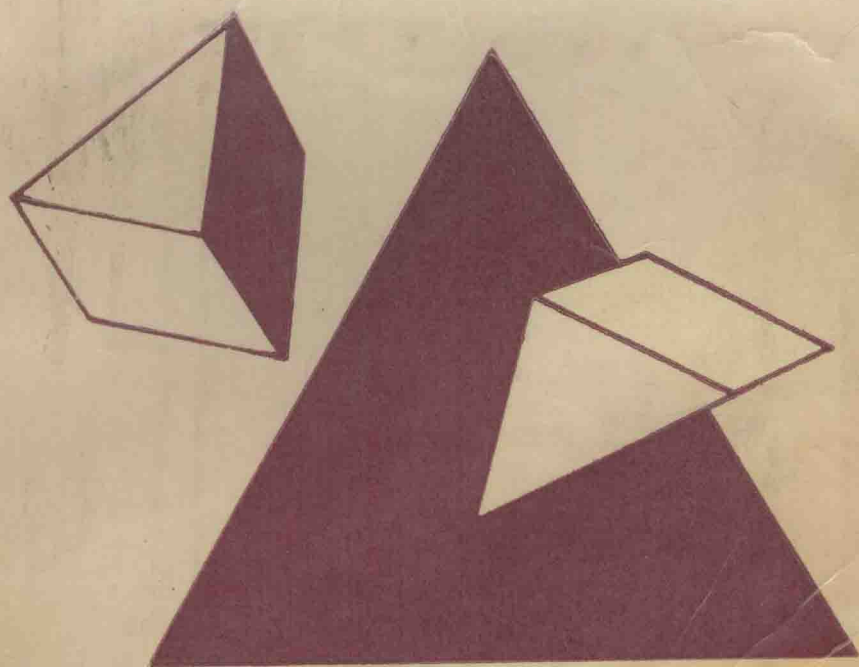


工程地质研究中的

数值分析方法

尚岳全 黄润秋 编著



成都科技大学出版社

工程地质研究中的 数值分析方法

尚岳全² 黄润秋 编著
董孝璧 邢纪波

成都科技大学出版社

内 容 简 介

本书较系统地论述了工程地质研究中常用的有限单元法、边界单元法和离散单元法。重点介绍了线弹性、弹塑性和粘弹塑性问题的有限单元分析方法及其在工程地质研究中的应用。本书在编写方法上注重理论联系实际,以应用数值分析技术解决实际问题为基本目标。最后给出了实用有限元程序。

本书可作为高等院校工程地质专业本科生及研究生的教学参考书,亦可供从事工程地质及相邻学科的工程技术人员参考。

工程地质研究中的数值分析方法

尚岳全 黄润秋 编著

责任编辑 袁顺生 黄祖基

成都科技大学出版社出版发行

西南冶金地质印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 16.375

1991年8月第1版 1991年8月第1次印刷

印数 1—1000册 字数 409千字

ISBN 7-5616-0937-x/TU·17

定价 4.75元

前 言

在工程地质研究中大量涉及复杂环境条件和复杂介质体系的力学问题,由于无法用现成的数学力学理论对这类问题作确切的描述,以前对它们的研究往往只作定性探讨。但随着计算机技术的进步,数值计算理论的发展,为解决这些问题提供了可能的手段。近年来,数值模拟方法在工程地质研究中的应用越来越广泛,并且已经取得大量成功的经验。进一步推广数值模拟方法在工程地质研究中的应用是一项十分重要的工作,它将有力地推动工程地质学科的定量化进程。因此,目前各院校的工程地质专业本科生和研究生教学中,多开设这类课程,但至今还没有一本适应本专业教学需要的系统教材,已经明显地影响教学工作的正常开展。此外,许多生产和科研部门有良好的计算机硬件条件,有的单位还有良好的软件条件,却未能发挥它们应有的作用。原因主要是大多数专业人员,由于受到时间和条件的限制,既无法阅读大量的文献,又找不到一本简明实用的有关数值模拟方法的参考书。致使他们在运用数值模拟技术方面遇到困难。本书正是为适应上述要求编写的。

