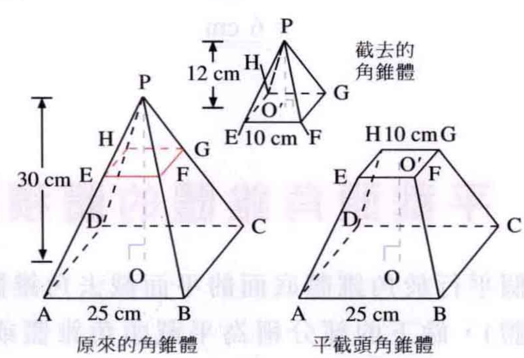
習題 8.1 第一階 第 9 題

下圖所示為一個平截頭角錐體 ABCD–EFGH，其底面 ABCD 是邊長為 24 cm 的正方形，截面 EFGH 是邊長為 12 cm 正方形。平截頭角錐體的高為 12 cm。已知原來的角錐體高 24 cm，求平截頭角錐體 ABCD–EFGH 的體積。



課堂練習

已知角錐體 PABCD 的高 PO 為 30 cm，底面是邊長為 25 cm 的正方形。在頂點 P 以下 12 cm 處，用一個平行底面的平面截去小角錐體 PEFGH。若 EFGH 是邊長為 10 cm 的正方形，求平截頭角錐體 ABCD–EFGH 的體積。



解

原來的角錐體 VABCD 的體積

$= \dfrac{1}{3} \times (24 \times 24) \times 24 \text{ cm}^3$

$= 4\ 608 \text{ cm}^3$

截去的角錐體 VEFGH 的體積

$= \dfrac{1}{3} \times (12 \times 12) \times (24 - 12) \text{ cm}^3$

$= 576 \text{ cm}^3$

$\therefore$ 平截頭角錐體 ABCD–EFGH 的體積

$= (4\ 608 - 576) \text{ cm}^3$

$= \underline{\underline{4\ 032 \text{ cm}^3}}$

解

原來的角錐體 PABCD 的體積

$= \dfrac{1}{3} \times (25 \times 25) \times 30 \text{ cm}^3$

$= 6\ 250 \text{ cm}^3$

截去的角錐體 PEFGH 的體積

$= \dfrac{1}{3} \times (10 \times 10) \times 12 \text{ cm}^3$

$= 400 \text{ cm}^3$

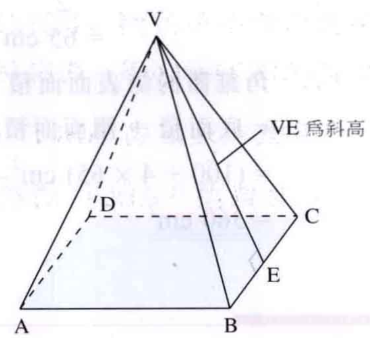
$\therefore$ 平截頭角錐體 ABCD–EFGH 的體積

$= (6\ 250 - 400) \text{ cm}^3$

$= \underline{\underline{5\ 850 \text{ cm}^3}}$

D. 角錐體的總表面面積

角錐體底面多邊形的面積稱為**底面積**，各側面的面積之和稱為**側面面積**。



角錐體的**總表面面積** = 底面積 + 側面面積

習題 8.1 第一階 第 8 題

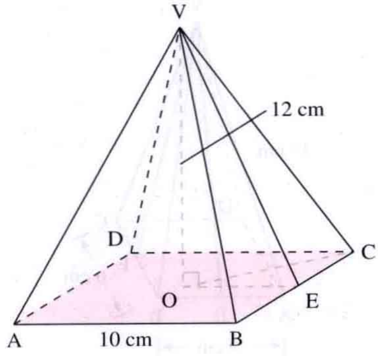
特別地，正角錐體側面的等腰三角形，其底邊上的高稱為角錐體的**斜高**，而正角錐體各側面的斜高都是相等的。

