

师范类和工程类本科生试用教材

电动力学基础

李洪才 编著

DIANDONGLIXUE JICHU

福建教育出版社

师范类和工程类本科生试用教材

电 动 力 学 基 础

李洪才 编著

福 建 教 育 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

电动力学基础/李洪才编著. —福州: 福建教育出版社, 1999. 11 (2005. 2 重印)
ISBN 7-5334-2905-2

I. 电… II. 李… III. 电动力学 IV. 0442

中国版本图书馆CIP 数据核字 (1999) 第 51267 号

师范类和工程类本科生试用教材

电动力学基础

李洪才 编著

*

福建教育出版社出版发行

(福州梦山路 27 号 邮编: 350001)

电话: 0591—83725592 83726971

传真: 83726980 网址: www.fep.com.cn)

福州华彩印务有限公司印刷

(福州新店南平路鼓楼工业小区 邮编: 350012)

*

开本 850 毫米×1168 毫米 1/32 7.875 印张 191 千字

2005 年 2 月第 2 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

印数: 2 501—5 100

ISBN 7—5334—2905—2/G·2359 定价: 15.00 元

如发现本书印装质量问题, 影响阅读,

请向出版科 (电话: 0591—83786692) 调换。

再版前言

从现代科技发展和新时期人才培养的要求,我们提出“加强基础,因材施教,分流培养”的方针,把电动力学分为“基础”和“提高”两部分.本书就是为基础服务的.它着重讲述电磁场基本概念,基本运动规律和狭义相对论的基础知识,以及在这些理论建立过程中,“科学假设”是如何提出的,以培养学生提出问题、分析问题、解决问题以及创新能力.

科学的假设在物理学及整个科技发展中起了极其重要的作用.例如在电磁场理论发展中,麦克斯韦关于位移电流的假设,指出不仅电流可以产生涡旋的磁场,变化的电场也可以产生涡旋的磁场,由此建立了电磁场理论——麦克斯韦方程组,预言了电磁波的存在,使整个世界发生了翻天覆地的变化.而爱因斯坦提出的相对论两个基本原理这个大胆的科学假设,创建了狭义相对论,震撼了全世界.在此书再版之际,敬请各位读者从书中品味科学假设才是最大的创新.

本书自出版以来受到广大老师和学生的好评,这是对我最大的奖励,在此表示由衷的感谢.

这次再版得到学院领导及其他同事的大力支持,福建教育出版社的同志为本书的再版付出了大量辛勤劳动,全部插图用电脑重新做过,本书将以崭新的面貌出现,在此特表深深的谢意.

通过再版,我对书中一些错误做了订正,若有遗留错误,敬请读者批评指正.

李洪才

2004年12月9日

目 录

引言	(1)
第一章 数学准备	(3)
§ 1 矢量代数	(3)
§ 2 场论	(4)
1. 标量场的梯度和方向导数 2. ∇ 标符对矢量场的作用 3. 积分变换 公式 4. 关于散度和旋度的几个重要定理 5. 重要的运算公式	
§ 3 球坐标与柱坐标	(12)
1. 球坐标 2. 柱坐标	
习题	(13)
第二章 电磁现象的普遍规律	(15)
§ 1 电荷和电场	(15)
1. 电场 2. 高斯定理与电场散度 3. 静电场的旋度	
§ 2 电流及其连续性方程	(20)
1. 连续性方程 2. 欧姆定律	
§ 3 安培定律和磁场	(23)
1. 毕奥—萨伐尔定律 2. 稳恒电流磁场的环量和旋度 3. 磁场的 散度	
§ 4 麦克斯韦方程组	(28)
1. 法拉第电磁感应定律 2. 位移电流 3. 麦克斯韦方程组 4. 洛伦 兹力	
§ 5 介质的电磁理论	(33)
1. 束缚电荷 2. 电极化矢量 3. 束缚电荷密度和电极化矢量的关系 4. 介质中电场的方程 5. 介质的磁化电流 6. 极化电流密度 7. 介质的	