本书内容的取舍和安排上体现了作者近年来担任本课程教学和应用数值分析理论解决实际问题的经验。力图简明地介绍数值分析方法的基本原理,尽量避免抽象的数学力学推导。注意理论联系实际,以应用数值分析技术解决实际问题为基本目标。本书由以下五个部分组成。

第一部分为基础理论(第一章):讲述后继章节将涉及的有关数学力学基础知识。包括矩阵的一般概念及其运算,线性代数方程组的求解,高斯积分,弹塑性力学的基本方程等内容。

第二部分为本书的基本内容(第二、三、四、五章):讲述有限单元法的基本理论与方法。第二和第三章系统地介绍线弹性平面问题和空间问题有限单元法的基本原理。并附有若干实用程序段。第四和第五章详细地介绍弹塑性和粘弹塑性力学问题的有限元分析方法。

第三部分(第六章):结合近年来在工程地质研究实践中进行数值模拟工作所取得的经验,介绍工程地质研究中数值分析的建模方法、计算分析步骤、成果的整理分析等问题。使数值模拟理论与工程地质研究实践紧密地联系起来。

第四部分(第七和第八章):讲述边界单元法和离散单元法的基本原理。第七章介绍弹性力学问题的边界单元求解方法,讨论了基础解,分别叙述了构造边界积分方程的直接法和间接法。第八章介绍离散单元法的基本原理和数据的前后处理技术。

第五部分(附录):给出求解平面问题的实用有限元程序。该程序具有很强的实用功能,对工程地质研究中所涉及的问题具有良好的适应性,可在微机上运行,具有推广应用价值。

本书在编写过程中,曾得到张倬元教授、王士天教授和聂德新副教授的热情支持,并对本书的编写提出了宝贵的意见。作者对他们表示衷心的感谢。本书的排版工作由但卫岭、李勤和学院印刷厂激光排版室的同志共同完成,插图的清绘由李志侃同志完成,在此一并致谢。

本书的第一、四、五章由黄润秋编写,第二、三、六章及附录由尚岳全编写,第七章由董孝璧编写,第八章由邢纪波(东北工学院)编写。最后由尚岳全、黄润秋统校定稿。由于作者水平所限,不妥错谬之处,敬请读者批评指正。

作 者

1991年2月 于成都地质学院

目 录

第一章 基础知识	1
§ 1.1 矩阵及其定义	1
§ 1.2 大型线性代数方程组的求解	6
§ 1.3 高斯求积法	8
§ 1.4 弹性力学的基本方程及其求解	11
§ 1.5 弹性力学的虚功原理及能量解法	17
§ 1.6 应力状态和应变状态	19
§ 1.7 材料的塑性屈服准则	24
第二章 平面线弹性问题的有限单元法	30
§ 2.1 基本概念	30
§ 2.2 单元刚度分析	31
§ 2.3 总刚矩阵	51
§ 2.4 非零位移边界条件	60
§ 2.5 荷载向节点的移置与荷载列阵的形成	61
§ 2.6 解题方法小结	64
第三章 空间线弹性问题的有限单元法	69
§ 3.1 概述	69
§ 3.2 四面体单元	70
§ 3.3 六面体等参单元	74
§ 3.4 三棱体单元	81
§ 3.5 无界元	84
§ 3.6 荷载向节点的移置	87
§ 3.7 单元应力分析	91
第四章 非线性问题的有限单元法分析	96
§ 4.1 岩(土)体的非线性特性及非线性分析的一般方法	96
§ 4.2 非线性问题的有限元基本解法	99
§ 4.3 增量塑性理论简介	109
§ 4.4 常用的弹塑性模型	117
§ 4.5 弹塑性非线性问题的解法	121
§ 4.6 拉破坏的非线性分析	126
§ 4.7 简例	130
第五章 流变问题的有限单元法分析	135
§ 5.1 岩(土)体流变特性及其基本描述	135
§ 5.2 粘弹性问题的有限元法分析	139

