新世纪教改项目规划教材

经济数学（下）

JINGJI SHUXUE

财经类数学教材编写组

高等教育出版社

新世纪教改项目规划教材

经济数学(下)

财经类数学教材编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 下/西部、东北高职高专数学教材编写组主编. —北京:高等教育出版社,2002.12(2011.1重印)
ISBN 978-7-04-011341-9

Ⅰ.经… Ⅱ.西… Ⅲ.经济数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第085833号

责任编辑 孙鸣雷　　**封面设计** 吴 昊　　**责任印制** 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号		021-56717287
邮政编码	100120	**免费咨询**	400-810-0598
传　　真	021-56965341	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.hepsh.com
排　　版	南京理工排版校对公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	上海市印刷七厂有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2003年2月第1版
印　　张	17.5	**印　　次**	2011年1月第7次
字　　数	430 000	**定　　价**	20.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 11341-00

财经类数学教材
编　委　会

主 任 委 员：周世武

（以下按姓氏笔画为序）

副主任委员：朱明刚　朱东鸣　游家桦　魏贵民

委　　　员：王开洪　王娜娜　朱芳久　杜怡平　张良武
张晓岚　胡先富　郑　文　陈宗志　罗　钊
郭　科　梅　挺　杨昆山　周晓康　陶金瑞

主　　　编：张　勇　游家桦

副　主　编：陈孝春　廖远芳

主　　　审：张素华

副　主　审：赵云河　赵庆樱

编 者 的 话

根据2000年教育部《应用数学基础课程基本要求》和1996年国家教委颁布的财经专业《高等数学课程教学基本要求》,我们组织规划编写了此教材,供高职、高专学生和部分财经类本科专业使用.

本教材遵循"拓宽基础、强化能力、立足应用"与"必须、够用为度"的原则编写.强调与计算机应用相结合,书中编写了Mathematica软件的使用简介.教师应在教学中适当安排时间组织数学试验,以便学生掌握该软件,解决相关问题.

为把学生培养成有较宽的数学基础,且有创新意识、懂得管理、有较强应用能力的高素质人才,本书对传统数学体系削枝强干,力求深入浅出,在不影响数学体系的前提下,淡化理论推导,强化实践能力培养.教材加强了例题的习题的编写,使数学理论和实际应用结合得更紧密.教材渗透了数学建模思想,整体上有一定的创新.

教材展示了数学在经济活动中的应用,编写了大量新颖的例题、习题.这些题目有助于开阔学生视野,启迪思维,激发学生对数学的学习兴趣,从而不仅会学数学,也会用数学.

教材富有弹性,大部分内容是用宋体印刷的,少部分内容是用楷体印刷的.楷体部分的内容,供教师根据专业的特点与学生的实际选用.带"*"部分内容为选学内容.本书立足"好教、好学",每章复习题分A组和B组两组题,A组为基本题,B组为难度较大的题供学生选用.在内容选择的文字叙述上,始终贯穿编写原则,力求使本教材成为师生欢迎的教材.

本书由张勇和游家桦主编,陈孝春、廖远芳副主编,曾永琴、袁小平、段宁、王明坤、宗建明参编,由张素华主审,赵云河、赵庆樱副主审,参与审稿的有李开学、杨秋霞、张利芝等.

四川大学数学科学学院熊华鑫、白苏华教授审阅了全书稿,提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限和时间仓促,错误之处在所难免,恳请使用本教材的广大师生批评指正,以便我们修订提高.

财经类数学教材编写组

2003年2月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第一章 行 列 式

对变量只进行加减及数乘的一类运算,称为**线性运算**.因此一次方程又称为**线性方程**.在商品的生产经营及流通交换中,有许多问题都可以确切地或近似地用线性方程或线性方程组表示,所以对线性方程或线性方程组的研究具有非常重要的意义.研究线性方程和线性方程组的理论及其应用的数学学科,称为**线性代数**(*linear algebra*).行列式(*determinant*)是线性代数的一个重要组成部分,也是重要的数学工具之一,在其他数学分支学科中,也经常用到.

