中国科学院教材建设专家委员会规划教材

全国高等医药院校规划教材

医用高等数学

祁爱琴　邵珠艳　胡西厚　主编

附送光盘

科学出版社

中国科学院教材建设专家委员会规划教材
全国高等医药院校规划教材

医用高等数学

主　编　祁爱琴　邵珠艳　胡西厚
副主编　高明海　王培承　孔　杨　古鲁峰
编　委　（按姓氏笔画排序）
王希杰　王培承　孔　杨　古鲁峰　刘守鹏
刘　芳　刘　琳　祁英华　祁爱琴　邵珠艳
岳　丽　屈志强　胡西厚　高明海

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共9章,内容包括:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程基础、概率论及其医学应用、MATLAB软件及其在微积分中的应用.

本书的编写充分考虑了与读者高中阶段所学数学知识的衔接,力求做到内容选择恰当、结构编排合理、叙述通俗易懂.抽象概念的介绍注重以实例引入,淡化了计算技巧,更加注重培养基本运算能力.同时,为顺应当前高等数学教学改革的趋势,介绍了MATLAB软件的应用,为发挥数学实验与数学软件的辅助教学作用和提高学生的计算机应用能力提供了有力的支持.

本书可作为高等医药院校医学各专业的本科生教材,也可作为医学各专业研究生及医药工作者的参考书.

图书在版编目 CIP 数据

医用高等数学/祁爱琴,邵珠艳,胡西厚主编.—北京:科学出版社,2013.8

中国科学院教材建设专家委员会规划教材·全国高等医药院校规划教材

ISBN 978-7-03-038016-6

Ⅰ.医…　Ⅱ.①祁…②邵…③胡…　Ⅲ.医用数学-医学院校-教材　Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第136223号

责任编辑:胡治国/责任校对:宣　慧

责任印制:肖　兴/封面设计:范璧合

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013年8月第　一　版　开本:787×1092　1/16

2013年8月第一次印刷　印张:16 1/4

字数:380 000

定价:45.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

近年来,数学的理论与方法在医学领域被广泛地应用,并取得了显著成效.许多疾病的发生发展、分布传播以及诊断治疗等问题的深层次研究都需要数学模型的支持,因为从数学角度可以科学地揭示其一般规律.随着现代医学研究日益向数量化、精确化的方向发展,对医学人才的数学水平提出了新的更高的要求,即尽可能系统地掌握必要的数学知识、具备一定的数学素养,增强抽象思维和逻辑思维的能力,以适应现代医学事业的发展.

高等数学是医学本科生的必修课程,在培养高素质强能力医学人才中发挥着越来越重要的作用.本教材面向医学高等教育的新形势,以拓宽基础和视野、培养能力和素质为目标,依据高等学校非数学类专业数学课程指导委员会制定的医学类专业高等数学教学基本要求的文件精神,结合当前医学专业本科培养方案的要求,为普通本科医学专业学生编写.在编写过程中,广泛吸收了国内外现有教材的优点,并在深入调研高中数学教学的基础上,充分考虑了与学生高中阶段所学数学知识的衔接,力求做到内容选择恰当、结构编排合理、叙述通俗易懂.抽象概念的介绍注重以实例引入,以期引领学生深刻感悟数学的思想方法.淡化了计算技巧,更加注重培养基本运算能力.同时,本教材顺应当前高等数学改革的趋势,介绍了 MATLAB 软件的应用,为发挥数学实验与数学软件的辅助教学作用和提高学生的计算机应用能力提供了有力的支持.

本教材包括9章,内容分别为:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程基础、概率论及其医学应用、MATLAB 软件及其在微积分中的应用.书中打*号者为选讲内容,可根据教学时数安排选讲.

全书由祁爱琴、胡西厚、王培承统稿,祁爱琴、邵珠艳、高明海进行了全书的审校.

本书力图避免现有医用高等数学教材因忽视理论证明而演变为条条式列出结论的现象.对于某些难以理解的结论辅之以详细的文字分析或必要的证明,证明以小号字印刷,为方便学生理解而设,不作为授课必讲内容,也不作为学生必须掌握的内容.本书可作为高等医药院校医学各专业的本科生教材,也可作为医学各专业研究生及医药工作者的参考书.由于作者水平所限,书中疏漏难免,敬请各位专家、读者提出宝贵意见.