§ 5.3	粘塑性问题的有限元法分析	142
§ 5.4	粘弹-粘塑性问题的有限元解析	145
§ 5.5	应用实例	147
第六章	数值模拟的工程地质应用	151
§ 6.1	平面问题不连续面的模拟	151
§ 6.2	岩体稳定性的数值模拟分析	159
§ 6.3	区域构造稳定性的数值模拟	168
第七章	边界单元法	177
§ 7.1	概述	177
§ 7.2	弹性问题基本方程及所用张量记号	178
§ 7.3	基本解	180
§ 7.4	边界积分方程间接法	186
§ 7.5	边界积分方程直接法	190
§ 7.6	边界单元和单元插值函数	193
§ 7.7	离散化与解法	198
第八章	离散单元法	207
§ 8.1	概述	207
§ 8.2	预备知识	207
§ 8.3	多边形刚性块体模型的离散单元法	213
§ 8.4	离散单元法在计算机上的实施技术	224
§ 8.5	离散单元法与有限单元法、边界单元法的耦合	229
附录	FCEP2D 有限元程序使用说明及源程序	232
	参考文献	256

第一章 基础知识

§ 1.1 矩阵及其定义

1.1.1 矩阵的定义

矩阵是 $m \times n$ 个数按照一定的方式排列形成的数表,如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵,简称 $m \times n$ 阶矩阵,并用 $[A]$ 表示,即

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

矩阵的每一横排称为行,每一纵排称为列,每一个数称为元素。其中 a_{ij} 表示矩阵第 i 行第 j 列的元素。

只有一行的 $1 \times n$ 阶矩阵

$$[A] = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

称为行矩阵(或行向量)。

只有一列的 $m \times 1$ 阶矩阵

$$[B] = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

称为列矩阵(或列向量)。

把一个 $m \times n$ 阶矩阵 $[A]$ 的行和列依次互换,所得到的新的 $n \times m$ 阶矩阵,称为 $[A]$ 的转置矩阵,并用 $[A]^T$ 表示

设

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

当一个矩阵的行数与列数相等 $m=n$ 时, 这个 $n \times n$ 阶矩阵就称为方阵, 并记为

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

一个方阵, 如果它的对称于主对角线的元素都两两相等 $a_{ij} = a_{ji}$, 则称此方阵 $[A]$ 为对称方阵。

如果方阵除主对角线以外的元素都是零, 则称为对角线方阵; 当对角线方阵主对角线上的元素均为 1, 则称此矩阵为单位方阵, 并用 $[I]$ 表示

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

若方阵主对角线以下的各元素均为零, 则称此阵矩为上三角阵, 即

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

反之, 称为下三角阵。

1.1.2 矩阵的加减与数乘

如果有两个矩阵 $[A]$ 和 $[B]$, 它们的行数和列数都相同, 并且它们所有的对应元素都两两相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij}$$

则称矩阵 $[A]$ 与矩阵 $[B]$ 相等, 记为

$$[A] = [B] \quad (1-6)$$

设有两个 m 行 n 列矩阵 $[A]$ 和 $[B]$, 规定 $[A]$ 与 $[B]$ 的加减运算为

$$\begin{aligned} [A] \pm [B] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-7)$$

数 λ 与矩阵 $[A]$ 的乘法规定为

$$\lambda[A] = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

$$(2) \quad (\lambda + \mu)[A] = \lambda[A] + \mu[A];$$

$$(3) \quad \lambda([A] + [B]) = \lambda[A] + \lambda[B].$$

设有一个 $m \times n$ 阶矩阵 $[A]$ 和一个 $n \times p$ 阶矩阵 $[B]$, 即

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sp} \end{bmatrix}$$

其中 $[A]$ 的列数与 $[B]$ 的行数相等,则矩阵 $[A]$ 与矩阵 $[B]$ 的乘积 $[C]=[A][B]$ 是一个 $m \times p$ 阶矩阵,其形式为

