厦门大学

研究生硕士学位论文摘要

（1990年度）

下
册

（理 科）

厦门大学研究生院编

1993.4.

研究生论文摘要集

（1990 年度）

下

册

（理　　科）

厦门大学研究生院编

1993. 4

具有逐块光滑强拟凸边界域中解析子簇上的积分表示公式

研究生：支 远　　指导教师：陈叔瑾教授

Henkin[1]和 Ramirez 得到具有光滑边界的强拟凸域上全纯函数的积分表示公式，Range 和 Siu[2]使其结果在具有逐块光滑边界的强拟凸域上得到实现，随后，stout[3]Hatziafratis[4]先后把 Herkin 和 Ramire 的结果拓广到具有光滑边界的强拟凸域中解析超曲面和解析子簇上去，本文应用他们的思想得到具有逐块光滑边界的强拟辽域中解析超曲面和解析子簇上的全纯函数的积分表示公式。

一、推导中遇到的问题：

①超曲面上积分表示与所给的区域原有的积分表示公式比较，积分区域低实准，因此用 stocks 公式来降低实一维是自然的思想，要用 stocks 公式需要用到恰当性，本文的关键步骤之一是证明其恰当性。

②积分表示的问题往往集中于如何消除奇性，而我们这里也有这个问题，本文考虑把积分区域分成二部分分别讨论。$G^{-1}(\varepsilon)\cong G^{-1}(0)$（微分同胚）是主要的实验之二。

③比较本文与 *stout* 等人的文录，我们要求的条件似乎加强了一些，本文妥求在整个区域上的解析（全纯）函数才可作出积分表示公式，而它们只要求在子簇的邻域上解析，但本文的结果还是他们的推广，理由是对于强拟辽域只要满足子簇的邻域上解析，就等同于在整个强拟凸域上解析，这是 *Henkin* 间的结果，而实际上他们在证明中也是利用该结果，先作延拓成为强拟凸域上的解析函数进行的。

二、主要的定义和定理

1. C^n 中的有界域称为具有逐块光滑强拟凸的边界，若有：

1）∂D 的开邻域 V 有有限开复盖 $\{V_j\}_{j=1}^{k}$

2）C^∞ 的强多次调和函数 $P_j:V_j\to R$ $(1\leqslant j\leqslant k)$使得：*a*）$D\cap V=\{x\in v\mid$对于 $1\leqslant j\leqslant k$ 要么 $x\notin V_j$，要么

$$\rho_s(x)<0\}$$

b）对于 $1\leqslant i_1<\cdots<i_e\leqslant k$ 和任何属于 $\bigcap\limits_{v=1}^{l}V_{iv}$的 1－形式 $d\rho_{i_1}\cdots d\rho_{i_l}$是实线性无关的我们称 $3V_j,\rho_j\xi_{j=1}^{k}$是一个标架

注：比较强拟凸域的定义；若标架的 $k=1$ 就是强拟凸域。

2. 设 $G\in\mathscr{O}(\overline{D})$，$G$ 不恒为零，记 $Z(G)$是 G 的零点集，记 $m=z(G)\cap D$ $mI=z(G)\cap S_z$

1）m 是连通的

2）dG 在 $z(G)\cap\partial D$ 上恒不为零

3）$z(G)$模截 S_I

注：所谓横截就是：二流形在相交点关于这两个流形的切空间的和的维数是环绕空间的维

数。

由以上假设可以得到 S_I 是微分流形，并得出 $G^{-1}(\varepsilon) \cong G^{-1}(0)$。

3. 引理：D 是具有逐块光滑的强拟凸边界的域，U 是 $\overline{D}$ 上的全纯函数，对于 $z \in D$，有积分公式

$$u = C_n \sum_I \int_{S_I \times \triangle I} u \cdot \Omega_{n,0}$$

$\sum\limits_I$ 表示关于所有$\{1,\cdots,k\}$的严格有序子集求和

$$C_n = \frac{(-1)^n (n-1)/2}{(2\pi i)^n}$$

$$\Omega_{n,0} = det \begin{pmatrix} w_1 & \bar{\partial}_{\zeta,\lambda} w_1 \cdots \bar{\partial}_{\zeta,\lambda} w_1 \\ \cdots\cdots & \\ w_n & \bar{\partial}_{\zeta,\lambda} w_n \cdots \bar{\partial}_{\zeta,\lambda} w_n \end{pmatrix} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$$

4. 定理 2. u 是 $\overline{V}$ 上的全纯函数，在以上假设下，对于 $z \in m$：有

$$u(z) = C(m,n) \sum_{1 \leqslant |I| \leqslant n-m} \int_{m_I} u(\zeta) A_m^I(z,\zeta) \wedge \beta^h(\zeta)$$

其中 $A_m^I(z,\zeta)$是当 ζ 固定关于 z 全纯，当 z 固定关于 ζ 连续的$(0, n-m-|I|)$形式，若 $I=(i1\cdots ie)$，则

$$A_m^I(z,\zeta) = \gamma_n^l \sum_{j_1 j_{n-e-m}} \partial_{j_1 \cdots j_{n-e-m}} \times$$

$$det \begin{pmatrix} g_1 & h_{11} \cdots h_{m_1} & w_1^{(i_1)} \cdots w_1^{(i_l)} \bar{\partial}_\zeta w^{(j_1)} \cdots \bar{\partial}_\zeta w^{(j_{n-m-e})} \\ g_n & h_{1n} \quad h_{mn} & w_n^{(i1)} \cdots w_n^{(i_l)} \bar{\partial}_\zeta w^{(j_1)} \bar{\partial}_\zeta w^{(j_{n-m-e})} \end{pmatrix}$$

