普通高等教育“十二五”应用型规划教材

金融系列

利息理论及其应用

（第二版）

孟生旺　编著

中国人民大学出版社

普通高等教育“十二五”应用型规划教材·金融

利息理论及其应用

（第二版）

孟生旺　编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

利息理论及其应用/孟生旺编著．—2版．—北京：中国人民大学出版社，2013.12
普通高等教育“十二五”应用型规划教材·金融系列
ISBN 978-7-300-18416-6

Ⅰ.①利… Ⅱ.①孟… Ⅲ.①利息-经济理论-高等学校-教材 Ⅳ.①F032.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第279323号

普通高等教育“十二五”应用型规划教材·金融系列
利息理论及其应用（第二版）
孟生旺 编著
Lixi Lilun ji qi Yingyong

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京密兴印刷有限公司	版　　次	2001年9月第1版
规　　格	185 mm×260 mm　16开本		2014年2月第2版
印　　张	12.25	印　　次	2014年2月第1次印刷
字　　数	247 000	定　　价	28.00元

出版说明

随着金融成为现代经济运行的核心，社会对金融教育和人才培养提出了更深的要求：分层培养人才。既要着力于培养研究型人才，又要培养大批应用型人才，这已是共识。许多非研究型院校师生反映，市场上现有的金融学教材大多重理论轻实践，重国际化轻中国化。根据这些院校的特点和培养目标，他们认为在教材内容上不仅要包含本领域的基本理论问题，让学生对于基本概念、基本原理有完整的掌握，同时还包含本领域的基本实践问题，让学生掌握一定的实务操作方法，以应对未来工作的挑战。本着这一要求，由李小牧教授和李嘉珊教授牵头，中国人民大学出版社组织中国人民大学、西安交通大学、北京第二外国语学院、北京外国语大学、首都经贸大学、对外经济贸易大学、北京工商大学等若干所学校以及国家外汇管理局、保险公司、证券公司、商业银行等的专家，设计和推出了这套“普通高等教育‘十二五’应用型规划教材·金融系列”。该套教材突出了以下三点：

第一，所列课程完全根据教育部“高等教育面向21世纪教学内容与课程体系改革规划”编写。

第二，根据应用型人才培养目标，教材强化了各项业务的操作规程和实践做法，通过对案例的分析和点评让学生对实务操作有一个真切的体验。

第三，压缩教材的篇幅，学习资料、练习题等相关内容学生可以通过网络获取，减轻学生负担。

这里说明的是，出于对应用型人才培养探索的要求，出版社并没有提出过分严格的要求，只是在教材的定位、篇幅、编写体例上提出了一些原则性建议，具体编写工作则实行主编负责制，由各位主编和作者全权处理各教材的编写工作，并对各自的内

容负责。

教材的出版凝结了所有参编专家、教授的辛劳和智慧，在此一并表示感谢。

真诚地期待广大教师、学生和其他读者的批评和意见。

中国人民大学出版社

前　言

利息理论是精算专业的一门基础课，几乎所有国家和地区的精算师资格考试都会涉及该门课程的内容。最近几年，国际上主要的精算师协会［如北美寿险精算师协会（SOA）、北美非寿险精算师协会（CAS）和中国精算师协会］在精算师资格考试中都把该门课程更名为金融数学，但利息理论仍然是其主体，只是在此基础上增加了金融衍生产品的一些基本内容。

本书第一版主要是面向精算专业的学生编写的，作为精算师资格考试课程的参考教材使用，同时也适用于经济、管理、金融和保险等相关专业的本科生使用。本书第二版仍然希望兼顾几个方面的需求，但更加偏重于满足经济、管理、金融和保险等专业学生的需求。对于经济、管理、金融和保险等专业的学生而言，利息理论是非常重要的基础知识，是学习其他定量分析课程的前提。对于精算专业的学生而言，本书没有涵盖金融衍生产品的内容，所以还需补充使用其他有关参考资料。

