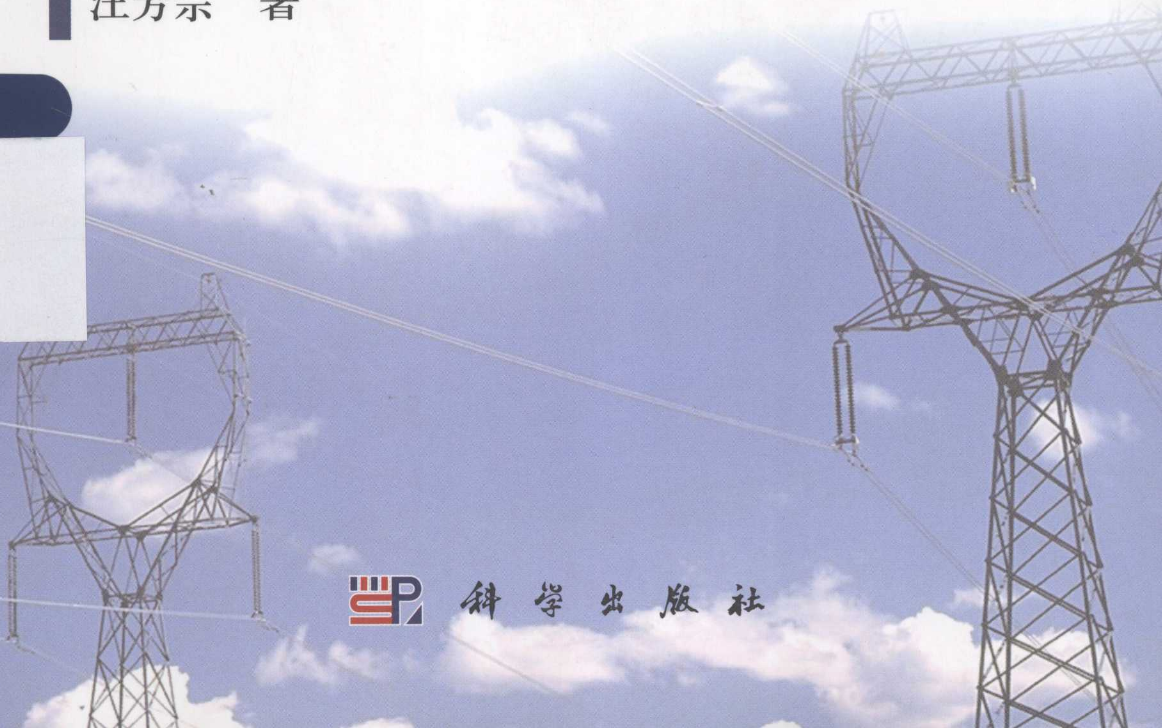
# 大规模电力系统暂态稳定性数值计算方法

汪芳宗 著



科学出版社

# 大规模电力系统暂态稳定性数值计算方法

汪芳宗 著





科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书主要介绍常微分方程的数值计算方法及其在电力系统暂态稳定性数值计算中的应用成果，具体内容共 7 章。第 1 章主要介绍常微分方程数值计算方法的基本概念，同时对暂态稳定性数值计算方法进行了介绍；第 2 章主要介绍各类高阶的数值积分方法；第 3 章主要介绍大规模稀疏线性代数方程组的高效求解方法；第 4 章主要介绍各类不同的电力系统暂态稳定性数值计算方法，包括串行计算方法和并行计算方法；第 5 章主要介绍辛几何计算方法，包括辛 RK 方法、辛 RKN 方法以及辛 PRK 方法；第 6 章主要介绍基于辛方法的电力系统暂态稳定性数值计算方法；第 7 章主要介绍辛 RK 方法与多机系统的等面积定则。

本书内容新颖，数学推导严谨，表达流畅，可作为电气工程专业的研究生教材，也可供有关专业的研究生、科研人员和工程技术人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

大规模电力系统暂态稳定性数值计算方法/汪芳宗著. —北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-038952-7

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①汪 Ⅲ. ①电力系统-系统暂态稳定-数值计算-计算方法 Ⅳ. ①TM712