例題 8 - 4

下圖為一個正四角錐體 VABCD，底面正方形的邊長為 10 cm，高 VO 為 12 cm，求

(a) 斜高 VE，

(b) 總表面面積。

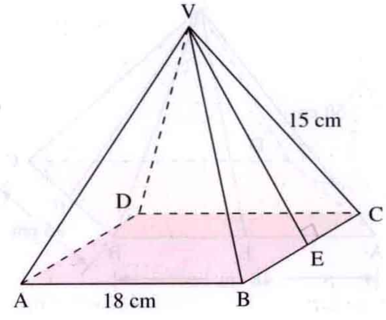


課堂練習

下圖為一正四角錐體 VABCD，底面正方形的邊長為 18 cm，側棱為 15 cm，求

(a) 斜高 VE，

(b) 總表面面積。



底面積 base area　　側面面積 lateral surface area　　總表面面積 total surface area

斜高 slant height

解

(a) 在 ΔVOE 中，

$$OE = \frac{1}{2} \times 10\text{ cm} = 5\text{ cm}$$

$\therefore$ 斜高 $VE = \sqrt{VO^2 + OE^2}$ (畢氏定理)

$$= \sqrt{12^2 + 5^2}\text{ cm} = \underline{\underline{13\text{ cm}}}$$

(b) 角錐體的底面積 $= AB \times BC$

$$= 10 \times 10\text{ cm}^2 = 100\text{ cm}^2$$

ΔVBC 的面積 $= \frac{1}{2} \times BC \times VE$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 13\text{ cm}^2 = 65\text{ cm}^2$$

$\therefore$ 角錐體的總表面面積

= 底面積 + 側面面積

$= (100 + 4 \times 65)\text{ cm}^2$

$= \underline{\underline{360\text{ cm}^2}}$

$\Delta VAB \cong \Delta VBC \cong \Delta VCD \cong \Delta VDA$

解

(a) 在 ΔVCE 中，

$$CE = \frac{1}{2} \times 18\text{ cm} = 9\text{ cm}$$

$\therefore$ 斜高 $VE = \sqrt{VC^2 - CE^2}$ (畢氏定理)

$$= \sqrt{15^2 - 9^2}\text{ cm} = \underline{\underline{12\text{ cm}}}$$

(b) 角錐體的底面積 $= AB \times BC$

$$= 18 \times 18\text{ cm}^2 = 324\text{ cm}^2$$

ΔVBC 的面積 $= \frac{1}{2} \times BC \times VE$

$$= \frac{1}{2} \times 18 \times 12\text{ cm}^2 = 108\text{ cm}^2$$

$\therefore$ 角錐體的總表面面積

= 底面積 + 側面面積

$= (324 + 4 \times 108)\text{ cm}^2$

$= \underline{\underline{756\text{ cm}^2}}$

例題 8-5

習題 8.1 第二階 第 16 及 17 題

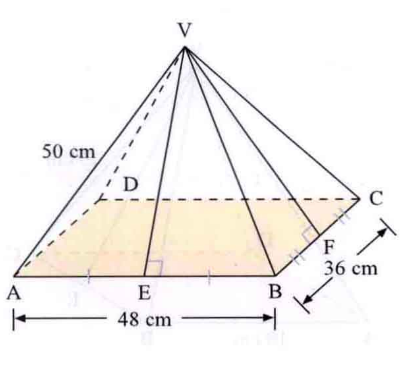
一直立四角錐體 VABCD 的底面是長方形，AB 為 48 cm，BC 為 36 cm，側棱的長度為 50 cm，求

(a) ΔVAB 的高 VE，

(b) ΔVBC 的高 VF，

(c) 角錐體 VABCD 的總表面面積。

(答案須準確至 3 位有效數字。)



課堂練習

一直立四角錐體 VABCD 的底面是長方形，AB 為 8 cm，BC 為 6 cm，側棱為 15 cm。求

(a) ΔVAB 的高 VE，

(b) ΔVBC 的高 VF，

(c) 角錐體 VABCD 的總表面面積。

(答案須準確至 3 位有效數字。)