在金融学和财务管理等专业课程中，都会涉及利息理论的一些基本内容，但对这部分内容的介绍各有侧重，系统性不够，不易形成完整的利息理论知识体系。利息理论课程把这类量化分析方法整合在一起，可以在一定程度上提高教学效率，同时可以避免不同课程在这部分内容上的重复。这也是编写本书的目的之一。

本书的框架结构主要参考北美精算师协会资格考试中利息理论部分的内容进行安排，大体可以分为两部分，第一部分是理论部分，主要介绍了利息的各种度量方法和年金价值的计算；第二部分是应用部分，主要介绍了收益率的计算和收益分配、债务偿还方法、债券价值分析和利率风险管理等。

本书虽然以量化分析为主，但刻意回避了一些比较烦琐的数学证明，把重点放在

了对有关结果的经济学解释和直观说明上，这种解释和说明虽然不如数学证明严谨，但更加便于读者对有关结论的理解和应用。

量化分析离不开计算，本书也设计了较多的例题和习题，并给出了相应的参考答案。读者可以使用各种软件完成有关计算。在金融计算中，MATLAB 和 R 都是很好的计算软件，但作为本书的学习工具，EXCEL 就能满足需要。

本书第二版主要由孟生旺和卢志义负责编写和修订。为本书作出贡献的还有王维、叶芳、钟桢、秦强、林俊、宋丽、吴妮娜、刘寅嵩和郭志杰等，在此向他们表示衷心感谢！

由于作者水平所限，书中难免疏漏，还请读者不吝赐教，作者将不胜感激。

本书的教学课件等资源可以在下述网址下载：

http：//blog. sina. com. cn/mengshw

孟生旺

目　录

第1章 利息度量方法

利息（interest）可以被定义为在一定时期内借款者为了使用一笔资金而向出借者给付的报酬。这可以从两个方面考虑：一方面从资金的拥有者角度出发，他希望从资金的出借中得到补偿；另一方面从资金的使用者角度出发，他必须付给出借者一定的报酬以获得使用资金的权利。在这种意义上，利息可被视为借款者所缴纳的租金，用以补偿出借者因为不能使用这笔资金而蒙受的损失。

本章将介绍有关利息的各种度量方法，包括复利和单利、实际利率、名义利率、实际贴现率、名义贴现率、利息力和贴现力等。单利和单贴现率这类度量工具，在庞大复杂的金融交易中应用较少，但是可能被用于小范围的简单交易中。复利的应用最为广泛，经常在实际的金融交易中出现，而利息力则通常被用于学术和理论方面的研究中。

本章还将讨论累积函数和贴现函数。累积函数被用来计算期初的本金在时刻 t 的累积值，而贴现函数正好相反，计算的是期末的资金在期初的现值。这两种方法是现金流计算的基础。

1.1 累积函数与实际利率

1.1.1 累积函数

累积函数（accumulation function）是指期初的1元本金在时刻 t 的累积值，它是

度量利率和利息的最基本的工具，其他度量工具（如单利、复利、贴现率、利息力等）都是以累积函数为基础推导出来的。累积函数通常被记为 $a(t)$ ，它具有以下性质：

(1) $a(0) = 1$ 。

(2) $a(t)$ 通常是递增函数，亦即利息是非负的。当然，负利息或利息为零的情况偶尔也会出现，如投资亏本或没有盈利时，累积函数即为递减函数或等于常数。

(3) 如果连续计息，累积函数 $a(t)$ 则为连续函数（这种情况较为常见）；反之，累积函数 $a(t)$ 则为非连续函数。

当期初的本金金额不是 $a(0)=1$，而是 $A(0)$ 时，在时刻 t 的累积值可以表示为：

$$A(t) = A(0) \times a(t)$$

于是：

$$a(t) = \frac{A(t)}{A(0)}$$

由此可见，$A(t)$ 和 $a(t)$ 可以互相表示。

若以 $I(t)$ 表示 $0\sim t$ 时期的利息额，则有：

$$I(t) = A(t) - A(0)$$

【例 1—1】 已知累积函数为 $a(t) = t^2 + kt + 1$，如果 $a(2)=13$。求 $t = 1$ 时投资的 100 元在 $t=10$ 时的累积价值。