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 251275 号

责任编辑：汤 枫 / 责任校对：钟 洋
责任印制：张 倩 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2014 年 1 月第一次印刷 印张：14 3/4
字数：284 000

**定价：68.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前言

从数学的角度看，电力系统暂态稳定性数值计算主要涉及常微分方程数值计算方法。自 Dommel 和 Sato 于 1972 年首次将隐式梯形积分规则应用于电力系统暂态过程的数值仿真计算后，隐式梯形积分规则在电力系统暂态稳定性分析计算中一直占据主导地位。研究人员普遍认为：隐式梯形积分规则是 A-稳定的，具有很好的数值稳定性；它是 2 阶的单步方法，其计算过程比较简单，而且对电力系统全动态过程——从电磁暂态到长期动态稳定性的分析计算均比较适用。

从 1972 年到现在，尽管已经过去了 40 多年的时间，但无论在学术界还是在电力系统工程实际应用领域，隐式梯形积分规则仍然是应用最为普遍的数值积分方法。从科技进步的角度看，这多少有点令人费解。事实上，作者早年在从事电力系统暂态稳定性分析计算的研究工作时，也一直是基于隐式梯形积分方法的。当初，潜意识里一直认为：对电力系统暂态稳定性分析计算而言，隐式梯形积分方法是最为有效的计算格式。

2002 年，作者有幸拜读了 Hairer 和 Wanner 所著的 *Solving Ordinary Differential Equations* Ⅱ：*Stiff and Differential—Algebraic Problems*。Hairer 和 Wanner 是常微分方程数值计算研究领域的著名专家，他们在专著中详细介绍了多种多样的数值积分方法，其中，多级高阶隐式 RK 方法引起了作者的极大兴趣。然而，经过一段时间的分析和仿真测试，发现在串行计算模式下，多级隐式 RK 方法相对于单级或单步的隐式梯形积分方法，很难显现出优势，至少从计算效率的角度来看确实如此；若将其用于暂态稳定性的并行计算，又很难将计算任务“解耦”。事实上，有关多级高阶隐式 RK 方法的理论研究成果极为丰富，而相关的实际应用尤其是成功的应用则是很少见的。为此，作者在失望之余，也因此更加确信“隐式梯形积分方法是暂态稳定性数值计算的最好选择”。

2006 年，作者有幸拜读了冯康先生在《自然科学进展》期刊上所著的“Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法”一文，这是冯康先生继独立于西方创始有限元方法之后的又一重大创新。自此，作者被辛几何算法深深吸引，由此开始了对辛 RK 方法的应用研究工作。在最初的研究工作中，发现与同阶的、传统的 RK 方法相比较，辛 RK 方法确实具有计算精度更高的优点。设有常微分方程 $\dot{x}=A\cos(\omega t)$，这里 $A$ 和 $\omega$ 均为常数。显然，这个常微分方程的精确解即解析解为 $x(t)=(A/\omega)\sin(\omega t)$，它是一个标准的正弦波。若采用隐式梯形积分方法对上述微分方程进行求解，则获得的数值解曲线与标准的正弦波会有所差别，特别是当步长较大或进行长时间的

积分计算时更是如此。若采用隐式中点积分格式，则所获得的数值解曲线与标准的正弦波基本上没有任何区别。这个简单的算例结果给了作者较大的鼓舞，它表明：隐式中点积分格式相对于隐式梯形积分格式具有更好的计算精度，至少对上述简单的算例系统确是如此。

然而，辛几何算法主要是针对 Hamilton 系统提出和发展起来的，而电力系统暂态稳定性数值计算，即使采用经典的数学模型，也不是一个 Hamilton 动力系统。此外，与传统的 RK 类方法相比，相应的辛 RK 方法也主要是其系数($\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$)不同而已。因此，将辛 RK 方法应用于电力系统暂态稳定性数值计算，若要取得成功，则需弄清或解决以下问题：首先，在电力系统暂态稳定性数值计算中，辛算法或辛 RK 方法相对于传统的非辛方法是否具有优势以及优势何在？其次，需要研究或寻找基于辛 RK 方法的有效并行计算方法，因为辛 RK 方法与传统的多级高阶隐式 RK 方法类似，在串行计算模式下，辛 RK 方法的计算效率相对于传统的隐式梯形积分方法很难显现出优势。