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mp} \end{bmatrix}$$

其中,每个元素 c_{ij} 等于 $[A]$ 的第 i 行各元素与 $[B]$ 的第 j 列各元素一一对应乘积之和,即

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p) \quad (1-9)$$

关于矩阵的乘法, 不难证明它具有下列性质:

(1) $\lambda([A][B]) = (\lambda[A])[B] = [A](\lambda[B])$, λ 为常数;

(2) 结合律, $[A]([B][C]) = ([A][B])[C]$;

(3) 分配律: $([A] + [B])[C] = [A][C] + [B][C]$.

$$[C]([A] + [B]) = [C][A] + [C][B];$$

(4) 一般来说,不满足交换律,即: $[A][B] \neq [B][A]$;

$$(5) \quad [A][I] = [A], [I][B] = [B];$$

(6) 逆序法则: $([A][B])^T = [B]^T[A]^T$;

(7) 如果 $[A][B]=[0]$, 则 $[A]=0$ 或 $[B]=0$;

(8) 如果 $[A][B] = [A][C]$, 则 $[B] = [C]$.

由矩阵乘法,可以把线性代数方程组表示成矩阵的形式。例如一个 n 阶线性代数方程

组

$$\left. \begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

利用矩阵乘法可以写成以下矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

若设

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \{B\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

则(1-10)式可表示为更简洁的形式,即

$$[A]\{x\} = \{B\} \quad (1-11)$$

1.1.4 逆矩阵

设 $[A]$ 是一个 n 阶方阵,如果存在一个 n 阶方阵 $[C]$,使得

$$[A][C] = [C][A] = [I] \quad (1-12)$$

则称 $[C]$ 是 $[A]$ 的逆矩阵,记作

$$[C] = [A]^{-1} \quad (1-13)$$

设 n 阶方阵 $[A]$ 的行列式 $|A| \neq 0$,则 $[A]$ 的逆矩阵为

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} [A^*] \quad (1-14)$$

其中

$$[A^*] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

称为方阵 $[A]$ 的伴随矩阵,它是把行列式 $|A|$ 中各元素 a_{ij} 换成它的代数余子式 A_{ji} 后所得方阵的转置矩阵。

如果 $|A| = 0$,那么 $[A]$ 没有逆矩阵,因而通常又把方阵分为两类:一类是其行列式值为零的方阵,称为奇异方阵;另一类是其行列式的值不为零的方阵,称为非奇异方阵。

1.1.5 对称正定阵和正定二次型

如果 n 阶方阵

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的所有主子式

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

都大于零,这个方阵 $[A]$ 就称为正定矩阵,例如方阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

就是一个正定矩阵。因为它的三个主子式

$$2 > 0, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 8 > 0, \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} = 45 > 0$$

如果一个方阵 $[A]$ 是正定的,那么它一定是可逆的,这是因为 $|A| > 0$ 的缘故,因此,对于具有以正定矩阵 $[A]$ 为系数矩阵的线性代数方程组 $[A]\{X\} = \{B\}$,它是可解的,其解为

$$\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$$

若一个对称方阵是正定的,则称它为对称正定矩阵。

设 $[A]$ 是一个 n 阶方阵,对任意向量

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

作

$$\begin{aligned} \{X\}^T[A]\{X\} &= [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{Bmatrix} \\ &= x_1 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \cdots + x_n \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \end{aligned}$$

显然这是一个数,称为二次型。

如果对任意向量 $\{X\}$,二次型

$$\{X\}^T[A]\{X\} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \geq 0$$

而且只有当 $\{X\}$ 是零向量时,二次型才等于零,否则恒大于零,则说这个二次型是正定二次型。

在有限单元法中,要用到下面的结果:

方阵 $[A]$ 为对称正定矩阵的充分和必要条件是由它所组成的二次型

$$\{X\}^T[A]\{X\} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

为一个正定二次型。

1.1.6 矩阵的微积分

矩阵中的元素可以是变量或 n 个变量的函数。设 $m \times n$ 阶矩阵 $[A]$ 的元素都是 x 的函数, 即

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

那么, 定义矩阵 $[A]$ 对 x 的导数为

$$\frac{d[A]}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \frac{da_{21}}{dx} & \frac{da_{22}}{dx} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{da_{n1}}{dx} & \frac{da_{n2}}{dx} & \cdots & \frac{da_{nn}}{dx} \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

定义矩阵 $[A]$ 在 $[a, b]$ 上的积分为

$$\int_a^b [A] dx = \begin{bmatrix} \int_a^b a_{11} dx & \int_a^b a_{12} dx & \cdots & \int_a^b a_{1n} dx \\ \int_a^b a_{21} dx & \int_a^b a_{22} dx & \cdots & \int_a^b a_{2n} dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_a^b a_{n1} dx & \int_a^b a_{n2} dx & \cdots & \int_a^b a_{nn} dx \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

§ 1.2 大型线性代数方程组的求解

大型线性代数方程组的求解方法, 可分为迭代法和直接法两类。迭代法对计算机内存要求小, 但计算时间长; 直接法对计算机内存要求大, 但计算速度快。这里仅对直接法中的 $LD_0^{-1}L$ 法作一简略介绍。

设线性代数方程组为

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (1-18)$$

其中 $[A]$ 为对称正定矩阵。 $LD_0^{-1}L$ 法是将系数矩阵 $[A]$ 分解为下三角阵 $[L]$ 和以 $[L]$ 中对角线元素的倒数为主元的对角矩阵, 即

$$[A] = [L][D_0]^{-1}[L]^T \quad (1-19)$$

其中

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}, [D_0] = \begin{bmatrix} 1/L_{11} & & & 0 \\ & 1/L_{22} & & \\ & & 1/L_{33} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1/L_{nn} \end{bmatrix}$$

而

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} L_{im}L_{jm}/L_{mm} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n, j \leq i) \quad (1-20)$$

即

$$L_{11} = a_{11}$$

$$L_{21} = a_{21}$$

$$L_{22} = a_{22} - L_{21}L_{21}/L_{11} = a_{22} - a_{21}^2/a_{11}$$

$$L_{31} = a_{31}$$

$$L_{32} = a_{32} - L_{31}L_{21}/L_{11} = a_{32} - a_{31}a_{21}/a_{11}$$

$$L_{33} = a_{33} - L_{31}L_{31}/L_{11} - L_{32}L_{32}/L_{22}$$

$$= a_{33} - a_{31}^2/a_{11} - (a_{32} - a_{31}a_{21}/a_{11})^2/(a_{22} - a_{21}^2/a_{11})$$

等等。可见, $[L]$ 中除了所有各行第 1 列元素均等于 $[A]$ 中对应行第 1 列元素外, 其它某行某列的元素, 只要已知该行上行和该列前一列的元素即可求得。因此, 可以利用 (1-20) 式, 从第 1 行第 1 列的元素开始, 按行与列的顺序, 依次求出 $[L]$ 中所有的元素。

将 (1-19) 式代入 (1-18) 式, 得

$$[L][D_0]^{-1}[L]^T\{X\} = \{B\}$$

令

$$\{Y\} = [L]^T\{X\} \quad (1-21)$$

则有

$$[L][D_0]^{-1}\{Y\} = \{B\} \quad (1-22)$$

由上式, 可求出 $\{Y\}$

$$Y_i = b_i - \sum_{m=1}^{i-1} L_{im}Y_m/L_{mm} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-23)$$