$\gamma_n^l, \alpha_{j_1 \cdots j_{n-e-m}}$都是常数。

证明：就是解决上面提出的遇到的问题。先是证明解析超曲面上的问题，并由于采用矩阵表示核的方法，使得到解析子簇上的推广变得容易。

海洋长波方程的几个绝对稳定有限差分格式

研究生：吴晓明　指导教师：许汝林副教授

本文讨论如下二维的长波方程：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)u]+\frac{\partial}{\partial y}[h+\zeta)v]=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{C_0}{h+\zeta}|\vec{u}|u-fv+g\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

$$=g\frac{\partial\zeta_c}{\partial x}-\frac{1}{e}\frac{\partial Pa}{\partial x}+\frac{\tau\times s}{h+\zeta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{c_0}{h+\zeta}|\vec{u}|v+fu+g\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

$$=g\frac{\partial\zeta_c}{\partial y}-\frac{1}{p}\frac{\partial Pa}{\partial y}+\frac{\tau_{ys}}{h+\zeta}$$

$$\vec{u}\cdot\sigma|_{\text{固边}}=0$$

$$\vec{u}\cdot\sigma|_{\text{开边1}}=\varphi_1$$

$$\xi|_{\text{开边2}}=\varphi_2$$

将上述方程写成下面形式

$$\frac{\partial\varnothing}{\partial t}+A\varnothing=F$$

其中　$\varnothing=(u,v,h+\zeta)^T$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{C_D}{h+\zeta}|\vec{u}|, & \frac{\partial u}{\partial y}-f & g\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}+f & \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{C_D}{h+\zeta}|\vec{n}| & g\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial x}((h+\zeta)\cdot], & \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\cdot] & 0\end{bmatrix}$$

我们将算子 A 进行分裂，成为

$$A=A_1+A_2$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{C_D}{h+\zeta}|\vec{u}|, & \frac{1}{2}\frac{\partial u}{2y}, & g\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{C_D}{h+\xi}|\vec{u}|, & 0\\ \frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\cdot] & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{C_D}{h+\zeta}|\vec{u}|, & \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-f & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+f & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{C_D}{h+\zeta}|\vec{u}|, & g\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\cdot], & 0 \end{bmatrix}$$

我们作出如下差分格式

$$(\mathrm{I})\qquad (E+\frac{\tau}{2}A_2^j)(E+\frac{\tau}{2}A_1^j)\frac{\psi^{j+1}-\psi_j}{\tau}+A^j\psi^j=F^j$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \dfrac{\varnothing^{j+\frac{1}{4}}-\varnothing^j}{\tau/2}+A_1^j\varnothing^{j+\frac{1}{4}}=F^j \\ \dfrac{\varnothing^{j+\frac{1}{2}}-\varnothing^{j+\frac{1}{4}}}{\tau/2}+A_2^j\varnothing^{j+\frac{1}{2}}=0 \\ \dfrac{\varnothing^{j+1}-\varnothing^j}{\tau}+A^j\varnothing^{j+\frac{1}{2}}=F^j \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} \dfrac{\varnothing^{j+\frac{1}{2}}-\varnothing^j}{\tau}+A_1^j\dfrac{\varnothing^{j+\frac{1}{2}}+\varnothing^j}{2}=0 \\ \dfrac{\varnothing^{j+1}-\varnothing^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}+A_2^j\dfrac{\varnothing^{j+1}+\varnothing^{j+\frac{1}{2}}}{2}=F^j \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{cases} \dfrac{\varnothing^{j-\frac{1}{2}}-\varnothing^{j-1}}{\tau}+A_1^j\dfrac{\varnothing^{j-\frac{1}{2}}+\varnothing^{j-1}}{2}=0 \\ \dfrac{\varnothing^{j}-\varnothing^{j-\frac{1}{2}}}{\tau}+A_2^j\dfrac{\varnothing^{j}+\varnothing^{j-\frac{1}{2}}}{2}=(E+\frac{\tau}{2}A_2^j)F^j \\ \dfrac{\varnothing^{j+\frac{1}{2}}-\varnothing^j}{\tau}+A_2^j\dfrac{\varnothing^{j+\frac{1}{2}}+\varnothing^j}{2}=(E-\frac{\tau}{2}A_2^j)F^j \\ \dfrac{\varnothing^{j+1}-\varnothing^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}+A_1^j\dfrac{\varnothing^{j+1}+\varnothing^{j+\frac{1}{2}}}{2}=0 \end{cases}$$

我们证明了格式(I)[1]的拉客阶数关于时间层为 $0(\tau)$，而不是[1]中所称的 $0(\tau^2)$，格式(Ⅱ)，(Ⅲ)也是关于时间一阶拉容的格式，格式(Ⅳ)关于时间层是二阶的，即拉容阶为 $0(\tau^2)$，且格式(Ⅳ)是格式(Ⅲ)的循环形式，故在实际计算中并不比格式(Ⅲ)增加了计算量。