围绕上述两个问题，作者进行了较长时间的努力和探索。有关基于辛 RK 方法并行计算方法的研究，首先想到了辛 RK 方法的 $\boldsymbol{W}$-变换。利用 $\boldsymbol{W}$-变换，可以将集合矩阵方程变换成一个具有特殊结构形式的分块三对角方程组。由此，想到了预处理 GMRES 方法：若能找到一种有效求解分块三对角方程组的方法，则利用预处理 GMRES 方法就能有效实现对集合方程的并行求解。关于块三对角矩阵方程组的求解问题，众所周知的方法是追赶法。但若将追赶法应用于上述块三对角方程组的求解，则需要对多个分块矩阵进行三角分解。显然，这种方法是不能令人满意的。为此，在很长一段时间里没有任何大的进展，只是在上述基础上利用矩阵的 $\boldsymbol{LU}$ 分裂方法提出了一种新的稀疏近似逆预条件子。功夫不负有心人，作者最终发现了张凯院等所提出的求解块三对角矩阵方程组的双参数法。将双参数法应用于上述块三对角方程组的求解，最多只需要对两个分块矩阵进行三角分解，而且其求解过程本身具有并行性。由此，提出了基于 $\boldsymbol{W}$-变换的暂态稳定性并行计算方法。这种方法具有很好的并行性和收敛性，对绝大多数辛 RK 方法以及传统的多级高阶隐式 RK 方法均是适用的。

在上述并行计算方法的研究过程中，作者从相关文献中发现：3 级 5 阶的辛 Radau 方法的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足一个特殊形式的矩阵变换。由此，最终发现：若 $s$ 级的辛 RK 方法满足简化阶条件 $B(1)$ 和 $C(s-1)$，$s\geqslant 2$，则它的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必定满足 $\boldsymbol{V}$-变换；对传统 $s$ 级的 RK 方法，若它满足简化阶条件 $C(s)$，则它的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也满足 $\boldsymbol{V}$-变换。利用系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{V}$-变换，提出了基于 $\boldsymbol{V}$-变换的暂态稳定性并行计算方法。这种方法同样具有很好的并行性和收敛性，对绝大多数辛 RK 方法以及传统的多级高阶隐式 RK 方法也是适用的，其中，预处理方程的求解只需对 1 个分块矩阵进行三角分解。

关于上述第 1 个问题,事实上,通过大量的数值仿真计算,很早就发现辛 RK 方法相对于非辛方法具有更好的计算精度。然而,这只是通过数值仿真结果相互对比所得出的结论,还不能揭示其内在的数学机理。后来,从 Hairer 的专著以及孙耿的论文中发现了描述多级 RK 方法数值积分特性的一个重要公式,也就是本书所复述的引理 5.2.1。由此,可以从数学上证明:在电力系统暂态稳定性分析计算中,辛 RK 方法相对于传统的非辛 RK 方法,具有计算结果更为准确的优势。而且,依据引理 5.2.1,还可以得知传统非辛 RK 方法所存在的耗散性的具体含义。

通过上述研究,可以说:在电力系统暂态稳定性数值分析计算中,为确保数值计算结果的保真性和准确性,最好选用代数稳定的辛 RK 方法。

本书的主要内容,即对上述研究工作及相关成果的系统总结。书中详细介绍了各种不同的数值积分方法,同时对相关的理论成果作了比较系统的介绍;针对这些数值积分格式,提出了相应的电力系统暂态稳定性数值计算方法,并对方法进行了分析和对比。书中介绍和引用了国内外许多专家的成果或结论,若没有他们创造性的论著,作者在上述研究工作中不可能取得成功,也就不可能形成本书。

有关辛算法在电力系统暂态稳定性分析计算中的应用研究工作,获得了国家自然科学基金(项目号:50977052)、广东电网公司“新一代省网智能调度自动化系统技术支持体系关键技术研究项目”的资助,作者在此表示衷心的感谢。正是后者的资助,最终促成了基于辛 RK 方法的暂态稳定性并行计算方法在广东电网新一代智能调度自动化系统中的实际应用。