【解】 由 $a(2)=13$ 可得 $k=4$，故累积函数为：

$$a(t) = t^2 + 4t + 1$$

从 $t = 1$ 到 $t=10$，资金的增长比例为：

$$\frac{a(10)}{a(1)} = \frac{10^2 + 4 \times 10 + 1}{1^2 + 4 \times 1 + 1} = 23.5$$

因此，在 $t = 1$ 时投资的 100 元在 $t=10$ 时的累积价值为 2 350 元。

1.1.2 实际利率

所谓实际利率（effective rate of interest），是指 1 元本金在某个时期末赚取的利息。实际利率通常用百分数表示，如 $i=5\%$，这就意味着 1 元本金在期末赚取的利息是 0.05 元。

如果用累积函数表示实际利率，则有：

$$i = a(1) - a(0) = a(1) - 1$$

$$a(1) = 1 + i$$

由此可见，累积函数 $a(t)$ 必然经过下述两点：(0，1) 和 (1，$1+i$)。

用实际利率表示的利息只在期末支付一次，这是它与名义利率的根本区别。在后面我们将会看到，根据名义利率计算的利息，在期内可以进行多次支付。

实际利率也可以通过金额函数计算如下：

$$
\begin{aligned}
i &= a(1) - a(0) \\
&= \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} \\
&= \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} \\
&= \frac{I(1)}{A(0)}
\end{aligned}
$$

该式表明，实际利率 i 也可以表示为某个时期赚取的利息金额与期初的本金金额之比。

譬如，某人 2006 年 1 月 1 日在银行存入 2 000 元，在 2007 年 1 月 1 日时，账户余额为 2 100 元，则该账户在过去一年赚取的利息金额为 2 100－2 000＝100 元，该账户赚取的年实际利率为 $100/2\ 000 = 5\%$。

1.2 单利

1.2.1 单利的定义

所谓单利（simple interest），是指只对本金计算利息，而对前期已经产生的利息在后期不再计算利息。因此，在单利条件下，每期的利息都是常数。换言之，如果期初的本金为 1 元，那么在单利条件下，第 1 期的利息是 i，期末的累积值为 $1+i$，第 2 期的利息也为 i，期末的累积值为 $1+2i$，等等。

由此可见，当 t 为整数时，单利条件下的累积函数可表示为：

$$a(t) = 1 + it \qquad t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

因此，单利的累积函数为一个线性函数，如图 1—1 所示。

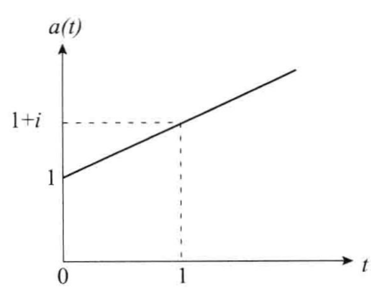

图 1—1　单利的累积函数

如前所述，上式给出了当 $t \geqslant 0$ 且为整数时单利的计算公式。如果 t 是大于零的任意实数，单利的累积函数仍然具有上式所示的形式，我们将在 1.4 节中给予证明。

在单利的实际应用中，单利通常是年利率，因此，累积函数中的时间 t 应以年为单位计量，即需要把 t 表示为年数。下面是实务中常见的几种计算时间 t 的方法：

(1) “实际/实际”规则，即投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年也按实际天数计算（正常年份按 365 天计算，闰年按 366 天计算）。

(2) “实际/365”规则，即投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年按 365 天计算。