所有差分格式(Ⅰ)—(Ⅳ)在我们新的分裂方法，内积定义形式下，对一般海洋流体是绝对稳定的。

所构造的格式对于边界处理具有简便，自然的特点，且总体计算量比一般方法小。对于实例的计算结果与理论分析结果一致。

stein 流形中强拟凸域上的解析子簇上全纯函数积分表示

研究生：元惠萍　指导教师：陈叔瑾教授

论 文 摘 要

1970 年 Kamimez 和 Henkin 给出了 C^n 空间中强拟凸域上全纯函数的积分表示公式（具有全纯核），把 C^n 空间中的积分表示推广到复流形，这是近期多复变数最重要的成果，它与现代微分几何有着默契的联系，现代微分几何的主要问题是整体性，尤其局部与整体性的关系，因此对于多复变数研究复流形上的函数论是十分重要的。1975 年 stoat 证明了 C^n 空间中在强拟凸域上余维数为 1 的复流形中的全纯函数的积分公式，在此基础上 1986 年 T. E. Hatziafratis 进一步得出了 C^n 空间强拟凸域上解析子簇的积分表示公式，本文推广了 Hatziafratis 的结果在 stem 流形上得到相应的积分式。

本文首先在 stem 流形上给定全纯坐标卡，规定全纯平凡化映射，然后所定义的外积分

$$\omega'_y(b_j(z,y))\wedge\omega_y(a_j(z,y))$$

与坐标选取无关，这样：

$$\omega'_y(b(z,y))\wedge\omega_y(a(z,y))=:\omega'_y(b_j(z,y))\wedge\omega_y(a_j(z,y)),$$

接着，得出 stein 流形上强拟凸域上全纯函数的积分表示公式。

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\zeta\in\partial D}f(\zeta)\varphi^\rho(z,\zeta)\frac{\omega'_\zeta(s^*(z,\zeta))\wedge\omega_\zeta(s(z,\zeta))}{<s^*(z,\zeta),s(z,\zeta))^n}$$

现在着重介绍本文的一个重要概念，解析子簇设 Y 是 Z 的子集，标 Y 是 Z 的解析子簇，如果对每个 $P\in Z$，$\partial v_j\partial p$ 和 v_j 上有限个全纯函数 $F_1^j,\cdots,F_m^j$，$m=m(p)$，使得：

$$Y\cap r_j=\{p\in v_j|F_1^j(p)=\cdots=F_m^j(p)=0\}$$

$D\subset\subset z$ 是强拟凸域，v 是 $\overline{D}$ 的邻域，下面定义 V 上的解析子簇 Z：

我们可以这样选择合全纯 $\{v'_j,h'_j\}$，只要适当缩小 v_j 成 v'_j，取 $h'_j=h_j|v'_j$，且满足：若 $x\notin v$，$\forall\ v_j\quad x$，则 $x\in v'_j$，$V\wedge v'_j=\varnothing$，若 $x\in v$，$\forall\ v_j\quad x_1$，则 $x\in u'_j$，$v'_j=v\cap v_j\subset v_1$，于是可设 $v=\bigcup\limits_{j\in J'}v'_j$，$J'\subset J$、$z$ 是 v 的子集，称 z 是 v 的解析子簇，如果对每个 $p\in v$，存在 $u'\quad p$ 和 u'_j 上有限个全纯函数 $F_1^j,\cdots,F_m^j$，个数 m 与点 p 无关，使得

$$z\cap u'_j=\{p\in u'_j|F_1^j(p)=\cdots=F_m^j(p)=0\}$$

既然上式定义中全纯函数的个数 m 与点无关，对于 V 上给定的全纯函数 $F_1,\cdots,F_m$，$F=:(F_1\cdots F_m)$。令：

$$F_1^j=:F_1|v'_j\cdots。F_m^j=:F_m|v'_j.\ j\in J'.$$

则 $\quad z(F)=:v_{j\in J'}\{p\in v'_j|F_1^j(p)=\cdots=F_m^j(p)=0\}=\{p\in v|F_1(p)=\cdots=F_m(p)=0\}$

这样 stein 流形上的解析子簇与 C^n 空间中定义的解析子簇形式上是一样的。

首先，我们在局部构造全纯核 $k_M^F(z,\zeta)$、利用一定转移，证明了此核与坐标卡选择无关，因

此有意义。

本文主要定理：

设(1) $|\nabla F(\zeta)|\neq 0$ 在 ∂M；

(2) $z(F)$与 ∂D 横截

可构造核 $K_M^F,(z,\zeta)$，使得对 $Z\in M,f\in\theta(M)\cap c(\overline{M})$

$$f(z)=\int_{\zeta\in\partial D}f(\zeta)\varphi^{*}(z,\zeta)k_M^F(z,\zeta)$$

证明：对于这定理我们对 m 利用归纳法。

当 $m=0$ 时，即为 *stein* 流形上强拟凸域上的全纯函数积分表示。

设 m 时 $f(z)=\int_{\zeta\in\partial M}f(\zeta)\varphi^{*}(z,\zeta)K_M^F(z,\zeta)$成 (＊)

现证明：$m+1$ 时，成立

在这里主要用了一个恰当式

$$F^{*}=(g,F_1,\cdots,F_m).\qquad g\in\theta(v)$$

这样相应有 $K_M^{F^{*}}$

于是 $d_\zeta(K_M^{F^{*}}(z,\zeta)\wedge\frac{dg(\zeta)}{g(\zeta)}=2\pi iK_M^F(z,\zeta)$ (＊＊)