在即将成书之际,还特别要感谢研究生何一帆和胡佳怡,他们和作者一起进行了大量的数值仿真和算法测试研究工作。

作　者

2013 年 7 月于三峡大学

# 目录

# 第1章　引　　论

## 1.1　常微分方程初值问题

工程领域中绝大多数随时间演变的现象或过程，主要是采用各种复杂的常微分方程来描述的。一些典型的常微分方程（线性方程或某些特殊的非线性方程）可以运用基本方法求出其解析解。但是，大多数常微分非线性方程很难或不可能获得其封闭形式的解析解。从实际应用的角度看，一般只要求得到解在若干个时间点上的近似值或者解的易于计算的近似表达式，这就是所谓的常微分方程的数值解。

高阶常微分方程或方程组通常可化为一阶方程组来研究，因此，本章主要介绍一阶常微分非线性方程的初值问题，即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t)), & 0<t\leqslant T \\ \boldsymbol{x}(t=0)=\boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

有关求解常微分方程数值解的方法即常微分方程数值方法的研究，是数值分析计算领域中较古老的一个分支。数值方法的构造首先依赖于方程本身的性质，因为对一个没有解的方程设计其数值方法是没有意义的。为此，下面首先介绍有关常微分方程解的存在性及唯一性定理，其证明可参见有关常微分方程的教材。

**定理 1.1.1**　设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在区域 $D$：$0<t\leqslant T$ 上连续，如果初值问题（1.1.1）的右端函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 满足 Lipschitz 条件：即存在 Lipschitz 常数 $L$，使得

$$\| \boldsymbol{f}(t_1,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(t_2,\boldsymbol{x}_2) \| \leqslant L \| \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 \|$$

对所有 $t\in[0,T]$ 成立，则对任何 $\boldsymbol{x}_0$，常微分方程初值问题（1.1.1）的解存在且唯一，即问题（1.1.1）适定。

上式中符号 $\|\cdot\|$ 表示向量任给的一种范数。上述定理最早是由 Cauchy 建立的，它要求 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 满足 Lipschitz 条件，这个要求偏于苛刻。在实际应用中，还有下面两个比较实用的命题。

**命题 1.1.1**　设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在区域 $D$ 上关于 $\boldsymbol{y}$ 连续可微，则 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $D$ 上关于 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件，当且仅当 $\boldsymbol{J}=\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$ 在 $D$ 上有界。这里，$\boldsymbol{J}$ 为雅可比（Jacobian）矩阵。

**命题 1.1.2**　若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在区域 $D$ 上有关于 $\boldsymbol{x}$ 的连续且有界的偏导数，则最小

Lipschitz常数为 $L_{\min}=\max\left(\left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right\|\right)$。

因此,在工程实际中,只要雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 在待求区域内有界,则初值问题(1.1.1)有唯一解。

当常微分方程初值问题(1.1.1)的解存在且唯一时,就可以考虑用数值方法逼近它。为此,将时间区间$(0,T)$等分为 $N$ 个小的子域,即 $h=t_{n+1}-t_n$,$Nh=T$。这里,$h>0$ 称为步长,$t_n$,$n\in(1,N)$称为时间离散节点。设$\boldsymbol{x}_n$ 是真解 $\boldsymbol{x}(t)$的值 $\boldsymbol{x}(t_n)$的逼近。当步长 $h>0$ 足够小时,从任给初始值$\boldsymbol{x}_0$ 出发,可得到唯一的逼近序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$。差值$\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{x}(t_n)-\boldsymbol{x}_n$,称为数值逼近方法的整体误差。依据整体误差的极限性态,有以下定义。

**定义 1.1.1**　数值逼近方法是收敛的,如果用它求解任给的初值问题(1.1.1),则整体误差满足

$$\max(\|\boldsymbol{x}(t_n)-\boldsymbol{x}_n\|)\to 0,\quad h\to 0,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{x}_0$$