(3) 银行家规则（banker's rule），记为“实际/360”，即投资天数按两个日期之间的实际天数计算，而每年按 360 天计算。

(4) “30/360”规则，即在计算投资天数时，每月按 30 天计算，每年按 360 天计算。在此规则下，两个给定日期之间的天数可按下述公式计算：

$$360 \times (Y_2 - Y_1) + 30 \times (M_2 - M_1) + (D_2 - D_1)$$

其中，支取日为 Y_2 年 M_2 月 D_2 日，存入日为 Y_1 年 M_1 月 D_1 日。

在应用“30/360”规则计算投资天数时，还需依次进行下述调整：

(i) 如果 D_1 和 D_2 都是 2 月份的最后一天，则把 D_2 改为 30；

(ii) 如果 D_1 是 2 月份的最后一天，则把 D_1 改为 30；

(iii) 如果 D_1 等于 30 或 31，且 D_2 等于 31，则把 D_2 改为 30；

(iv) 如果 D_1 等于 31，则把 D_1 改为 30。

【例 1—2】 若在 1999 年 6 月 17 日存入 1 000 元，到 2000 年 3 月 10 日取款，年单利利率为 8%，试分别按下列规则计算利息金额：

(1) “实际/365”规则。

(2) “实际/360”规则。

(3) “30/360”规则。

【解】 (1) 从 1999 年 6 月 17 日到 2000 年 3 月 10 日的精确天数为 267，因此，在“实际/365”规则下，$t=267/365$，利息金额为：

$$1\,000 \times 0.08 \times \frac{267}{365} = 58.52\,(\text{元})$$

(2) 在“实际/360”规则下，实际天数为 267，因此，$t=267/360$，利息金额为：

$$1\,000 \times 0.08 \times \frac{267}{360} = 59.33\,(\text{元})$$

(3) 在“30/360”规则下，两个日期之间的天数为：

$$360 \times 1 + 30 \times (3-6) + (10-17) = 263$$

因此，$t=263/360$，利息金额为：

$$1\,000\times 0.08\times\frac{263}{360}=58.44\,(\text{元})$$

可见，与精确结果相比，“实际/360”规则的利息金额较大，而“30/360”规则的利息金额较小。

在计算两个日期之间的精确天数时，可以应用 EXCEL 软件。譬如，在本例中，在单元格 A1 中输入“2000—3—10”，在单元格 B1 中输入“1999—6—17”，在单元格 C1 中输入“＝A1－B1”后回车，即可得到日期格式的结果“1900—9—23”，再将其转化为数值格式，即可得到两个日期之间的实际天数为 267 天。

【例 1—3】 假设银行账户按单利 6%计息，投资者 A 在银行存入 100 元，期限为两年，投资者 B 也存入 100 元，但是他在第一年末取回了累积值，紧接着又重新存入银行。请问在第二年末谁的累积值更大?

【解】 在第二年末，投资者 A 的累积值为：

$$a(2)=100\times(1+2\times 0.06)=112\,(\text{元})$$

在第一年末，投资者 B 的累积值为：

$$a(1)=100\times(1+1\times 0.06)=106\,(\text{元})$$

投资者 B 在第一年末把 106 元取出，然后将其重新存入银行，仍以 6%的单利计息，则在第二年末投资者 B 的累积值为：

$$a(2)=106\times(1+1\times 0.06)=112.36\,(\text{元})$$

可见，投资者 B 的累积值更大。这表明在单利条件下，分段投资可以产生更多的利息。

1.2.2 单利与实际利率的关系

在单利条件下，若令 i 为单利利率，在时点 t 的累积值为 $a(t)$，在时点 $t+1$ 的累积值为 $a(t+1)$。则从时点 t 开始的一个单位时期内的实际利率 i_t 可表示为：

$$\begin{aligned} i_t &= \frac{a(t+1)-a(t)}{a(t)} \\ &= \frac{[1+i(t+1)]-(1+it)}{1+it} \\ &= \frac{i}{1+it} \end{aligned}$$