对(＊)分解成两项 $\int\zeta\in\partial(\partial M)_\varepsilon+\int\zeta((\partial M)\backslash(\partial M)_\varepsilon)$

再利用(＊＊)即得 $m+1$ 时成立。

四类对称典型域上的 Bergman 核函数的某些性质及其应用

研究生：周泽华　指导教师：叶芳草副教授

E. Cantan 证明了有界对称域除 $n=16,27$ 维复空间外，可以分为四大类，华罗庚把它们用矩阵形式表示出来，这就是著名的四类对称典型域 R_L($L=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}$). 本文通过对 R_L 的 Bergman 核函数的某些性质的研究得到了 R_L 是具光滑边界的有界强拟凸域的一个充要条件，最后附带指出可由一多次调和函数来描述四类对称典型域的边界.

关键词：光滑边界，Bergman 核函数；微分同胚；多次调和函数.

由[1]中 P181 定理 5 及 soboler 引理得到如下引理.

引理 1　若 D 是 C^n 中具光滑边界的有界域，则 $\forall f\in c^{\infty}(\overline{D})$，f 可延拓到 C^n 中的光滑函数.

定义 2　D 是 C^n 中的有界域，$K_D(z,t)$ 是 D 的 Bergman 核函数，如 $K_D(z,t)$ 满足如下条件 A、B_0、C，则称 $K_D(z,t)$ 在 D 上分别满足性质 A、B_0、C.

A. $K_D(z,t)$ 在 $D\times\overline{D}$ 上光滑；

B. $\forall t_1,t_2\in 2D, t_1\neq t_2$，则 $K_D(z,t_1)$ 与 $K_D(z,t_2)$ 关于 z 在 D 中是线性无关的函数.

C. $\forall t\in 2D, \exists z\in D$，使 $K_D(z_0,t)\neq 0$，且 $\det\left[\frac{\partial^2(nK_D(z,t)}{\partial z_i\partial t_j}\right]\Big|_{z=z_0}\neq 0$.

由[2]P119 定理 1 及 P124 的注 1 得到：

引理 3　设 D、G 是 C^n 中的有界区域，D，G 上的 Bergman 核函数均满足性质 A_1，B_0，C，则 D 到 G 的任何双全纯映射都可以扩充到 $\overline{D}$ 与 $\overline{G}$ 之间的微分同胚.

定理 4　R_L 的 Bergmen 核函数的表示式为：

$$K_{\mathrm{I}}(Z,\zeta)=\frac{1}{V(R_{\mathrm{I}})}\frac{1}{\det(I-Z\zeta')^{m+n}};K_{\mathrm{II}}(z,\zeta)=\frac{1}{v(K_{\mathrm{II}})}\frac{1}{\det(I-2\zeta)^{p+1}};$$

$$K_{\mathrm{III}}(z,\zeta)=\frac{1}{v(K_{\mathrm{III}})}\frac{1}{\det(I+\overline{z\zeta})^{q-1}};K_{\mathrm{IV}}(z,\zeta)=\frac{1}{u(K_{\mathrm{IV}})}\frac{1}{(1+zz'\overline{\zeta\zeta'}-2z\zeta')^{N}}.$$

定理的证明用到[4]p5 定理 5 及[3]中的知识.

定理 5(中心定理)　四类对称典型域 R_1($L=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}$)的 bergman 核函数 $K_L(2,\zeta)$ 满足性质 A，B_0，C.

此定理的证明用到矩阵分析的知识及反证法.

定理 6　若 G 是 C^n 中具光滑边界的有界强拟凸域，则 G 的 Bergman 核函数满足性质 A、B_0、C.

此定理的证明中 A、C 同[2]. 性质 B_0 的证明用到反证法.

定理 7　若四类对称典型域 R_L 与 C^n 中具光滑边界的有界强拟凸域之间存在双全纯映射 f，则 f 可扩充到 $\overline{R}_L$ 与 $\overline{G}$ 之间的微分同胚.

定理 8(应用)　四类对称典型域 R_L 是 C^n 中具光滑边界的有界强拟凸域的充要条件是 R_L

双全纯等价于 C^n 中一具光滑边界的有界强拟凸域 G

推论 9　若 R_L 与 G 之间存在双全纯映射(G 是具光滑边界的有界强拟凸域)，则 R_L 的定义函数可由一强多次调和函数定义.

引理 10(Oka)　若 Ω 为全纯域，则 $-\ln d(z)$ 在 Ω 中多次调和.

引理 11　有界可递减是全纯域.

推论 12　$R_L(L=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV})$ 为四类对称典型域，$d(z)=\mathrm{dist}(z,\partial K_L)$，则 $-\ln d(z)$ 在 R_L 中是多次调和的.

定理 13　四类对称典型域 $R_L(L=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV})$ 的边界可由 $\{z101 \mid \exists\ z^k\in R_L, z(k)\xrightarrow{R\to\infty} z^{(0)}, r^{(2(k)}$ 无界$\}$ 来描述，其中 $r(z)=-\ln d(z)$，是 RL 中的一多次调和函数.

参　考　文　献

[1] E. M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton (1970).

[2] Eun. Ligoccka, How to Prave Fefferman's theorem witthout use of differential theory, Annals Polonici Mathematici XXXIX (1981).