编　者

2013年1月

目　录

第一章　函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象,它描述了变量与变量之间的相互联系,是用于表达变量间复杂关系的基本数学形式．极限描述了当某个变量变化时,与之相关的变量的变化趋势,是深入研究函数的重要方法．极限概念是微积分中最基本的概念,在后面的学习中我们将会看到微积分中的重要概念如导数、定积分都可以表示为某种形式的极限．本章在初等数学基础上进一步介绍函数、极限以及函数的连续性等概念与性质,这些内容是后面各章的基础．

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

如果在某一研究过程中,一个量始终保持同一数值,这样的量称为**常量**(constant)．例如在匀速运动中,物体运动的速度是一个常量．如果在某一研究过程中,一个量可以取不同的数值,这样的量称为**变量**(variable)．常量与变量是相对的,如在一天中儿童的身高可近似看作常量,但在一年中该儿童的身高则应视为变量．一般地,常量用 A、B、C 等字母表示,变量用 x、y、z 等字母表示。

2. 区间与邻域

对应于数轴上介于两个定点之间的所有点的集合称为**区间**,这两个定点称为区间的端点．常用的区间有以下几种类型(假设 a、b 都是实数,且 $a<b$).

(1) 开区间:$(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

(2) 闭区间:$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

(3) 半开半闭区间:$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,或$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

如果区间的两个端点都是有限的实数,称为**有限区间**．数 $b-a$ 称为区间的**长度**．若区间的一个或两个端点不是有限实数,则称为**无限区间**,如

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

全体实数的集合 R 通常记作区间$(-\infty,+\infty)$.

设 x_0 与 δ 为两个实数,且 $\delta>0$,称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 x_0 的 **δ 邻域**,记为 $U(x_0,\delta)$(图 1-1),即

$$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\},$$

其中 x_0 称为该邻域的**中心**,δ 称为该邻域的**半径**．点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后,称为点 x_0 的**去心 δ 邻域**,记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}.$$

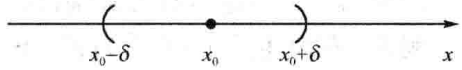


图 1-1

邻域是后面常用的概念.

3. 函数的概念

定义 1 设 x 与 y 是同一过程中的两个变量,D 是给定的数集. 如果对于每个 $x \in D$,按照一定的对应法则 f,变量 y 总有唯一确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**(function),记作

$$y=f(x), \quad x \in D.$$

变量 x 称为**自变量**(independent variable),变量 y 称为**因变量**(dependent variable).

D 是自变量 x 的所有允许值的集合,称为函数的**定义域**(domain). 而因变量 y 的所有值的集合称为函数的**值域**(range),记为 $W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$.

对于函数 $f(x)$ 定义域中的每一点 $x_0 \in D$,函数 $f(x)$ 总有唯一确定的值与其对应,这个因变量的值称为函数在 x_0 处的**函数值**(functional value),记为 $y_0=f(x_0)$ 或 $y_0=y|_{x=x_0}$.

根据函数的定义可以看出,函数是由定义域与对应法则确定的,这是函数的两要素. 当函数的定义域与对应法则确定后,函数的值域也就相应地确定了. 两个函数,当且仅当它们的定义域与对应法则都相同时,才表示相同的函数,而与自变量和因变量的符号无关. 在给出某函数时,一般都标明其定义域. 否则,定义域就是指自然定义域,即使得函数有意义的自变量取值的全体构成的集合,常用集合或区间表示.

例 1 求函数

$$y=\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{x}$$

的定义域.

解 要求函数的定义域,只需求出使函数有意义的自变量 x 的取值范围即可.

要使函数有意义,必须

$$\begin{cases} 1+x>0, \\ 1-x^2 \geqslant 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x>-1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

解此不等式组得 $-1<x \leqslant 1$,且 $x \neq 0$,所以该函数的定义域可表示为 $(-1,0) \cup (0,1]$.

在实际问题中,函数的定义域要根据问题的实际意义确定.

例 2 在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的高度为 h,则其运动规律为 $s=\frac{1}{2}gt^2$,其中 g 为重力加速度,求函数 s 的定义域.