本章将从二阶、三阶行列式出发,引入 n 阶行列式的展开式,并介绍行列式的一些基本性质和计算方法,最后给出用行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1-1 二阶、三阶行列式

一、行列式的概念

行列式是在解线性方程组的过程中而引入的.我们先研究二元一次方程组.

二元一次方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases} \tag{1-1}$$

其中,x_1、x_2 为未知数,a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 为未知数的系数,b_1、b_2 是常数项,且每个方程的常数项都写在方程的右端.

现在我们用加减消元法来讨论这个方程组的解.

$(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12} \tag{3}$$

$(1)\times a_{21}-(2)\times a_{11}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{4}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{5}$$

式(5)就是方程组(1-1)解的公式.为了便于记忆这个公式,我们对式(5)再进行一些分析:式(5)右端的分母都是

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

它只由方程组中未知数的系数确定,为此我们把方程组中未知数的系数按照它们原来的位置和

顺序排成一个正方形表,并用实线画出正方形表从左上角到右下角的对角线,用虚线画出从左下角到右上角的对角线,即

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ & \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

可以看出,式(5)右端的分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 恰好为正方形表中实线对角线上两个数的乘积减去虚线对角线上两个数的乘积之差.这种由数所组成的正方形表的上述运算,我们采用在表的两边各加一条竖线的记号来表示,为此给出如下定义:

定义 1 (1) 把 4 个数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$,排成如下方表:

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

并在表的两边各加一竖线,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

我们称它为**二阶行列式**(*second-order determinant*).

(2) 把 9 个数 $a_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$,排成如下方表:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

并在表的两边各加一竖线,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

我们称它为**三阶行列式**(*third-order determinant*).

(3) 以此类推,把 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$,排成上述形式方表,并在表的两边各加一竖线,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们称它为 n **阶行列式**(*n-order determinant*).

行列式常用字母 D 表示.行列式的横排称为行列式的**行**(*row*),从上到下分别称为**第一行**、**第二行**、…;行列式的竖排称为行列式的**列**(*column*),从左到右分别称为**第一列**、**第二列**、…;行列式中的每个数都称为行列式的**元素**,常用 a_{ij} 表示第 i 行与第 j 列相交点处的元素.求行列式值的算式,称为**行列式的展开式**.从行列式左上角到右下角的对角线,称为**行列式的主对角线**(*main diagonal*);从行列式左下角到右上角的对角线,称为**行列式的副对角线**.

二、二阶行列式的展开式

上面我们在研究二元一次方程组(1-1)的解时,引入了行列式的概念.对于二阶行列式的值,由解方程组(1-1)的需要,很自然地规定为:主对角线上两元素乘积减去副对角线上两元素乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-2}$$

式(1-2)的右端称为**二阶行列式的展开式**,又称为**求二阶行列式值的对角线法则**.

利用求二阶行列式值的对角线法则,去看式(5)右端的分子,显然有

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

它是方程组(1-1)的系数行列式中,第一列的数分别用常数项替代后所构成的行列式.而

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

是方程组(1-1)的系数行列式中,第二列的数分别用常数项取代后所构成的行列式.

因此,我们若用 D 表示方程组(1-1)的系数行列式,用 D_1、D_2 分别表示 D 的第一列、第二列用常数项取代后所构成的行列式,那么,当 $D \neq 0$ 时,方程组(1-1)的解(5)可简单地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1 利用二阶行列式,解下列各线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases} 2x - 3y - 12 = 0 \\ 3x + 7y + 5 = 0 \end{cases}$

解 (1) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\times(-3) - 1\times 1 = -7,$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 5\times(-3) - 1\times(-1) = -14,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1) - 5\times 1 = -7.$$

因此,方程组的解为

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-7} = 2,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

(2) 将原方程组变成一般形式:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x + 7y = -5 \end{cases}$$

由于

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 7\end{vmatrix}=23,\ D_x=\begin{vmatrix}12 & -3\\-5 & 7\end{vmatrix}=69,\ D_y=\begin{vmatrix}2 & 12\\3 & -5\end{vmatrix}=-46.$$