[3] 陆启铿，典型流形与典型域，上海科学出版社(1963).

[4] 陆启铿，多复变函数引论，科学出版社(1961).

[5] 陈恕行，偏微分概论，高等教育出版社(1984).

[6] 钟家庆，多元复分析基础(上)讲义(1985).

半线性热方程的 blow up 和完全 blow up

研究生：孙仁斌　　指导教师：张克农副教授

本文共分五部分，下面对每部分内容逐一件简单介绍。

§1 引　　言

本文主要考虑初边值问题

$$u(t)=\triangle u+f(u,x,t) \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T) \tag{1.1}$$

$$u(x,t)=0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \tag{1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad x\in\Omega \tag{1.3}$$

解 u 的 blow up 性质和完全 blow up 性质。其中 Ω 是 R^N 中具有 c^2 边界的有界辽区域，在这一部分对所要讨论问题的物理背景作了简要说明，然后介绍了对关于这方面的问题所作的讨论中，已经取到的一些主要结论以及本文所要做的工作。

§2 blow up 点集的性质

这部分讨论的问题是(1.1)的特殊情形

$$ut-\triangle u=f(u)+g(x,t) \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T) \tag{2.1}$$

初边值条件同(1.2)与(1.3)。

这部分的主要结果是：

定理 2.1　对问题(2.1)，(1.2)，(1.3)，设 f 满足条件：

1. $f(s)\in c'$，$f'>0$，　$\int_0^\infty \frac{ds}{f(s)}<\infty$，

2. 存直正函数 $F(s)$，$F'\geqslant0$，　$F''\geqslant0$ 及 $\varepsilon>0$，使 $f'_F-f_F'\geqslant2\varepsilon FF'$ 且 $\int_b^\infty \frac{ds}{F(s)}<\infty$，$b\geqslant0$，

$g(x,t)\in c'(\bar{\Omega}\times[0,T))$，$g\geqslant0$　且

$g=0$，$\frac{\partial g}{\partial n}<0$ 　$(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 的外法向，$u_0|_{\partial\Omega}=0$，则解 u 的 blow up 点构成 Ω 的紧子集。

证明方法是任取一点 $y_0\in\partial\Omega$，在靠近 y_0 的一个局部区域中构造一函数，利用极大值原理及 Ω 的　性证明$\frac{\partial u}{\partial n}<0$，然后利用条件$\int_b^\infty \frac{ds}{F(s)}<\infty$，证明对充分靠 y_0 的点 x 有$\int_{u(x,t)}^\infty \frac{ds}{F(s)}<\infty$，从而 x 不是 blow up 点，由 y_0 的任意性得到了在 $\partial\Omega$ 的一个邻域

$\Omega'\{x\in\Omega,dist(x,\partial\Omega)<\partial_0\}$

中每一点都不是 blow up 点，又因为 blow up 集是闭集，从而完成定理的证明.

利用此定理，可对某些具体的 f 得出相应的 blow up 率。

§3 解的完全 blow up 性质

首先将问题(2.1)，(1.2)，(1.3)化为积分方程

$$u(x,t)=\int_{\Omega}G(t,x,y)u_0(y)dy$$
$$+\int_0^t\int_{\Omega}G(t,\tau,x,y)(f(u(y,\tau))+g(y,\tau))dyd\tau \quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty) \qquad (3.1)$$

由此来讨论解的完全 blow up 性质，其中 G 是 Green 函数。

为得出本节的主要结论，首先给出

引理 3.2　设定理 2.1 的条件满足，且 $\lim\limits_{s\to\infty}f'(s)=\infty$，又设 $G(t)=\max\limits_{x\in\overline{\Omega},s\leqslant t}g(x,s)$，$\int_0^T G(s)ds<\infty$，$\nabla(t)=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(x,t)$，$H(s)=\int_0^s f(s)ds$，则存在 $\Omega_1\subset\subset\Omega$，使对某 t_0：$\varepsilon=T-t_0>0$ 适当小，有下式成立：

$$\frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2\leqslant H(\nabla(t0))-H(u(x,t))+2f(\nabla(t_0))\int^t 0G(s)ds \quad (x,t)\in\Omega_1\times(0,t_0) \qquad (3.2)$$

利用极大值原理证明此引理。为此利用了定理 2.1 的结论及一些不等式的技巧。

本节的主要结论是

定理 3.3　在引理 3.2 的条件下，如果 $f(s)=0(S^{1+\frac{2}{N}})$，$s\to\infty$，则 $t_c=T$，即完全 blow up 与 blow up 同时发生。

证明此定理主要是利用引理 3.2 的结论，并结合利用了(3.1)式及 Grean 函数的一些性质。

§4 单点 blow up

本节首先对区域 Ω 是半径为 R 的球的情形讨论问题

$$u_t-\triangle u=f(u,x,t) \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T) \qquad (4.1)$$

$$a\frac{\partial u}{\partial n}+bu=0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \qquad (4.2)$$

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad x\in\Omega \qquad (4.3)$$

得出定理 4.1　设 $\frac{\partial f}{\partial r}\leqslant 0$，$\frac{\partial u_0}{\partial r}<0$，存在正函数 $F(s)$，满足 $F'\geqslant 0,F''\leqslant 0$，对某 $\varepsilon>0$ 有

$$f's(s,r,t)F(s)-f(s,r,t)F'(s)\geqslant 2\varepsilon F(s)F'(s) \qquad s\geqslant 0,t<T,r<R \qquad (4.4)$$