磁化性质 8. 介质中的麦氏方程

§ 6 电磁场边值关系..... (43)

1. 法向分量 2. 切向分量

§ 7 电磁场能量守恒定律和坡印廷矢量..... (48)

1. 电磁场能量守恒定律 2. $\vec{S}$ 与 w 的表示式 3. 电磁能量的传输

习题 (54)

第三章 静电场和稳恒电流磁场 (57)

§ 1 静电场..... (57)

1. 静电场的场方程 2. 积分方法求电场

§ 2 静电势及其微分方程 (59)

1. 静电场的标势及其微分方程 2. 基本解 3. 边值关系 4. 静电场
中导体的特性 5. 唯一性定理 6. 静电场能量

§ 3 拉普拉斯方程 分离变量法..... (69)

1. 拉普拉斯方程 2. 球坐标拉氏方程的通解

§ 4 电像法..... (84)

1. 点电荷密度的 δ 函数表示 2. 电像法

§ 5 稳恒电流的电场与磁场..... (90)

1. 稳恒电流的电磁场方程 2. 积分法求磁场 3. 矢势 4. 矢势的微
分方程基本解 5. 稳恒电流磁场的能量

§ 6 电多极矩和磁多极矩 (100)

1. 电势的多极展开 2. 电多极矩 3. 小区域电荷体系在外电场中的
能量 4. 矢势的多极展开 5. 小区域电流分布与外磁场的相互作用能

习题 (111)

第四章 电磁波的传播..... (115)

§ 1 平面电磁波 (115)

1. 真空中电磁场的波动方程 2. 定态波动方程 3. 平面电磁波
4. 平面电磁波的能量和能流

§ 2 电磁波在介质分界面上的反射和折射 (126)

1. 反射定律和折射定律 2. 振幅关系, 菲涅耳公式 3. 全反射	
§ 3 导体存在时电磁波的传播	(135)
1. 导体内的自由电荷分布 2. 单色波在导体内的传播 3. 穿透深度和趋肤效应 4. 导体表面的反射	
§ 4 波导管	(142)
1. 理想导体边界条件 2. 波导管 3. TE_{10} 波的电磁场和管壁电流	
4. 截止频率	
习题	(151)
第五章 电磁波的辐射	(153)
§ 1 达朗伯方程和它的推迟势解	(153)
1. 电磁场的矢势和标势 2. 达朗伯方程和洛伦兹条件 3. 规范变换和规范不变性 4. 达朗伯方程的解——推迟势	
§ 2 电偶极辐射	(157)
1. 计算辐射场的几个公式 2. 矢势的展开式 3. 电偶极辐射 4. 辐射能流, 角分布, 辐射功率	
§ 3 电磁波的衍射	(166)
1. 衍射问题和基尔霍夫公式 2. 小孔衍射 3. 夫琅和费衍射	
§ 4 电磁场的动量	(172)
1. 电磁场的动量守恒定律 * 2. 电磁场的动量密度和动量流密度	
3. 动量密度 $\vec{g}$, 能流密度 $\vec{S}$ 以及能量密度 w 之间的关系	
习题	(177)
第六章 狭义相对论基础	(179)
§ 1 相对论的实验基础 相对论的基本原理	(180)
1. 伽利略相对性原理和伽利略变换 2. 狭义相对论的实验基础	
3. 相对论的基本原理	
§ 2 洛伦兹变换 相对论的时空理论	(187)
1. 间隔不变性 2. 洛伦兹变换 3. 相对论的时空结构 4. 运动尺度的缩短 5. 运动时钟的延缓 6. 速度变换公式	

§ 3 相对论理论的四维形式	(203)
1. 洛伦兹变换的四维形式 2. 物理量按洛伦兹变换性质分类 3. 多普勒效应与光行差公式 4. 物理规律的协变性	
§ 4 电动力学理论的协变性	(213)
1. 四维电流密度矢量与连续性方程的协变性 2. 四维势矢量和达朗伯方程的协变性 3. 电磁场张量和麦克斯韦方程的协变性	
§ 5 相对论力学	(223)
1. 四维动量矢量 2. 质能关系 3. 相对论力学方程	
习题	(233)
附录 I 常用运算公式	(236)
附录 II 轴对称情形下拉普拉斯方程的通解	(239)
附录 III 国际单位制和高斯单位制中主要公式对照表	(241)