解 仅从抽象的函数表达式看,t 可以取一切实数值 $(-\infty,+\infty)$. 但考虑到问题本身的实际意义,显然应有

$$t \geqslant 0 \text{ 且 } 0 \leqslant s \leqslant h, \quad 而\ t=\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

故该函数的定义域为 $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

函数的表示法通常有公式法(解析式法)、图像法和表格法.

例 3 在出生后 1 ~ 6 个月内,正常婴儿的体重近似满足以下关系式

$$y=3+0.6x,$$

其中 x 表示婴儿的月龄，y 表示婴儿的体重(kg)，该函数的定义域为[1,6]．若不考虑问题的实际意义，函数 $y=3+0.6x$ 的自然定义域则为$(-\infty,+\infty)$．

例 4　监护仪自动记录了某患者一段时间内体温 T 的变化曲线，如图 1-2 所示．

对于在该段时间内的任一时刻，都可以根据此图读出患者在这一时刻的体温值，患者体温 T 是时间 t 的函数 $T=T(t)$．这是用图像法表示的函数关系．对于健康人而言，体温通常在 $T=37$℃，反映在图像上，是一条平行于 t 轴的直线．

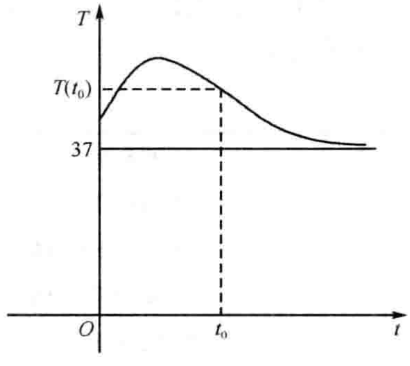


图 1-2

例 5　某地区 2001～2010 年的胃癌发病率，如表 1-1 所示．可以看出，对于在 2001～2010 年间的每一年 t，都有一个发病率 y 与之对应，y 是 t 的函数，对应规律由表 1-1 给出，这是用表格法表示的函数关系．

表 1-1　某地区 2001～2010 年的胃癌发病率

t(年份)	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
y(发病率‰)	4.74	3.52	3.36	2.82	3.03	3.08	2.57	1.58	1.69	2.05

在经济、生物、医学及工程技术等领域中，经常遇到一类函数，当自变量在定义域的不同范围内取值时，对应法则需要用不同的式子来表示，这类函数称为**分段函数**(piecewise function)．

例 6　设 $x\in R$，取不超过 x 的最大整数简称为 x 的**取整函数**，记为 $f(x)=[x]$．例如 $[\pi]=3$，$[\sqrt{3}]=1$，$\left[\dfrac{2}{5}\right]=0$，$\left[-\dfrac{2}{5}\right]=-1$．取整函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是整数集 $\mathbf{Z}$，这是一个分段函数，其图形如图 1-3 所示．

例 7　在生理学研究中，血液中胰岛素浓度 $c(t)$(单位：ml)随时间 t(min)变化的经验公式为

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25e^{-k(t-5)}, & t>5.\end{cases}$$

式中 $k>0$ 为常数．这是一个分段函数(图 1-4)．

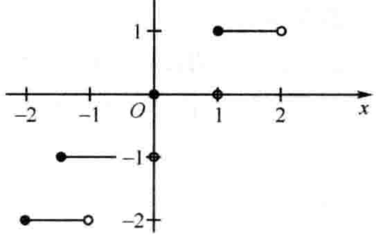


图 1-3

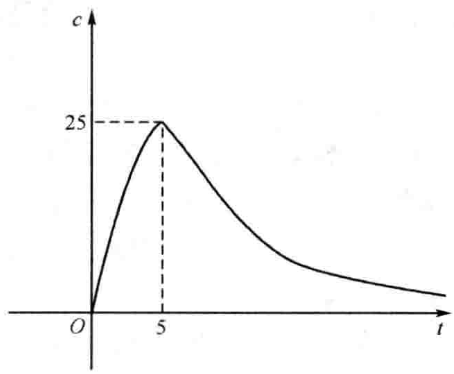


图 1-4

我们看到在 $t=5$ 的左右两侧，函数 $c(t)$ 的表达式不同，这种点称为分段函数的**分段点**（或**分界点**）.

例 8 建设银行发售的某款理财产品，规定客户的年化收益率 y(%)与投资期 x(天)的关系见表 1-2.