且 $\int_0^\infty\frac{ds}{F(s)}<\infty$，则 $x=0$ 是解 u 的唯一 blow up 点。

如证明对任意点 $x\in\Omega$，$|x|=r\neq 0$ 不是 blow up 点，我们设法证明对函数 $G(s)=\int_s^\infty \frac{ds}{F(s)}$ 有 $\frac{\partial G(u)}{\partial r}\geqslant \varepsilon r$，利用条件 $\int_0^\infty \frac{ds}{F(s)}<\infty$ 而得到结论。为此构造函数 $J=r^{N-1}u_r+\varepsilon r^N F(u)$，利用极大值原理来证明 $J\leqslant 0$。

本节其次讨论一维情形的初边值问题

$$u_t-u_{xx}=f(u,u_x,t) \qquad (x,t)\in(-a,a)\times(0,T) \tag{4.9}$$

$$u(\pm a,t)=0 \qquad t\in(0,T) \tag{4.10}$$

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad x\in(-a,a) \tag{4.11}$$

设 u_0 和 f 满足下列条件：

$$u_0(\pm a)=0,\ u''+f(u_0,u'_0,0)\geqslant 0 \tag{4.12}$$

且对某个 $\alpha\in(-a,a)$，当 $-a<x<\alpha$ 时，$u'_0>0$ (4.13)

当 $\alpha<x<a$ 时，$u'_0<0$

又 $$|f'p|\leqslant\frac{1}{2a} \tag{4.14}$$

且假设存在常数 $c>0$ 及函数 $F(u)>0$，满足 $F'>0, F''>0, \int_0^\infty \frac{ds}{F(s)}<\infty$ 使

$$f'_u(u,p,t)F(u)-f(u,p,t)F'(u)\geqslant CF'(u)F(u) \tag{4.15}$$

则有定理 4.4　设 f,u_0 满足条件(4.12)－(4.15)，则问题(4.9－4.11)的解的 blow up 点只有一点。

此定理的证明是首先得到两条曲线 $x=5^{\pm}(t)$，然后设 $s^-=\lim\limits_{t\to T}s^-(t)$，$s^+=\lim\limits_{t\to T}s^+(t)$，证明在 $(-a,s^-)$ 和 (s^+,a) 上没有 blow up 点，最后证明 $s^+=s^-$。

§5　关于解的 blow up 时间

本节仍考虑问题(4.1)－(4.3)，但 Ω 是一般的区域。首先给出一个与定理 2－1 类似的结论即定理 5.2，其条件也与定理 2.1 中类似。

对不同的初值函数 $\underline{u}_0(x)<\overline{u}_0(x)$ 设相应的解为 $\underline{u}(x,t)$ 和 $\overline{u}(x,t)$，$\underline{u}$ 的 blow up 时刻与完全 blow up 时刻分别为 $\underline{t}_b$ 和 $\underline{t}_c$，$\overline{u}$ 的是 $\overline{t}_b$ 和 $\overline{t}_c$，本节就是讨论这些 t 之间的关系，主要有两个定理。

定理 5.3　设定理 5.2 的条件满足，则 $\overline{t}_b<\underline{t}_b$，$\underline{u}(x,t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant\overline{t}_b$ 时有界。

定理 5.4　设定理 5.2 的条件满足，则 $\overline{t}_c<\underline{t}_b$。

证明方法是通过作函数变换 $v=\int_u^\infty \frac{ds}{F(s)}$，化为对相应的 $\overline{v}$ 和上的讨论，其中要用到定理 5.2 中的结论。

不可测随机函数列的一些结果

研究生：叶敬龙　指导教师：厉则治教授

Andersen. N. T. 在文[1]中讨论了取值不可分 Banaeh 空间之不可测值机函数的中心极限定理.给出了不可测随机函数满足中心极限定理的充要条件，并且还给几个必要性结果，本文进一步考虑，可分 Banadh 空间上的随机元的结果有那些可以移植到不可测随机函数上来。首先在§1 中引入处理不可测机函数需用到的外包络、外测度、外积分等概念。接着在§2 中主要是仿[1]中方法，对给定的随机函数通过构造乘积空间、乘积测度为式引入随机函数序列，把[3]中一些有关可分 Banach 空间上的随机之序列的结果推行到这种随机函数序列，这里 Banach 空间不要求是可分的，所以有些结果较[1]中相应的结果更为一般。当限制 Banach 空间为可分时，这一节还得到随机函数满足弱大数值的必要性定理，它是[1]中命题 3.3 的推广.最后在§3 中对不可测随机函数引入独立性，同分布等概念，及到了独立、同分布随机函数满足强大的　重对的　的必要性定理，此定理是[3]中有关可分 Banach 空间中的随机元的定理Ⅱ. 1. §的直接推广.