引 言

电磁场是物质世界的重要组成部分。在生产实践、科学技术领域以及日常生活中,人们经常面临着大量与电磁场有关的问题。因此,认识电磁场的基本属性、运动规律及其与带电物质之间的相互作用,对生产实践和科学实验都有重要意义。

电动力学是在人类对电磁现象的长期观察和生产活动的基础上,实验物理学家与理论物理学家不断探索的结果。1785年,库仑做了扭秤实验,确立了库仑定律。1820年,奥斯特经过实验研究发现了电流的磁效应,引进磁场概念。从此,电与磁现象的研究经常联系在一起。安培得到奥斯特发现的消息后,同年做了一系列实验,创造性地发展了奥斯特实验内容,确定了安培定律。法拉第本着“磁能转化成电”的思想,从1821年起,经过10余年系统的探索,终于在1831年发现了电磁感应现象,并于1851年建立了电磁感应定律。法拉第不仅在实验上作出了伟大贡献,而且在理论上提出了场的概念和力线的模型。麦克斯韦利用场的概念及力线模型,于1855年引入新的矢量函数描述电磁场,并将前人的物理思想表达成数学形式,于1861年提出了位移电流和涡旋电场的假设,最终在1864年把电磁规律总结为麦克斯韦方程组。麦克斯韦不仅给出了反映电磁场普遍规律的方程组,而且预言了电磁波的存在,提出了光的电磁理论。这一理论是物理学史上一个重要的里程碑,其实实验证实是由赫兹经过10年的努力于1888年完成的。麦克斯韦的理论及赫兹实验奠定了今天广泛应用与深入发展的电子科学技术的基础。

二十世纪以来, 由于生产现代化及科学技术不断发展, 人们进一步研究电磁场的微观性质, 发展了量子电动力学. 生产与科学技术的需要, 对各种物质材料的电磁性能提出新的要求, 而对超导体, 非线性介质及激光等的研究又对电动力学不断提出新的课题. 新的实践将不断地推进电动力学理论的发展.

由于电磁场是高速运动的物质, 因此经典的时空观与电磁现象新的实验事实发生矛盾. 矛盾的解决导致新的时空理论的产生. 1905 年, 爱因斯坦在前人的基础上, 大胆提出了两个基本假设, 即相对性原理和光速不变原理, 建立了狭义相对论. 电动力学只有在新时空观的基础上才发展成为完整的、适用于任何惯性参考系的理论. 相对论是现代物理学的重要基础理论之一, 是二十世纪最伟大的发现之一, 对物理学的发展有深远的影响, 因此, 系统阐述狭义相对论的基本理论是本课程的重要任务之一.

本书对象主要是高等师范院校、工科院校学生以及准备参加自考和函授的学生. 鉴于他们对矢量分析、场论等数学方面不熟悉, 我们在第一章数学准备中, 将电动力学所常用的数学知识作了分析, 为解决电动力学中的数学问题作了准备. 第二章中我们将从分析电磁学各个实验定律出发, 推演出统一的电磁场理论、麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式, 着重讲解在推演过程中理论物理工作精华, 即如何从法拉第电磁感应定律、变化磁场产生涡旋电场而引发出变化电场也会产生涡旋磁场的思想, 从而导致位移电流的引入, 得到麦克斯韦方程组. 其后几章是利用麦克斯韦方程组解决各个具体问题, 如静电、静磁、电磁波传播和辐射等. 最后一章介绍爱因斯坦狭义相对论, 我们从电动力学参考系问题引入相对论时空观, 并将电动力学基本方程表示为四维形式以满足协变性, 并说明相对论力学基本概念.

本书采用国际单位制 (SI).