表 1-2 客户预期年化收益率

投资期/天	预期年化收益率/%
1≤投资期<30	1.11
30≤投资期<60	3.21
60≤投资期<90	3.36
90≤投资期<120	3.57
120≤投资期<150	3.66
150≤投资期<180	3.78
投资期≥180	4.20

用公式法表示为

$$y=\begin{cases}1.11, & 1\leqslant x<30,\\ 3.21, & 30\leqslant x<60,\\ 3.36, & 60\leqslant x<90,\\ 3.57, & 90\leqslant x<120,\\ 3.66, & 120\leqslant x<150,\\ 3.78, & 150\leqslant x<180,\\ 4.20, & x\geqslant 180.\end{cases}$$

这是一个分段函数，分段点有 6 个，分别是 $x=30,60,90,120,150,180$(天).

二、反 函 数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为数集 D，值域为数集 W，若对每一个 $y\in W$，都有唯一的 $x\in D$ 满足关系 $f(x)=y$，那么就将此 x 值作为取定的 y 值的对应值，从而得到一个定义在 W 上的新函数，称其为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 记作

$$x=f^{-1}(y).$$

显然，这个函数的定义域为函数 $y=f(x)$ 的值域 W，它的值域为函数 $y=f(x)$ 的定义域 D. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

在函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中，字母 y 表示自变量，字母 x 表示因变量. 但习惯上一般用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此在讨论反函数本身时，常常对调函数式中的字母 x、y，将它改记为 $y=f^{-1}(x)$.

因此，在同一坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（图 1-5）.

容易得到下面关于反函数存在性的充分条件：**若函数 $y=f(x)$ 在某个定义区间 I 上单**

调（增加或减少），则其反函数必定存在．这是因为，由于函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调，对于该函数值域 W 中的任一值 $y\in W$，I 内必定有唯一的 x 值满足 $f(x)=y$，从而 $y=f(x)\,(x\in I)$ 存在反函数．

例 9　正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$．对于任一 $y\in[-1,1]$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内有无穷多个 x 值满足 $\sin x=y$，因而 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数．但如果把正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域限制在它的单调区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$（常称此区间为正弦函数的**单调主值区间**）上，即对于 $y=\sin x\left(x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$，由上述反函数存在的充分条件可知，必定存在反函数．这个反函数称为**反正弦函数**，记作 $y=\arcsin x$．反正弦函数的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$（图 1-6）．

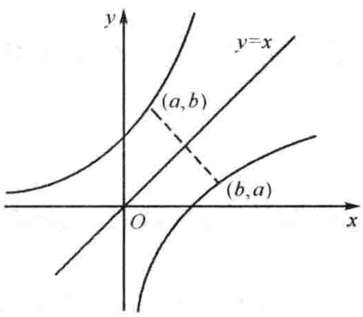


图 1-5

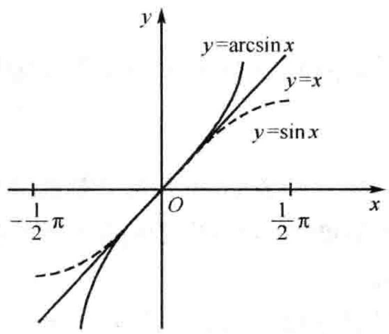


图 1-6

类似地，可以定义在区间 $[0,\pi]$ 上余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数，称为**反余弦函数**，记作 $y=\arccos x$，其定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$；定义在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的正切函数 $y=\tan x$ 的反函数，称为**反正切函数**，记作 $y=\arctan x$，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；定义在区间 $(0,\pi)$ 内的余切函数 $y=\cot x$ 的反函数，称为**反余切函数**，记作 $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,\pi)$．

函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**反三角函数**．

三、函数的性质

研究函数的性质是为了更好地了解其变化规律．函数的性质主要包括有界性、单调性、奇偶性及周期性，其中函数的单调性、奇偶性及周期性在中学已有较多的讨论．

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$．如果存在 $M>0$，对任一 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**．如果这样的正数 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 X 上**无界**．

若函数 $f(x)$ 在 X 上有界，常说 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**；若函数 $f(x)$ 在 X 上无界，也说

$f(x)$是 X 上的**无界函数**.