主要结果：

定理 2.9　设$(E,\|\cdot\|)$为 Banach 空间，x 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上取 E－值随机函数，$(\Omega^N,\mathscr{F}^N,\mu^N)$为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$的可列乘积，令 $S_n(w)=\sum_{j=1}^{n}x(w_j)$，$w=(w_j)\in\Omega^N$，$n\geqslant 1$，若 $0<a_n\uparrow$ 且 $\varphi\leftarrow R_+\rightarrow R_+$为增函数，使得：

(a) $\varphi(a_n)\leqslant k_n$

$(b)S_n/a_n$ 随机有界，即对$\forall\ \varepsilon>$存在 $T>0$ 使得 $\mu^N(\frac{\|S_n\|^*}{a_n}>T)<\varepsilon,\forall\ n\geqslant 1.$

则对某常数 $k_0>0,\varepsilon_0>0$ 有：

$(c)\mu^*(\|\times\|>t)\leqslant\frac{K_0}{\varphi(\varepsilon_0 t)}\ \forall\ t\geqslant 0.$

若再假定：

$(d)a_{nm}\leqslant ca_na_m$ 对某常数()。

则存在 $k_1>0$ 及 $\varepsilon_1>0$ 使得：

$(e)(\mu^N)^*(\|S_n\|>a_nt)\leqslant\frac{k_1}{\varphi(\varepsilon_1 t)}\qquad\forall\ t\geqslant 0\quad\forall\ n\geqslant 1.$

定理 2.10　设$(E.\|\cdot\|)$为 Banach 空间，则存在 $K>0$ 使得：

(a) 对$(\|\times\|>t.)\leqslant K(cx)^2t^{-2}\quad\forall\ t>0\ \forall\ \times\in CLT$

(b) $CLT\subseteq L_E^P,\forall\ 0\leqslant p<2$

(c) 若 x 属于正态吸收域，则 $x\in CLT.$

定理 2.11　设 g 为可测空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上 β－值随机函数，这里 Banach 空间为可分的)若满足：

$\lim\limits_{n\to\infty}(\mu^N)^*(\omega\in\Omega^N：\|n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}g(w_i)\text{-}a\|>\varepsilon)=0,\forall\ \varepsilon>0$ 则 g 为 μ—可测。

定理 3.8　设$\{x_n\}$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\rho)$上 β-值随机函数列，它们独立，同分布，若$\{x_n\}$满足强大的律，则有：

(a) $\mathscr{E}^*\|\times\|<\infty$ 且 $\rho^*(\sup\limits_n\|X_n\|/n>t)\leqslant K/t\ \forall\ t>0$ K 为常数。若$\{X_n\}$满足重对数律，则有：

(b) $\mathscr{E}^*\{\dfrac{\|\times\|^2}{LL(\|\times\|)}\}<\infty$

(c) $\rho^*(\sup\limits_n\dfrac{\|X_n\|}{\sqrt{nLL(n)}}>t\leqslant(\dfrac{kt^2}{LL(t)})^{-1}\forall\ t>0$

k 为常数，其中 $LL(t)$定义为：

$$LL(t)=\begin{cases}\log\log|t| & |t|\geqslant e^l\\ 1 & |t|\leqslant e^e\end{cases}$$

定理 3.8　设(X_n)为概率空间$(\Omega、\mathscr{F}、\rho)$上 β 值随机函数列，它们独立、同分布，若它满足：kolmogprov-Marcinkiewicz 强大的律，即$\sum\limits_1^n x_j/n^{1/\rho}.a.$收敛（其中 $0<\rho<2$）则有：$\mathscr{E}^*\|\times\|\rho<\infty$，及 $\rho^*(\sup\limits_n\|X_n\|n^{1/\rho}>t)<K/t^\rho,\forall\ t>0.$

参 考 文 献

1. *Andersen. N.T.* (1985), *The central limit theorem for non-separable valued function, Z. Wahrsch, verw Gebiete* 70 445—455.
2. *Andersen. N.T. and Pobric, V.* (1987) *The central Limit theorem for stochastic Process, The Annals of probability* 1987, *vol.* 15. *No.* 1. 164—177.
3. *Hoffmann-Jorcensen, J.* (1977) *Probability in β-space, Lecture Notes in Math* 598. 2-186 *sping Berlin.*

导师：厉则治

90.7.20

非线性 Schrödinger 方程组的"Dufort－Frankel"的三层显示差分格式

研究生：林元鸿　指导教师：许汝林副教授

Schrödingier 方程具有孤立子解，并且具有类似于 kdv 方程的许多性质，在实际中有着广泛的应用。本文建立如下一类非自共轭非线性 Schrödinger 方程组的周期解问题：

$$i\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(A\frac{\partial U}{\partial x})+B\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}+Cq(|U|^2)U+DU=F(x,t),$$

$$\forall\ (x,t)\in(-\infty,\infty)\times(0,T), \tag{2.1}$$

$$U(x,0)=U^0(x),\forall\ x\in(-\infty,\infty), \tag{2.2}$$

$$U(x+2\pi,t)=u(x,t),\quad \forall\ (x,t)\in(-\infty,\infty)\times(0,T), \tag{2.3}$$

的"DuFort－Frankel"的三层显式差分格式

$$iD_t\Phi_j^n+\delta_1\Phi_j^n+\delta_2\Phi_j^n+B_j^nD_x\overline{\Phi}_j^n+C_j^nq(|\Phi_j^n|^2)\Phi_j^n$$

$$+D_j^n\Phi_j^n=F_j^n, \tag{2.8}$$

这里

$$D_t\Phi_j^n=\frac{1}{2\tau}(\Phi_j^{n+1}-\Phi_j^{n-1}),$$

$$D_x\overline{\Phi}_j^n=\frac{1}{2h}(\overline{\Phi}_{j+1}^n-\overline{\Phi}_{j-1}^n),$$

$$\delta_1\Phi_j^n=\frac{1}{h^2}(A_{j+\frac{1}{2}}\Phi_{j+1}^n+A_{j-\frac{1}{2}}\Phi_{j-1}^n),$$

$$\delta_2\Phi_j^n=-\frac{1}{2h^2}(A_{j+\frac{1}{2}}+A_{j-\frac{1}{2}})(\Phi_j^{n+1}+\Phi_j^{n-1}).$$

其中 τ、h 分别为时间和空间步长，Φ_j^n 为微分方程组精确解 $U_j^n=U(x_j,t_n)$的近似解。

关于差分格式(2.8)，有如下收敛性和稳定性定理.