进一步,有以下定义。

**定义 1.1.2**　数值逼近方法是 $p$ 阶收敛的($p>0$),如果用它求解任给的初值问题(1.1.1),只要 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))$充分光滑,则数值方法满足

$$\max(\|\boldsymbol{x}(t_n)-\boldsymbol{x}_n\|)=O(h^p),\quad h\to 0$$

上述有关收敛性的定义是有关数值方法的经典收敛性描述。上述定义仅描述了当步长 $h\to 0$ 时数值解的极限性态,一般不能用它们描述实际计算的稳定性和精度。因此,研究人员引进了数值方法的稳定性概念。

有关常微分方程数值方法稳定性的问题,已有众多的参考文献,研究成果极为丰富。早期文献重点研究数值算法基于以下标量线性模型方程

$$\dot{x}=\lambda x,\quad \lambda\in\mathbf{C}\tag{1.1.2}$$

的线性稳定性。式中,符号 $\mathbf{C}$ 表示复数域或复平面。方程(1.1.2)称为 Dahlquist 试验方程。在线性稳定性分析中,研究人员提出了 A-稳定[1]、A($\alpha$)-稳定[2]以及刚性稳定等一系列重要概念,获得了丰富的理论及应用成果,这方面工作一直发展到阶星形理论[3]及稳定程度理论的建立等。阶星形理论是线性稳定性分析中的重要概念和有力工具,稳定程度理论由李寿佛在20世纪80年代建立,并系统总结在其专著[4]中。以往数值方法的线性稳定性仅限于定性地描述计算过程中误差的传播规律,但无从知道误差的变化过程和速度。稳定程度理论研究误差传播过程中误差峰值的大小并要求将峰值控制在一定的可接受范围内,以避免方法表面上绝对稳定而实际上计算不稳定。稳定程度理论的建立意味着稳定程度与稳定域大小形状是评价方法稳定性优劣的同样重要的指标,意味着数值稳定性研究从定性阶段迈向定量阶段。

线性稳定性分析主要以 Dahlquist 试验方程为基础,研究当步长 $h$ 取固定值、

步数 $n\to\infty$ 时数值误差传播的极限性态,故称为线性稳定性理论。线性稳定性分析在工程实际应用中极具重要性。尽管该理论从严格数学意义上讲仅对常系数线性系统有效,但它提供数值误差稳定传播对于积分步长的要求,成功地用于指导更为复杂实际问题的计算,迄今仍是评估数值方法品质的重要理论工具之一。线性稳定性分析与具体的数值方法或数值积分格式有关,因此,有关线性稳定性理论将在后续章节中结合相应的数值方法来介绍。

线性稳定性理论不能作为非线性特别是非线性刚性问题算法的稳定性理论基础。有关非线性稳定性分析的理论,主要有 B-理论。B-理论是 B-稳定与 B-收敛理论的统称,其核心部分是 B-收敛原理。B-理论的建立是最近 20 年来常微分方程数值方法研究领域的重要成就之一,也是刚性问题算法理论的重要进展。有关 B-理论方面的文献很多,但在工程实际中,B-理论的应用相对较少,这可能是由于 B-理论涉及的数学内容较广,不易被工程技术人员所了解和掌握。为此,本书对非线性稳定性理论不作过多的介绍。

## 1.2 刚性常微分方程

在许多科学技术领域及实际问题中,经常遇到可用常微分方程描述的物理或化学过程,这些过程往往包含着多个互相作用但变化速度相差悬殊的子过程,这就导致相应常微分方程的解中既包含衰减十分迅速的分量,也包含相对来说变化缓慢的分量。当人们试图在解的慢变区间上数值求解这类问题时,尽管此时快变分量的值已衰减到微不足道,但这种快速变化的干扰仍严重影响数值解的稳定性和精度,给整个计算带来很大实质困难。人们称上述这类过程具有“刚性”(stiffness),描述这类过程的常微分方程初值问题称为“刚性问题”(stiff problem)。因此,从实践上来说,“刚性”是一个不难了解和辨别的概念。然而,由于刚性问题的多样性和复杂性,从数学上给出刚性问题的严格定义却是一件困难的事,以致文献中有多种不同的提法。