例如,正弦函数 $y=\sin x$ 在整个定义域$(-\infty,+\infty)$上有界,因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有$|\sin x|\leqslant 1$(存在正数 $M=1$),也可以说 $y=\sin x$ 是其定义域上的有界函数;同理可知,余弦函数 $y=\cos x$ 以及反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 都是各自定义域上的有界函数;而函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内是无界的,因为不存在这样的正数 M,使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$对于$(0,1)$内的一切 x 都成立. 但$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$[1,+\infty)$内是有界的,因为可取 $M=1$使不等式$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于区间$[1,+\infty)$中的任意 x 都成立.

2. 函数的单调性

设函数$f(x)$在区间 I 内有定义,如果对于 I 内任意两点 x_1, x_2,当$x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间 I 内是**单调增加**的;如果对于 I 内任意两点 x_1, x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间 I 内是**单调减少**的.

单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**,使得函数单调的定义区间称为函数的**单调区间**.

例如,函数$f(x)=x^2$ 在定义区间$[0,+\infty)$上单调增加,在定义区间$(-\infty,0]$上单调减少. 区间$[0,+\infty)$与$(-\infty,0]$是函数$f(x)=x^2$ 的单调区间.

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称$f(x)$为**偶函数**. 如果对于任一 $x\in D$,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称$f(x)$为**奇函数**.

例如,$f(x)=\sin x$ 是奇函数,$f(x)=\cos x$ 是偶函数. 显然,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点 O 对称.

4. 函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为 D,如果存在常数 $T\neq 0$,使得对于任一 $x\in D$,且 $x+T\in D$,恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称$f(x)$是**周期函数**. T 称为$f(x)$的**周期**. 通常所说的周期是指函数的**最小正周期**.

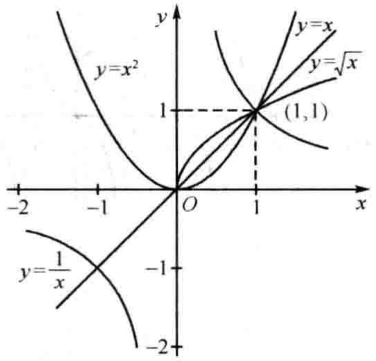
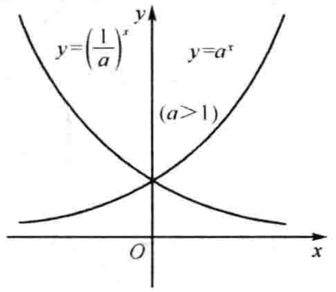
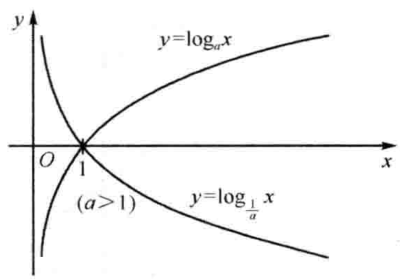
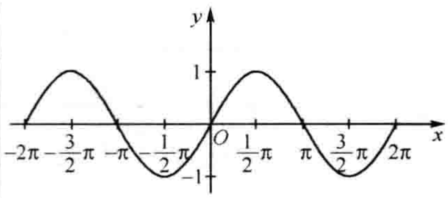
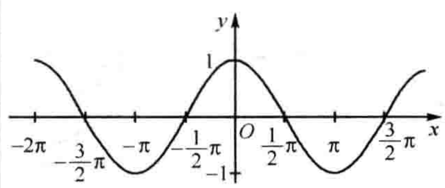
例如,函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是周期函数,周期都为 2π;函数 $\tan x$、$\cot x$ 的周期都为 π.

四、初等函数

1. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这五类函数统称为**基本初等函数**(basic elementary function). 五类基本初等函数的图形及主要性质见表 1-3.

表 1-3　五类基本初等函数的图形及性质

函数	定义域	图形	性质
幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 是常数）	随 μ 的不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		过(1,1)点，在$[0,+\infty)$内，当 $\mu>0$ 时，单调增加；当 $\mu<0$ 时，单调减少
指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方，过(0,1)点，当 $0<a<1$ 时为减函数；当 $a>1$ 时为增函数
对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，过点(1,0)，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数
正弦函数 $y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，奇函数，有界函数，$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$
余弦函数 $y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，偶函数，有界函数，$\lvert\cos x\rvert\leqslant1$