定理 1　假设微分方程组(2.1)、(2.2)、(2.3)的解关于 x 及 t 分别有四阶和三阶连续偏导数，条件(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)均成立. 如果存在正常数 δ 使得$(zmr+k\mu)\leqslant\delta<1$，则存在同 τ、h 无关的正常数 $D_m(m=1、2、3)$，使得对任意 $\tau\leqslant D,h\leqslant D_2$，差分格式(2.8)的解满足

$$\|v_m-\Phi^m\|_2\leqslant D_3(h^2+\tau^2+\frac{\tau^2}{h^2}+\|v^0-\Phi^0\|_2+\|u'-\Phi'\|_2+$$

$$\max_{1\leqslant n\leqslant[\frac{t}{2}]}\|F\|_2),$$

这里 $\gamma=\tau/h^2,\mu=z/h,\overline{F}_j^n=F(jh,n\tau)-F_j^n,j=1、2、\cdots、J,m=2、3、\cdots、[\frac{T}{\tau}]$.

定理 2　设 Φ^n、$\tilde{\Phi}^n$ 均是差分格式(2.8)的解，其中 Φ^n，$\tilde{\Phi}^n$ 的初值以及所对应(2.8)的右端项分别为 Φ^0、Φ^1、F^n 和 $\tilde{\Phi}^0$、$\tilde{\Phi}^1$、$\tilde{F}^n$，其它条件同定理 1，则差分格式(2.8)是平方模稳定，即：

$\|\Phi^m-\tilde{\Phi}^m\|_2\leqslant D_3(\|\Phi^0-\tilde{\Phi}^0\|_2+\|\Phi^1-\tilde{\Phi}^1\|_2+\max\limits_{1\leqslant n\leqslant[\frac{T}{2}]}\|\tilde{\tilde{F}}^n\|_2)$，其中 $m=2、3、\cdots、$

$[\frac{T}{2}]$，$\tilde{\tilde{F}}_j=F_j^n-\tilde{F}_j^n$，$D_3$ 为正常数.

下面考虑非线性 Schrödinger 方程组的最简单情况，即

$$i\frac{\partial v}{\partial t}+A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+cq(|v|^2)v+DU=F(x,t), \tag{2.1'}$$

这里的 A 是一个实常数."Dufort－Frankel"显式差分格式为

$$iD_t\Phi_j^n+\delta_1\Phi_j^n+\delta_2\Phi_j^n+C_j^nq(|\Phi_j^n|^2)\Phi_j^n+D_j^n\Phi_j^n=F_j^n, \tag{2.8'}$$

从下面的定理 4 可以看出，差分格式(2.8′)是一个绝对稳定的差分格式。

定理 3 假设微分方程组(2.1′)、(2.2)、(2.3)的解关于 x、t 分别有四阶和三阶连续偏导数，则存在同 τ、h 无关的正常数 D_1、D_2，使对任意 $\tau\leqslant D_1$、$h\leqslant D_2$，差分格式(2.8′)的解满足

$$\|v^m-\Phi^m\|_2\leqslant D_3(h^2+\frac{\tau^2}{h^2}+h^2+\|v^0-\Phi^0\|_2+\|v'-\Phi'\|_2+\max_{1\leqslant n\leqslant[\frac{T}{2}]}\|\bar{F}^n\|_2),$$

$m=2、3、\cdots、[\frac{T}{\tau}]$，$\bar{F}_j^n=F(jh,n\tau)-F_j^n$，$j=1,\cdots,J$.

定理 4 设 Φ^n、$\tilde{\Phi}^n$ 均是差分格式(2.8′)的解，其中 Φ^n、$\tilde{\Phi}^n$ 的初值以及所对应(2.8′)的右端项分别为 Φ^0、Φ'、F^n 和 $\tilde{\Phi}^0$、$\tilde{\Phi}'$、$\tilde{F}^n$，则差分格式(2.8′)是以平方模稳定，即

$$\|\Phi^m-\tilde{\Phi}^m\|_2\leqslant D_3(\|\Phi^0-\tilde{\Phi}^0\|_2+\|\Phi'-\tilde{\Phi}'\|_2+\max_{1\leqslant n\leqslant[\frac{T}{\tau}]}\|\tilde{\tilde{F}}^n\|_2)$$

$m=2、3、\cdots、[\frac{T}{\tau}]$，$j=1,\cdots,J$，$\tilde{\tilde{F}}_j^n=F_j^n-\tilde{F}_j^n$.

在这篇文章中，我们也给出了两个算例。电算结果表明，定理 1 和定理 2 只是收敛和稳定的充分条件.差分格式(2.8′)是一个绝对稳定的差分格式。差分格式的误差的理论估计和电算结果相吻合。