### 1.2.1 线性刚性问题的数学定义

为从数学的角度解释刚性问题,先考虑以下形式的常系数线性系统:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{1.2.1}$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 可对角化,即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1}\tag{1.2.2}$$

式中

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\quad \boldsymbol{P}=[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_n],\quad \det(\boldsymbol{P})\neq 0\tag{1.2.3}$$

其中，$\lambda_i, i\in(1,n)$是$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值；$\boldsymbol{c}_i, i\in(1,n)$是相应的特征矢量。初值问题(1.2.1)的解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}_0 \tag{1.2.4}$$

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\mathrm{e}^{\lambda_j t},\quad \lambda_j=\alpha_j+\beta_j,\quad i,j\in(1,n) \tag{1.2.5}$$

从式(1.2.5)可以看出，初值问题(1.2.1)的解可表示为诸指数函数的线性组合，称这些指数函数为解分量。若进一步设矩阵的诸特征值满足条件

$$\alpha_j<0,\quad j\in(1,n) \tag{1.2.6}$$

则可以推出

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\rightarrow 0,\quad t\rightarrow\infty$$

上式表征系统(1.2.1)是渐近稳定的。很易理解，$\alpha_j$确定解分量$\mathrm{e}^{\lambda_j t}$的衰减特性，而$\beta_j$确定其振荡特性。工程上称$\tau_j=1/|\alpha_j|$为解分量$\mathrm{e}^{\lambda_j t}$的时间常数，$\tau_j$越小衰减越快。如果问题(1.2.1)的诸解分量的衰减速度相差悬殊，或它们的时间常数相差悬殊：

$$r=\max(\tau_j)/\min(\tau_j)\gg 1,\quad j\in(1,n) \tag{1.2.7}$$

则该问题呈现上面所说的刚性。因此，有关刚性问题一个很自然的定义如下。

**定义 1.2.1**　满足条件(1.2.6)和条件(1.2.7)的常系数线性微分方程(1.2.1)称为刚性微分方程，由式(1.2.7)确定的比值$r$称为刚性比。

上述关于刚性常系数线性系统的定义存在不足之处：该定义未能包含实际问题中常常可能出现的特征值实部取小的正值或等于零的情形，也未包含标量微分方程的情形。为此，Shampine 和 Gear 提出了改进建议[5]。

**定义 1.2.2**　常系数线性微分方程初值问题(1.2.1)称为是刚性的，如果

(1) 矩阵$\boldsymbol{A}$至少有一个特征值其实部是模很大的负数。

(2) 矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部都不取大的正值。

(3) 问题的解是变化缓慢的(相对于矩阵$\boldsymbol{A}$具有模最大的负实部的特征值而言)。

Shampine 和 Gear 的定义克服了前一定义的不足。

### 1.2.2　非线性刚性问题的数学定义

为了将上述定义推广到适合于一般的非线性初值问题(1.1.1)，需要在问题的真解$\boldsymbol{x}(t)$的适当邻域作如下局部线性化假设：设雅可比矩阵$\boldsymbol{J}$在区域$D$中是变化缓慢的，因而可将区间$[0,T]$适当划分：$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$，使得在$D$的每个子域中雅可比矩阵可近似地视为不变。由此，可以得到逼近方程(1.1.1)的$N$个分段线性化方程

$$\dot{x}(t)\approx f(t_i,x(t_i))+\frac{\partial f(t_i,x(t_i))}{\partial x}(t-t_i),\quad t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1},i\in(0,N-1) \tag{1.2.8}$$

上述关于线性刚性系统的两个定义均可以直接应用于这些分段线性化方程，通过检验其系数矩阵$\frac{\partial f(t_i,x(t_i))}{\partial x}$的特征值的性态可以确定系统是否具有刚性。如果这 $N$ 个分段线性化方程都是刚性的，则可以认为初值问题(1.1.1)在区域 $D$ 上是刚性的。因此，有下面的定义。

**定义 1.2.3**　初值问题(1.1.1)称为在区间$[0,T]$上是刚性的，如果

(1) 该问题的解 $x(t)$在区间$[0,T]$上是变化缓慢的。

(2) 对于解曲线上的每个点$(t,x(t))$，$0\leqslant t\leqslant T$，雅可比矩阵$\frac{\partial f(t,x(t))}{\partial x}$至少有一个特征值其实部是模很大的负数，且所有特征值的实部都不取大的正值。