即

$$Y_1 = b_1$$

$$Y_2 = b_2 - L_{21}Y_1/L_{11} = b_2 - L_{21}b_1/L_{11}$$

$$Y_3 = b_3 - L_{31}Y_1/L_{11} - L_{32}Y_2/L_{22}$$

$$= b_3 - L_{31}b_1/L_{11} - L_{32}(b_2 - L_{21}b_1/L_{11})/L_{22}$$

等等。

求得 $\{Y\}$ 后, 代入 (1-21) 式即可求出线性代数方程组的解 $\{X\}$

$$X_i = \left(Y_i - \sum_{m=i+1}^n L_{mi}X_m \right) / L_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-24)$$

即

$$X_n = Y_n$$

$$X_{n-1} = Y_{n-1} - L_{n,n-1}X_n/L_{n-1,n-1} = Y_{n-1} - L_{n,n-1}Y_n/L_{n-1,n-1}$$

$$X_{n-2} = Y_{n-2} - (L_{n,n-2}Y_n + L_{n-1,n-2}Y_{n-1})/L_{n-2,n-2}$$

$$= Y_{n-2} - \frac{1}{L_{n-2,n-2}} \left[L_{n,n-2}Y_n + L_{n-1,n-2} \left(Y_{n-1} - \frac{1}{L_{n-1,n-1}} L_{n,n-1}Y_n \right) \right]$$

等等。可见, 某行的 X 只要已知该行以下各行的 X 即可求得, 所以我们可以利用 (1-24) 式, 从方程组的最后一行 X_n 开始, 按行的倒序依次求所有各行的 X , 从而完成方程组的求解。

在有限单元法分析中, 线性代数方程组的系数矩阵 $[A]$ 中有大量的零元素, 为减少运

算时间和节省计算机内存,这些元素是不被存贮,也是不需进行运算的。如果定义矩阵某一行从第一个非零元素到对角线元素所包含的元素个数为该行的半带宽,则实际存贮和参加运算的是半带宽以内的元素。可以证明,矩阵 $[A]$ 分解出的 $[L]$ 矩阵也具有大量的零元素且每行具有与 $[A]$ 中对应行相同的半带宽,故上述计算公式(1-20)、(1-23)、(1-24)式可修改为

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{m=\max(f_i, f_j)}^{j-1} L_{im}L_{jm}/L_{mm} \quad (1-25)$$

$$Y_i = b_i - \sum_{m=f_i}^{i-1} L_{im}Y_m/L_{mm} \quad (1-26)$$

$$X_i = (Y_i - \sum_{m=i+1}^{b_i} L_{mi}X_m)/L_{ii} \quad (1-27)$$

式中 b_i 为第 i 行的半带宽, f_i 、 f_j 分别为第 i 行或第 j 行的第一个非零元素的列号。 $\max(f_i, f_j)$ 表示取二者的较大值。

§ 1.3 高斯求积法

高斯求积法是一种数值积分方法,它尤其适合于被积函数形式比较复杂或写不出显式表达式的积分问题,如积分

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (1-28)$$

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dx dy \quad (1-29)$$

一般来说,高斯积分方法可以获得精度很高甚至完全精确的积分值。

在 $[a,b]$ 上的积分总可以通过变量变换化为 $[-1,1]$ 上的积分

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 g(t)dt$$

其中 $g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$ 。因此,只要讨论 $[-1,1]$ 上的高斯求积公式就可以了。

1.3.1 一维高斯积分

如图 1-1 所示,求曲线 $y=f(x)$ 与 X 轴在 $[-1,+1]$ 区间所围限范围的面积,即求积分

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx。$$

用高斯求积法计算这一积分的方法是:在积分区间 $[-1,+1]$ 内选出某些点 x_i ,称为积分点,计算出被积函数在这些积分点处的函数值 $f(x_i)$;然后用一些权系数乘上这些函数值,再求出它们的总和,用以作为近似的积分值。