因此,原方程组的解为

$$x=\frac{D_x}{D}=3,\ y=\frac{D_y}{D}=-2.$$

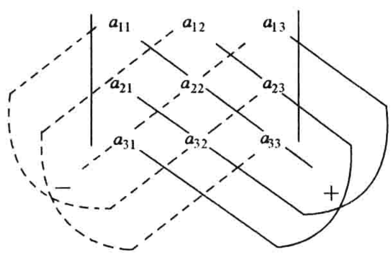
三、三阶行列式的展开式

对于三阶行列式,我们规定它的值为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1-3}$$

式(1-3)的右端称为**三阶行列式的展开式.**

观察三阶行列式的展开式,我们发现有如下特点:它共有六项,每一项都是行列式中不同的行、不同的列的三个元素的乘积,其中有三项前面附有“+”号,另三项前面附有“-”号.为便于记忆,我们把展开式用图 1-1 表示.



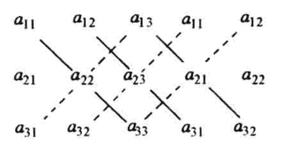


图 1-1

在图 1-1 中,用实线连结的三个元素之积取“+”号,用虚线连结的三个元素之积取“-”号.这种展开三阶行列式的方法,称为**求三阶行列式值的对角线法则.**

有了三阶行列式后,对一般的三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

若用 D 表示未知数的系数所组成的三阶行列式,分别用 D_1、D_2、D_3 表示 D 的第一列、第二列、第三列用常数项取代后所构成的行列式,则可以证明,当 $D\neq0$ 时,该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 2 计算下列各行列式:

(1) $D_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 2\\3 & 1 & 1\end{vmatrix}$; (2) $D_2=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\x & b & 0\\y & z & c\end{vmatrix}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

解 由对角线法则可得：

(1) $D_1 = 1\times3\times1+2\times1\times3+3\times2\times2-3\times3\times3-2\times1\times1-2\times2\times1=-12$;

(2) $D_2 = abc+0+0-0-0-0=abc$.

例 3 用行列式解三元一次方程组：

$$\begin{cases} x+2y-5z+3=0 \\ 4x+3y-2z-9=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$$

解 将原方程化成一般形式：

$$\begin{cases} x+2y-5z=-3 \\ 4x+3y-2z=9 \\ -y+z=-1 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=13,\qquad D_x=\begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 9 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=13,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=39,\qquad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=26.$$

因此,原方程组的解为

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{13}{13}=1,\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{39}{13}=3,\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{26}{13}=2.$$

习题 1-1

1. 计算下列各二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

2. 用行列式解下列各方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ 3x+7y=2; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 60I_1-20I_2-120=0, \\ -20I_1+80I_2+60=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-3y=9k, \\ 4x-y=8k. \end{cases}$　(4) $\begin{cases} \frac{2}{3}x_1-\frac{1}{4}x_2=3, \\ \frac{3}{2}x_1+\frac{2}{3}x_2=11\frac{2}{3}. \end{cases}$

3. 求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} a & ka & x \\ b & kb & y \\ c & kc & z \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$.

4. 用行列式解下列各方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3, \\ 5x_1-2x_2+7x_3=22, \\ 2x_1-5x_2+4x_3=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x-3y+2z+4=0, \\ 6x-2y+3z+1=0, \\ 5x-3y+2z+3=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} ax_1+bx_2=c, \\ bx_2+cx_3=a \ (abc\neq 0). \\ ax_1+cx_3=b. \end{cases}$

5. 某厂用 $y=8-2x$ 表示其产品的需求函数，用 $y+2=3x$ 表示供应函数(其中 x 为产品价格，y 为产品数量)，求市场平衡点的产品价格和数量.

6. 某服装厂生产Ⅰ型和Ⅱ型衬衣，其收入 $R=3x+10y$(x 和 y 分别是 Ⅰ 型和 Ⅱ 型衬衣生产和销售的数量)，生产成本 $C=2x+5y$，则利润是收入扣去成本之差. 若某一天收入为 40(万元)时，利润为 15(万元)，那么这一天卖出的Ⅰ型和Ⅱ型衬衣各是多少(单位：万件)?

7. 某种合成钢含有 A、B、C 三种元素，比例为 20 : 22 : 9.