注意上述定义中所谓“变化缓慢”是相对于雅可比矩阵的实部是模很大的负数的那些特征值而言的。

需要说明的是，由于刚性问题的复杂性与多样性，人们对如何认识刚性的本质及如何定义刚性问题经历了从线性到非线性逐步深化与完善的过程。已有的定义均有其局限性。对刚性问题给出严格数学定义极其困难，到目前为止，还没有一个定义能覆盖所有刚性问题。尽管如此，严格数学定义的困难并不影响人们对刚性问题开展研究，这是因为从实践上来说“刚性”是一个不难了解和辨别的概念，人们对刚性的本质形成了如下共识：

(1) 刚性问题欲求的解是慢变的，但存在快速衰减的干扰，这种干扰使得数值计算复杂化，在数值稳定性、计算精度及算法实现等方面带来一系列实质困难。

(2) 刚性问题是整体良态的，但存在由快速衰减干扰引起的局部坏条件。

(3) 刚性问题具有巨大的 Lipschitz 常数。

## 1.3　常微分方程数值计算方法概述

迄今为止，数值解初值问题(1.1.1)的方法很多，以致很难找到适当的方法将这些成果进行分类叙述。一些知名学者认为，常微分方程数值方法主要分为两大类：一类是所谓的线性多步法(linear multistep methods)；另一类是所谓的 Runge-Kutta 方法簇。

苦于找不出更好的分类方法，故本节就按上述分类方法对有关常微分方程初值问题的数值方法进行概述。

### 1.3.1 线性多步法

线性多步法的一般形式是

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \boldsymbol{x}_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j \boldsymbol{f}_{n+j}(t,\boldsymbol{x}(t)) \tag{1.3.1}$$

式中，$k\geqslant 1$ 称为步数，$\alpha_k=1$。很显然，在上述方法(1.3.1)中，若 $\beta_k=0$，则该方法是显式的，否则是隐式的。

在线性多步法数值求解的过程中，假设$\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{n+k-1}$是已知的，那么由公式(1.3.1)向前一步可算出$\boldsymbol{x}_{n+k}$的值。因此，线性多步法最突出的优点是每向前积分一步所需的计算量很小，其缺点是积分过程中改变步长比较困难。

在方法(1.3.1)中，若取 $k=1;\alpha_0=-1;\beta_0=1,\beta_1=0$，则就是众所周知的显式 Euler方法或公式：

$$\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{x}_n+h\boldsymbol{f}(t_n,\boldsymbol{x}(t_n))=\boldsymbol{x}_n+h\boldsymbol{f}_n \tag{1.3.2}$$

若取 $k=1;\alpha_0=-1;\beta_0=0,\beta_1=1$，则就是隐式 Euler 公式：

$$\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{x}_n+h\boldsymbol{f}_{n+1} \tag{1.3.3}$$

若取 $k=1;\alpha_0=-1;\beta_0=\beta_1=1/2$，则就是隐式梯形积分方法(trapezoidal method)：

$$\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{x}_n+\frac{1}{2}h(\boldsymbol{f}_n+\boldsymbol{f}_{n+1}) \tag{1.3.4}$$

将线性多步法(1.3.1)应用于试验方程(1.1.2)，可以得到

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)\,\boldsymbol{x}_{n+j}=0,\quad \bar{h}=\lambda h \tag{1.3.5}$$

上述方程(1.3.5)称为数值方法的差分方程。对应该差分方程的特征方程为

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)\eta^j=0 \tag{1.3.6}$$

上述方程(1.3.6)称为线性多步法(1.3.1)的稳定多项式。从常系数线性微分方程的通解表达式(1.2.5)不难看出，当且仅当多项式(1.3.6)满足根条件时，差分方程(1.3.5)的任一解序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$保持有界；当且仅当多项式(1.3.6)的每个根的模严格小于1时，有$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{0},n\to\infty$。因此，差分方程(1.3.5)有稳定解的充要条件：稳定多项式(1.3.6)的全部根满足$|\eta_j(\bar{h})|\leqslant 1$，且在圆上不允许有重根。为此，有下述定义。