由此可见，在单利利率为常数的条件下，实际利率是时间的递减函数，即随着时间的推移，实际利率越来越低。这是容易理解的，因为越往后，积累的利息越多，而这些利息不再产生利息，所以实际利率越来越低。

1.3 复利

1.3.1 复利的定义

单利的利息不再赚取额外的利息，而所谓复利（compound interest），是指前期赚取的利息在后期会继续赚取利息。这就意味着前期的利息将自动进行再投资。

假设年实际利率为 i，那么 1 元本金在第 1 年末的累积值为 $(1+i)$；这一累积值可作为第 2 年的本金进行投资，可赚取利息 $i(1+i)$，再加上年初的本金 $(1+i)$，即得第 2 年末的累积值为 $(1+i)^2$；第 2 年末的累积值作为第 3 年的本金进行投资，可赚取利息 $i(1+i)^2$，再加上年初的本金 $(1+i)^2$，即得第 3 年末的累积值为 $(1+i)^3$。依此类推，可知第 t 年末的累积值为：

$$a(t) = (1+i)^t$$

其中，t 是非负的正整数。

由此可见，复利的累积值随时间的推移呈几何方式增长，如图 1—2 所示。

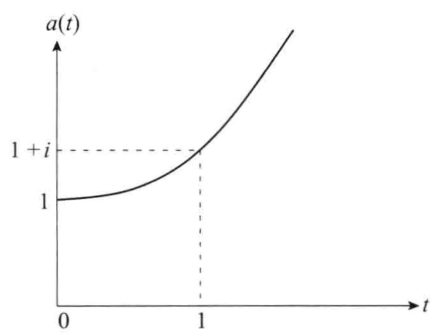

图 1—2 复利的累积函数

前面给出了复利条件下的累积函数公式，但其推导过程是基于整数年份的，也就是说，到目前为止，我们只知道上述累积函数对整数年份是成立的。如果 t 是任意时间，即包括非整数年份，那么复利条件下的累积函数是否也具有上式的形式呢？答案是肯定的，我们将在 1.4 节进行证明。

【例 1—4】 若复利的年利率为 5%，初始本金为 2 000 元，试计算：

（1）在 9 个月后的累积值；

（2）在 2 年零 3 个月后的累积值。

【解】（1）在 9 个月后的累积值为：

$2\ 000 \times (1+0.05)^{0.75} = 2\ 074.54$（元）

（2）在 2 年零 3 个月后的累积值为：

$2\ 000 \times (1+0.05)^{2.25} = 2\ 232.06$（元）

1.3.2 复利与实际利率的关系

在单利利率为常数的条件下，实际利率是时间的递减函数，即随着时间的延长，实际利率越来越低。那么在复利利率为常数的条件下，实际利率又是如何变化的呢？

在复利条件下，若令 i 为复利利率，在时点 t 的累积值为 $a(t)$，在时点 $t+1$ 的累积值为 $a(t+1)$，因此，从时点 t 开始的一个单位时期内的实际利率 i_t 可表示为：

$$
\begin{aligned}
i_t &= \frac{a(t+1)-a(t)}{a(t)} \\
&= \frac{(1+i)^{t+1}-(1+i)^t}{(1+i)^t} \\
&= i
\end{aligned}
$$

由此可见，在复利条件下，复利利率等于实际利率。

需要注意的是，在上述复利计算公式中隐含着一个重要假设，即前期所产生的利息是按原始本金的投资利率在后期进行再投资的。如果前期所产生的利息在进行再投资时利率有所变化，那么就必须对复利的计算公式进行相应的调整。关于这一问题的完整讨论，可参见本书后面各章的内容。