用三种添加剂(Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ号)来制造这种钢材，各种添加剂每吨含这三种元素如下：

		添加剂		
		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
元素	A	1	2	3
	B	1	4	1
	C	2	0	1

问：每种添加剂应采用多少才能得到正确比例的合成钢?

8. 某工厂生产 A、B、C 三种产品. 每天生产一件产品所需的操作、包装和运输人员分别为：A 为 4 人、4 人和 3 人；B 为 5 人、2 人和 2 人；C 为 3 人、2 人和 2 人. 这三个工种的总人数分别为 214 人、136 人和 121 人. 问三种产品的日产量各为多少件?

§1-2 n 阶行列式的展开式及行列式的性质

一、按某行(列)的元素展开三阶行列式

怎样定义 n 阶行列式的值呢? 我们先研究三阶行列式按某行(列)元素的展开式.

对于三阶行列式的展开式(1-3)，如果分别把含 a_{11}、a_{12}、a_{13} 的项结合在一起并提取公因式，可得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

其中，二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 分别是在原三阶行列式中，划去 a_{11}、a_{12}、a_{13} 所在的行和列后，由剩下的元素按原来的顺序所组成的行列式，对此我们有如下定义：

定义 1 在行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，由剩下的元素按原来的顺序所组成的行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**(*complement subdeterminant*)，记为 M_{ij}.

有了余子式的定义后，若设式(1-4)左端的三阶行列式为 D，利用余子式的记号，则式(1-4)右端所含的三个二阶行列式，应分别为 M_{11}、M_{12}、M_{13}，并且有

$$D = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \tag{1-5}$$

利用式(1-5)来表示 D 的值，有的项为正，有的项为负，正负项的规律是什么呢？我们再给出如下的定义.

定义 2 行列式中，元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与 $(-1)^{i+j}$ 的乘积，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**(*algebraic complement subdeterminant*)，记为 A_{ij}， 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

由代数余子式的定义，则式(1-5)变为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{1-6}$$

式(1-6)的右端称为**三阶行列式按第一行元素的展开式.**

我们如果对三阶行列式的展开式，即式(1-3)的右端，将含 a_{21}、a_{22}、a_{23} 的项结合在一起并提取公因式、使用代数余子式的记号，还可得到三阶行列式按第二行元素的展开式. 同理也可得到按第三行、第一列、第二列、第三列元素的展开式. 由此可得

三阶行列式 D 的值，等于它任意一行(或列)的元素分别与它的代数余子式的乘积之和. 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1-7}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad (j = 1,2,3) \tag{1-8}$$

特别地，我们规定由一个数构成的行列式称为**一阶行列式**，它的值就是这个数本身，于是二阶行列式的值，同样也等于它的任意一行(或列)的元素分别与其代数余子式的乘积之和.

例 1 按第二列的元素展开下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$， (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

并与对角线法则计算的值作比较.

解 (1) $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4$，$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 5 = 5$，

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 7 \times (-4) + 6 \times 5 = 2;$$

(2) $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2$，$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 24$，

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -29,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) + (-4) \times 24 + 0 \times (-29) = -98.$$

按对角线法则计算时，有 $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - 4 \times 7 = 2$；

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) \times 6 + 1 \times 7 \times 4 + (-3) \times 5 \times 0 - (-3) \times (-4) \times 4 - 7 \times 0 \times 2 - 6 \times 1 \times 5 = -98.$$

显然，行列式按第二列展开与按对角线法则计算的值一样.

二、n 阶行列式的展开式

类似于三阶行列式按某行(列)元素的展开式，下面我们给出 n 阶行列式的展开式定义：

定义 3 对于 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-9}$$

我们规定

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-10}$$

或者

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-11}$$

其中，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，式(1-10)的右端称为 n 阶行列式 D **按第 i 行元素的展开式**；式(1-11)的右端，称为 n 阶行列式 D 的**按第 j 列元素的展开式**.

由式(1-10)、(1-11)可以看出，当 $n = 3$ 时，就是三阶行列式按某行和某列的展开式(1-7)和(1-8).

三、行列式的性质

为了简化求行列式值的计算，下面我们以三阶行列式为例，学习行列式的一些重要性质.