**定义 1.3.1** 集合 $S=\{\bar{h}\in\mathbf{C}\}$，其中 $\bar{h}$ 满足：稳定多项式(1.3.6)的全部根满足$|\eta_j(\bar{h})|\leqslant 1$，重根满足$|\eta_j(\bar{h})|<1$。上述集合所确定的区域，称为线性多步法(1.3.1)的稳定区域。若 $S\subset\mathbf{C}^-:=\{\bar{h}\in\mathbf{C}\,|\,\mathrm{Re}(\bar{h})<0\}$($\mathbf{C}^-$ 表示复平面的左半平面)，则称线性多步法(1.3.1)是 A-稳定的。

从理论上讲，A-稳定的数值方法对步长没有任何限制。若待求系统是稳定的

$[\mathrm{Re}(\lambda)<0]$，则对任何步长 $h>0$，数值误差在传播过程中保持有界，且随 $n$ 无限增大而趋于 0。因此，A-稳定也称绝对稳定。

A-稳定要求比较苛刻，许多数值方法难以满足 A-稳定要求，这导致以下适当放松要求的定义。

**定义 1.3.2** 方法(1.3.1)是 A($\alpha$)-稳定的[这里，$\alpha\in(0,\pi/2)$]，如果

$$S\subset\Omega_\alpha:=\{\bar{h}\in\mathbf{C}\mid|\arg(\bar{h})-\pi|<\alpha\}$$

**定义 1.3.3** 方法(1.3.1)是 Stiff 稳定的，如果存在常数 $\alpha\in(0,\pi/2)$ 及 $D$，$\varepsilon>0$，使得

$$S\subset\Omega_\alpha\cup\{\bar{h}\in\mathbf{C}\mid\mathrm{Re}(\bar{h})<-D\}\cup\{\bar{h}\in\mathbf{C}\mid|\bar{h}+\varepsilon|<\varepsilon\}$$

式中，常数 $D$ 称为 Stiff 稳定参数。

对于刚性问题的数值计算，一般要求 Stiff 分量的数值误差迅速衰减，因此，研究人员提出了下列要求更强的数值稳定性定义。

**定义 1.3.4** 当 $\bar{h}\to\infty$ 时，若方法(1.3.1)的稳定多项式(1.3.6)的所有根均为 0，即当 $\bar{h}\to\infty$ 时，$\eta(\bar{h})\to 0$，则称该方法在∞点是极端稳定的。

**定义 1.3.5** 方法(1.3.1)是 L-稳定的，如果它是 A-稳定的，且在∞点极端稳定。

从上述定义可以看出，A-稳定尤其是 L-稳定的数值方法特别适合于刚性常微分方程的数值计算。

依据上述定义，很容易得到如下结论：

(1) 显式 Euler 公式的稳定域是以(−1,0)为圆心的单位圆。

(2) 隐式 Euler 公式的稳定域是整个左半平面，因而它是 A-稳定的。

(3) 隐式梯形积分方法是 A-稳定的。

线性多步法中，最早得到应用的方法是 Gear 提出的 $k$ 步 $k$ 阶、A($\alpha$)-稳定的方法，该方法通常被称为 Gear 方法[6]。Gear 方法在电力系统暂态稳定性特别是中、长期稳定性分析计算中应用较多。然而，只有 2 阶的 Gear 方法才是 A-稳定的方法。事实上，Dahlquist 对线性多步法进行过系统的研究，得出以下几个重要的结论：

(1) 显式线性多步法不可能是 A-稳定的。

(2) A-稳定的线性多步法的阶 $p\leqslant 2$。

因此，当利用线性多步法来求解刚性微分方程时，会遇到阶障碍。这是传统的线性多步法在实际应用中所存在的主要问题。

迄今为止，线性多步法已有较大的发展和变化，变化的主要思路是在方法(1.3.1)的右端表达式中引入函数的导数项(即 $f_{n+j}^{(1)}$)或高阶导数项，以此来改善线性多步法的数值稳定性。