因此,对一维积分的高斯

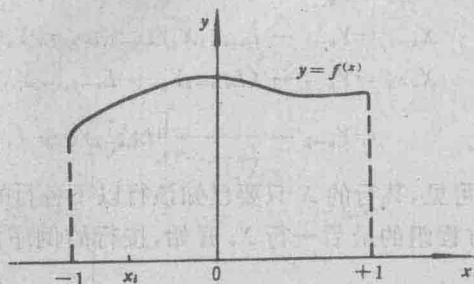


图 1-1

积分格式为

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n H_i f(x_i) \quad (1-30)$$

其中, n 是所取积分点的个数, $f(x_i)$ 是被积函数在积分点坐标 x_i 处的函数值, H_i 是每个积分点对应的权系数。

积分点数目 n 的选取与被积函数有关, 理论上可以证明: 若 $f(x)$ 是 m 次的多项式, 则当取 $n \geq (m+1)/2$ (或 $m \leq 2n-1$) 时, (1-30) 式的高斯积分可以取得完全精确的积分值。这从以下对 x_i 和 H_i 的推导中亦可看出。

设积分点数目 $n=2$, 则据上述原则, 为取得精确积分 $f(x)$ 应为 3 次多项式, 设为

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (1-31)$$

它的精确积分为

$$I = \int_{-1}^1 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) dx = 2c_0 + \frac{2}{3}c_2 \quad (1-32)$$

为取得精确的高斯积分值, 可令

$$H_1 f(x_1) + H_2 f(x_2) = 2c_0 + \frac{1}{3}c_2$$

即

$$H_1(c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3) + H_2(c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_2^3) = 2c_0 + \frac{2}{3}c_2$$

整理后得

$$(H_1 + H_2)c_0 + (H_1 x_1 + H_2 x_2)c_1 + (H_1 x_1^2 + H_2 x_2^2)c_2 + (H_1 x_1^3 + H_2 x_2^3)c_3 = 2c_0 + \frac{2}{3}c_2$$

比较等式两端的系数有

$$\left. \begin{aligned} H_1 + H_2 &= 2 \\ H_1 x_1 + H_2 x_2 &= 0 \\ H_1 x_1^2 + H_2 x_2^2 &= \frac{2}{3} \\ H_1 x_1^3 + H_2 x_2^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

解此方程组, 求得两积分点的坐标和对应的权系数为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -0.577,350,269 \\ H_1 &= H_2 = 1.000,000,000 \end{aligned} \right\}$$

因此, 对于 m 次多项式, 其 2 点的高斯积分公式为

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^2 H_i f(x_i) = f(-0.577350) + f(0.577350) \quad (1-34)$$

从以上的推导可见, 当 $m \leq 3$ 时, 上式给出完全精确的积分值。

同理, 当 $n=3$ 时, 与上相仿可导出积分点坐标 x_i 和对应的权系数为

$$\left. \begin{aligned} x_1 = -x_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0.774,597 \\ x_2 = 0.000,000 \\ H_1 = H_3 = \frac{5}{9} = 0.555,556 \\ H_2 = \frac{8}{9} = 0.888,889 \end{aligned} \right\} \quad (1-35)$$

因此, m 次多项式 3 点高斯积分公式为

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^3 H_i f(x_i) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0.0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \quad (1-36)$$

同理, 当 $m \leq 5$ 时, 上式给出完全精确的积分值。

表 1-1 给出了 $n \leq 4$ 的高斯积分公式中积分点坐标和对应的权系数值。

表 1-1 积分点坐标与权系数

n	x_i	H_i
2	$\pm 0.577,350,269,190$	1.000,000,000,000
3	$\pm 0.774,596,669,241$	0.555,555,555,556
	0.000,000,000,000	0.888,888,888,889
4	$\pm 0.861,136,311,594$	0.347,854,845,137
	$\pm 0.339,981,043,584$	0.652,145,154,862