定义 4 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

将 D 的行与列依次互换所得的行列式称为 D 的**转置**(*transpose*)**行列式**，记为 D'，即

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D' 的值相等. 即 $D = D'$.

这个性质说明了行列式关于行成立的性质，对行列式的列也同样成立. 因此，下面我们仅讨

论行列式的行所具有的性质.

性质 2 行列式任意两行互换,则行列式变号.

例如,将 D 的第一行与第二行互换,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 3 若行列式中某两行对应元素相同,则此行列式的值为零.

例如,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0.$$

性质 4 行列式中某行的各元素有公因子时,可将公因子提到行列式符号的外面.

例如,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1 如果行列式有一行的元素都为零,则此行列式的值为零.

推论 2 如果行列有两行的元素对应成比例,则此行列式的值为零.

性质 5 若行列式的某一行元素都是二项式,那么这个行列式可以写为把这些二项式各取一项作为相应的行,而其余的行不变的两个行列式的和.

例如,
$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 6 行列式的某一行的元素各加上另一行对应元素的 k 倍,则此行列式的值不变.

例如,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理 设行列式 D 如式(1-9)所示,则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \tag{1-12}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \tag{1-13}$$

例 2 利用行列式的性质计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}3&2&6\\8&10&9\\6&-2&21\end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 4}} 2\times 3\begin{vmatrix}3&1&2\\8&5&3\\6&-1&7\end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 6}} 6\begin{vmatrix}3&1+2&2\\8&5+3&3\\6&-1+7&7\end{vmatrix}$

$$=6\begin{vmatrix}3&3&2\\8&8&3\\6&6&7\end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 3}} 0;$$

(2) $\begin{vmatrix}10&-2&7\\-15&3&2\\-5&4&9\end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 4}} 5\times\begin{vmatrix}2&-2&7\\-3&3&2\\-1&4&9\end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 6}} 5\begin{vmatrix}2&-2+2&7\\-3&3+(-3)&2\\-1&4+(-1)&9\end{vmatrix}$

$$=5\begin{vmatrix}2&0&7\\-3&0&2\\-1&3&9\end{vmatrix}=5\times(-63-12)=-375.$$

例 3 利用行列式的性质,证明

$$\begin{vmatrix}a+b&c&-a\\a+c&b&-c\\b+c&a&-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&a&c\\a&c&b\\c&b&a\end{vmatrix}.$$

证明 $\begin{vmatrix}a+b&c&-a\\a+c&b&-c\\b+c&a&-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b&c&-a\\c+a&b&-c\\b+c&a&-b\end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 5}} \begin{vmatrix}a&c&-a\\c&b&-c\\b&a&-b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b&c&-a\\a&b&-c\\c&a&-b\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{推论 2 及性质 4}} 0+(-1)\begin{vmatrix}b&c&a\\a&b&c\\c&a&b\end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 2}} \begin{vmatrix}b&a&c\\a&c&b\\c&b&a\end{vmatrix}.$$

习题 1-2

1. 利用行列式的性质,计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix}3&14&1\\1&10&1\\2&1&-1\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}1+\cos\alpha&1+\sin\alpha&1\\1-\sin\alpha&1+\cos\alpha&1\\1&1&1\end{vmatrix}$.

2. 利用行列式的性质,证明下列各等式:

(1) $\begin{vmatrix}a+b-c&c&-a\\a-b+c&b&-c\\-a+b+c&a&-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&a&c\\a&c&b\\c&b&a\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$;

(3) $\begin{vmatrix}0&-ma&nab\\c&0&-nb\\-c&m&0\end{vmatrix}=0$;　　(4) $\begin{vmatrix}1&1&1\\p&q&p+q\\q&p&0\end{vmatrix}=0$;　　(5) $\begin{vmatrix}2&5&4\\-1&3&1\\3&2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&2&3\\3&5&2\\1&4&3\end{vmatrix}=0.$

§1-3 行列式的计算及克拉默法则

一、行列式的计算

阶数大于 3 的行列式没有类似于二、三阶行列式的对角线法则. 利用 n 阶行列式按某行(列)

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com