第一章 数学准备

§ 1 矢量代数

只有大小、没有方向的量称为标量，如质量 m 、时间 t 等；既有大小，又有方向的量称为矢量。

矢量的表示方法为

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3,$$

其中 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为三个正交基矢，如图1-1所示，且满足 $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ 关系，即右手螺旋关系。

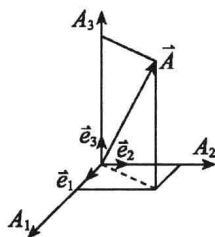


图 1-1

矢量运算规律有很多种：

1. 加法

$$(1) \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (\text{交换律})$$

$$(2) \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (\text{结合律})$$

2. 乘法

(1) 与数相乘满足

$$(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A} \quad (\text{分配律})$$

$$m(n\vec{A}) = mn\vec{A} \quad (\text{结合律})$$

(2) 点乘（标量积）

点乘的表示法为

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\angle \vec{A} \vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

有性质

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (\text{交换律})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (\text{分配律})$$

例如 $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

(3) 叉乘 (矢量积)

在直角坐标系下, 叉乘表示为

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = & \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) \\ & + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned}$$

有性质

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$(m \vec{A}) \times \vec{B} = m(\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

显然有 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

(4) 混合积

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

§ 2 场 论

如果在全空间或部分空间的每一点, 都对对应着某个物理量的一个确定值, 就说在这个空间里确定了该物理量的场. 若这个物理量是标量, 则该场为标量场 $\varphi(x, y, z)$; 若是矢量, 则该场为矢量场 $\vec{A}(x, y, z)$ 等.

1. 标量场的梯度和方向导数

标量场的梯度是一个矢量, 其方向垂直于等位面指向标量场变化最快的方向, 大小等于该方向上的变化率.

在直角坐标系中, 标量场 $\varphi(x, y, z)$ 的梯度表示为

$$\nabla\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (2.1)$$

其中引进了符号

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.2)$$

若沿线元 dl 上, 标量场 $\varphi(x, y, z)$ 的数值改变 $d\varphi$, 则

$$\frac{d\varphi}{dl} = \nabla\varphi \cdot \frac{d\vec{l}}{dl} = \nabla\varphi \cdot \vec{n} \quad (2.3)$$

为 φ 在 $\vec{n}$ 方向上的方向导数, 或称 φ 在 $\vec{n}$ 方向的变化率.

由此可见, 若邻近点取在同一等位面上, 则 φ 在等位面上的变化率 $\frac{d\varphi}{dl} = 0$, 即 $\nabla\varphi$ 的方向垂直等位面方向, 或称 φ 的梯度总是平行于等位面法线方向 $\vec{n}$, 而且在此方向上, 其变化率最大.

[例1] 求 ∇r , $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\text{解: } \nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{同理 } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\therefore \nabla r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

由此题可知, r 的等势面为球面, ∇r 一定沿半径 $\vec{r}$ 方向. 由此可推广, 对于任意函数 $\varphi(r)$, 其梯度 $\nabla\varphi(r) = \frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} \nabla r = \frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$

• $\frac{\vec{r}}{r}$, 也是沿径向方向.

[例2] 已知 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, 求 ∇r , $\nabla' r$, $\nabla' = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$.

解: 由对称性可知

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \nabla' r = -\frac{\vec{r}}{r}$$

其中 $\vec{r} = \vec{e}_x (x-x') + \vec{e}_y (y-y') + \vec{e}_z (z-z')$. 值得注意的是, ∇ 标符既是微商标符又有方向, 运算时应多加小心.

2. ∇ 标符对矢量场的作用

(1) 散度 设闭合曲面 S 围着体积 ΔV , 当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时, 矢量场 $\vec{E}$ 对 S 的通量与 ΔV 之比的极限称为 $\vec{E}$ 的散度, 即

$$\text{div } \vec{E} \equiv \nabla \cdot \vec{E} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (2.4)$$

表征矢量场 $\vec{E}$ 的发散本领. 由此定义可知, 在直角坐标系中, $\nabla \cdot \vec{E}$ 的表示式为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (2.5)$$

是一标量.