1.3.2 二维和三维高斯积分

设二维积分的一般形式为

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \quad (1-37)$$

则在一维高斯积分公式基础上, 很容易构造出二维高斯积分公式。

首先对(1-37)式的被积函数作对变量 x 的高斯积分, 有

$$\int_{-1}^1 f(x, y) dx = \sum_{i=1}^n H_i f(x_i, y) \quad (1-38)$$

再对变量 y 作高斯积分

$$\int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n H_i f(x_i, y) dy = \sum_{j=1}^n H_j \sum_{i=1}^n H_i f(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j f(x_i, y_j) \quad (1-39)$$

因此

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(x_i, y_j)$$

可见,二维高斯积分可以视为被积函数对变量 x, y 所作的二重一维高斯积分。因此,变量 x, y 的积分点数选取原则、积分点的坐标位置及对应的权系数均与一维情形相同。

同理,可以构造出三重积分的高斯求积公式

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n H_i H_j H_m f(x_i, y_j, z_m) \quad (1-40)$$

其中, x_i, y_j, z_m 为高斯积分点的坐标位置, H_i, H_j, H_m 为对应的权系数。

§ 1.4 弹性力学的基本方程及其求解

1.4.1 变量及概念

弹性力学研究的是弹性体在外力作用下产生的应力和变形,以及与变形有关的位移。研究过程中仍采用材料力学中对材料作出的连续、均匀、完全弹性、各向同性及变形微小(小变形)假设。线弹性力学研究中包括的主要变量有外力、应力、应变和位移。

作用于物体的外力可分为体积力和表面力,分别简称体力和面力。体力是分布在物体体积内的力,以在三个坐标轴上的投影分量表示,记为 P_x, P_y, P_z ; 面力是作用在物体表面上的力,也以在三个坐标轴上的投影分量表示,记为 $\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_z$ 。体力和面力的正负号以指向坐标轴正向为正,反之为负。

在外力作用下弹性体内部单位面积上所产生的内力称为应力。一个点的应力通常用其应力分量组成的应力状态来表示。

为了分析物体内部任意点的应力状态,从其中取出一微小的平行六面体,其长宽高分别为 dx, dy, dz , 如图 1-2 所示。微元体每个面上的应力可分解为一个正应力和二剪应力。正应力用带一个指明其作用方向下标的字母 σ 表示; 剪应力用带两个下标的字母 τ 表示, 第一个下标表示应力作用面的法线方向, 第二个下标表示应力的指向, 例如, τ_{xy} 表示作用在垂直 X 轴的面上, 指向 Y 方向的剪应力。正应力的符号以拉伸应力为正, 压缩应力为负; 剪应力的符号由两个下标所指向的坐标轴方向共同确定, 如图 1-2 所示的剪应力均为正。

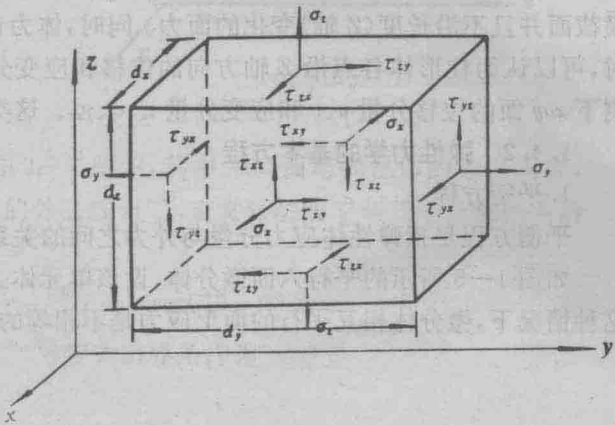


图 1-2

由材料力学的剪应力互等定律可知, 6 个剪应力并不是独立的, 它们两两相等, 即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1-41)$$

这样, 整个微元体只有 6 个独立的应力分量, 它们是 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 。

物体变形后, 微元体各边长 (dx, dy, dz) 的单位长度伸缩量称为正应变, 各边之间角度的改变量称为剪应变。正应变用带一个指明其对应坐标轴方向下标的字母 ϵ 表示, 如 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$; 剪应变用带两个下标的字母 γ 表示, 两个下标为产生剪应变的两个直角边对应的坐