【例 1—5】 某投资者从银行借款 20 000 元，4 年后需要偿还 25 249.54 元，请计算该笔借款的年实际利率是多少？

【解】 令年实际利率为 i，则根据题意有：

$$20\ 000 \times (1+i)^4 = 25\ 249.54$$

$$1+i = \left(\frac{25\ 249.54}{20\ 000}\right)^{1/4}$$

$$i = 6\%$$

1.3.3 复利与单利的区别

从前面的有关讨论中可以看出，复利与单利存在明显区别。现将这些区别归纳如下：

（1）如果利率水平为常数，那么单利条件下的实际利率是时间的递减函数；而复利条件下的实际利率与时间无关，仍然等于常数的复利利率。

（2）当 $t=0$ 或 $t=1$ 时，根据单利和复利计算的累积值（accumulated value）相等。当 $0<t<1$ 时，根据单利计算的累积值较大。但是当利率较低时，单利和复利在

一年以内的利息差异是很小的，因此有时可以用单利近似代替复利，即 $(1+i)^t \approx 1+ti$，$t \leqslant 1$。当$t>1$时，根据复利计算的累积值较大。单利和复利的这些关系可从图1—3 中得到直观反映（为了使图示结果更加清晰，该图假设利率为 70%）。

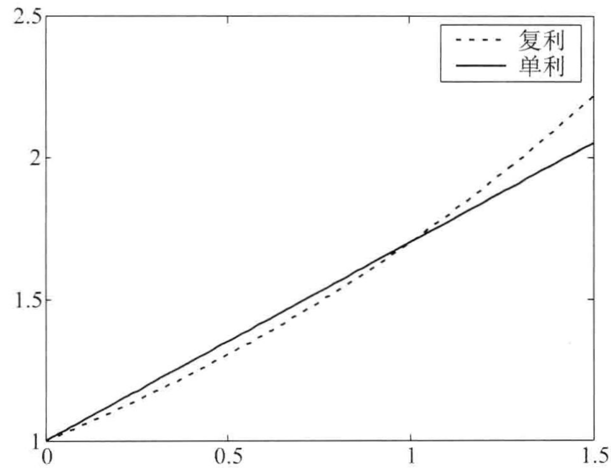

图 1—3　根据单利和复利计算的累积值

（3）在初始本金一定的条件下，单利在相等的时间区间内产生相同的利息，而复利在相等的时间区间内具有相同的增长率。换言之，在时间区间（t，$t+s$）内，单利利息的绝对增量 $a(t+s)-a(t)=si$ 与时间起点 t 无关；而复利利息的相对增量 $[a(t+s)-a(t)]/a(t)=(1+i)^s-1$ 与时间起点 t 无关。

【例 1—6】　投资者 A 和投资者 B 都在其银行账户中存入 1 000 元。投资者 A 的存款期限为 2 年。投资者 B 先存 1 年，在第一年末，他将其账户余额取出后再次存入。请在下述两种情况下比较投资者 A 和投资者 B 两年后的账户余额：

（1）按年 5%的复利计息。

（2）按年 5%的单利计息。

【解】（1）如果按年 5% 的复利计息，投资者 A 在两年末的账户余额为：

$$1\,000\times(1+0.05)^2=1\,102.5\text{（元）}$$

投资者 B 在第一年末的账户余额为：

$$1\,000\times(1+0.05)=1\,050\text{（元）}$$

在第一年末，投资者 B 将其余额 1 050 元取出后再次存入银行，仍然赚取 5%的利息，因此，在第二年末，投资者 B 的账户余额为：

$$1\,050\times(1+0.05)=1\,102.5\text{（元）}$$

可见，如果按复利计算，在第二年末，投资者 A 和投资者 B 的账户余额相等。

（2）如果按年 5%的单利计息，投资者 A 在两年末的账户余额为：

$$1\,000\times(1+2\times0.05)=1\,100\text{（元）}$$

投资者 B 在两年末的账户余额为：