若 $\nabla \cdot \vec{E} > 0$, 表示有源, 如图 1-2 (a);

若 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, 表示无源, 如图 1-2 (b);

若 $\nabla \cdot \vec{E} < 0$, 表示尾间, 如图 1-2 (c).

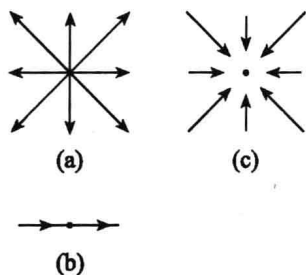


图 1-2

[例3] 已知 $\vec{r} = (x-x')\vec{e}_x + (y-y')$

$y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z$, 求 $\nabla \cdot \vec{r}$.

解: $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

(2) 旋度 设闭合曲线 L 围着面积 ΔS , 当 $\Delta S \rightarrow 0$ 时, 矢量场 $\vec{B}(x, y, z)$ 对 L 的环量与 ΔS 之比的极限称为 $\vec{B}$ 的旋度沿该面法线 $\vec{n}$ 的分量, 即

$$(\text{rot } \vec{B})_n = (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (2.6)$$

由此定义得 $\vec{B}$ 的旋度在直角坐标系中的表示式为

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (2.7)$$

[例4] 计算 $\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r \neq 0$.

解: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

当 $r \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} &= \vec{e}_x \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^3} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r^3} \right) \\ &\quad + \vec{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{r^3} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} = z \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r^3} = -\frac{3yz}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^3} = y \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r^3} = -\frac{3yz}{r^5}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^3} = 0$$

同理 $\frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{r^3} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{r^3} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{r^3} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^3} = 0$$

$$\therefore \nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad r \neq 0$$

3. 积分变换公式

(1) 高斯定理 对于空间任意区域, 有

$$\oint_S \vec{f} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV \quad (2.8)$$

式中 S 为区域 V 的界面, $d\vec{\Sigma}$ 方向由内向外 (这是对封闭曲面的面积分的普遍规定).

(2) 斯托克斯定律 对于空间任意曲面, 有

$$\oint_L \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{\Sigma} \quad (2.9)$$

式中 L 为 S 的边界线. 线积分的回转方向与面的正方向合乎右手螺旋关系 (这也是普遍规定).

4. 关于散度和旋度的几个重要定理

(1) 标量场的梯度必定为无旋场, 即

$$\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} [\text{证}] \quad \nabla \times \nabla \varphi &= \vec{e}_x \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + \vec{e}_y \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \\ &\quad + \vec{e}_z \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

即 $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$

(2) 反之, 无旋场可表示为一个标量场的梯度, 即

$$\text{若 } \nabla \times \vec{f} = 0, \quad \text{则 } \vec{f} = \nabla \varphi \quad (2.11)$$

(3) 矢量场的旋度必为无散场, 即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 [\text{证}] \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(4) 反之, 无散场可表为一个矢量场的旋度, 即

$$\text{若 } \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{则 } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.13)$$

注意: 解 $\vec{A}$ 不是唯一的, $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Psi$ 也是解, 其中 Ψ 是任意的标量场.

5. 重要的运算公式

(1) 复合函数的运算

① 设标量场 $\varphi = \varphi(u)$, $u = u(x, y, z)$, 则标量场 φ 的梯度为

$$\nabla \varphi = \nabla u \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad (2.14)$$

[证] 取直角坐标系, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

$$\begin{aligned}
 \nabla \varphi &= \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \\
 &= \nabla u \frac{\partial \varphi}{\partial u}
 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \nabla \varphi = \nabla u \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

② 设矢量场 $\vec{A} = \vec{A}(u)$, $u = u(x, y, z)$

$$\text{则 } \nabla \cdot \vec{A} = \nabla u \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla u \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \quad (2.16)$$

$$[\text{证}] \quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$