发展方程边界元法及其应用

杜其奎　陈金如　著

科学出版社

发展方程边界元法及其应用

杜其奎　陈金如　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以抛物型方程、双曲型方程、Maxwell 方程等初边值问题为例，介绍了求解发展型偏微分方程的边界元方法(经典边界方法、自然边界元法)及有限元与边界元耦合法，总结了作者近些年来在此研究领域的研究成果，其中包括初边值问题的边界积分归化与自然边界归化方法、离散化求解边界积分方程的数值方法、边界元近似解的收敛性和误差分析方法，以及边界元法的一些应用.

本书可供高校数值计算相关专业的师生参考，也可供从事数值计算的科研人员和工程技术人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

发展方程边界元法及其应用/杜其奎，陈金如著. —北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-038903-9

Ⅰ.①发… Ⅱ.①杜… ②陈… Ⅲ.①发展方程—边界元法—研究 Ⅳ.①0175.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 246255 号

责任编辑：黄 海 顾晋饴 于盼盼／责任校对：刘亚琦
责任印制：肖 兴／封面设计：许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 11 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2013 年 11 月第一次印刷 印张：14
字数：283 000

定价：58.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

科学与工程计算中的许多问题, 可通过不同的途径归结为形式上不同的数学模型, 它们或表现为偏微分方程边值问题, 或表现为区域上的变分问题, 或是归结为边界上的积分方程. 这些不同的数学形式在理论上是等价的, 但在计算实践中却不等效, 它们分别导致了有限差分法、有限元法和边界元法等不同的数值方法.

*边界积分方程法*是在经典的边界积分方程的基础上吸收了有限元离散化技术而发展起来的一种求解偏微分方程的数值方法. 它把微分方程边值问题归化为边界上的积分方程后利用各种离散化技术来求解. 对微分方程作边界归化的思想早在 19 世纪就已经出现, 例如在 C. G. Neumann (1832~1925), H. L. Helmholtz (1821~1894), V. Volterra (1860~1940), D. Hilbert (1862~1943), J. S. Hadamard (1865~1963), E. J. Fredholm (1866~1927), G. R. Kirchhoff (1824~1887) 等的著作中已有许多系统的理论成果. 但是, 真正将边界归化理论应用于数值计算, 并为了数值计算的目的而深入研究边界归化理论却是从 20 世纪 60 年代才开始的, 例如 A. Friedman 和 Shaw(1962), M. A. Jaswon (1963), G. T. Symm (1963) 等. 自那时以来, 随着电子计算机的飞速发展并在科学与工程计算领域的广泛使用带动了有限元方法的蓬勃发展, 人们将有限元技术与经典的边界归化理论相结合, 为边界积分方程法在科学与工程计算中的应用打开了新局面. 到 20 世纪 70 年代后期, 边界积分方程法开始被称为*边界元法*[54,82].

边界元法的主要优点是将所处理问题的空间维数降低一维. 它只需对边界进行单元剖分, 只要求出边界上节点处的解函数值就可以计算区域内任意点的解函数值. 对于无界区域问题, 此法十分有效. 经过几十年的研究和发展, 边界元法已成为一种精确、高效的工程数值分析方法. 在数学方面, 不仅在一定程度上克服了由于积分核的奇异性造成的计算困难, 同时又对收敛性、误差分析以及各种不同的边界元法进行了相对统一的数学分析, 为边界元法的可行性与可靠性提供了理论基础.

边界元法也有它的局限性. 由于数学分析的复杂性, 边界元法对变系数、非线性问题的应用受到了很多限制. 在数值计算方面, 也由于积分核的强奇异性和建立的线性方程组的系数矩阵的非稀疏性而增加了困难. 但尽管如此, 用这一方法仍成功解决了科学与工程计算中的许多问题, 几十年来边界元法研究和应用不断取得新的成果. 这一方法与有限元方法或其他方法的结合也为拓广边界元法应用领域开辟了新的途径, 被许多数学家和工程师看作与有限差分法、有限元方法相并列的一种新的数值方法. 当然, 我们也可以将边界元法纳入有限元方法的框架, 作为有限元

方法的一个新的组成部分加以应用和发展.

经过 50 多年来的发展, 边界元方法取得了十分丰富的研究成果, 并在科学和工程计算的众多领域得到广泛应用. 国内外已有关于边界元方法及其应用的大量文献问世, 相关的专著都集中于椭圆边值问题, 而与此不同的是, 本书介绍求解发展型偏微分方程的边界元法 (经典边界元法、自然边界元法) 及有限元与边界元耦合法, 对边界元法的发展与应用将起着十分重要的作用.

本书的读者对象主要是学习和从事偏微分方程数值计算的研究生、大学教师及科学工作者, 也可供对边界元法感兴趣的工程技术人员参考. 全书共分 6 章. 第 1 章对椭圆边值问题边界元法作简单回顾, 在以二维 Laplace 方程为例简要介绍国际上流行的经典边界元法后, 重点介绍由我国学者首创并发展起来的且有许多独特优点的一种新型边界元法 —— 自然边界元法, 以及基于自然边界归化的求解无界区域问题的耦合算法、交替算法. 第 2 章介绍抛物型初边值问题的边界积分方程法, 讨论其边界积分表达式及其相应的变分问题, 利用有限元技术研究变分问题的逼近及误差分析、积分及奇异性积分计算方法. 第 3 章介绍抛物型初边值问题的自然边界元法, 包括对时间的离散化方法、自然边界归化原理、自然积分算子的直接研究及自然积分方程的数值解法. 第 4 章介绍抛物型初边值问题的耦合法, 包括边界积分与有限元耦合法、自然边界元与有限元耦合法、差分–边界元法. 第 5 章与第 6 章介绍边界元方法的一些应用, 包括基于自然边界归化的交替算法与人工边界方法.

本书的主要内容曾在南京师范大学作为计算数学专业研究生教材. 作者深知边界元方法的研究发展迅速, 内容相当丰富, 愈想包罗更多的内容则愈无法脱稿, 只好不追求其完备, 以通俗从简为原则, 以期抛砖引玉. 由于作者水平有限, 书中难免存在疏漏和不妥之处, 恳请同行和广大读者不吝赐教.

在本书的撰写过程中, 参考了国内外一些专家学者所著的相关文献, 在此一并表示由衷的感谢!

本书的成功出版有赖于科学出版社的大力支持, 感谢责任编辑黄海、顾晋饴和于盼盼同志对本书进行了深入细致的编辑和加工, 使得此书能以如此精美的面貌呈现给广大读者. 感谢中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所石钟慈院士和余德浩教授, 正是由于他们的鼓励和支持才得以使本书与读者见面. 再者, 作者的研究工作及本书的出版得到国家自然科学基金的支持, 谨此深表谢意.

作　者

2013 年 2 月于南京师范大学仙林校区

目录

第 1 章　椭圆边值问题边界元方法的简单回顾

本章将在简要介绍国际上流行的经典边界元法后, 重点介绍由我国学者首创并发展起来的且有许多独特优点的一种新型边界元法 —— 自然边界元方法, 以及基于自然边界归化的求解无界区域问题的耦合算法、交替算法 (Schwarz 交替算法、Dirichlet–Neumann 交替算法), 等等.

1.1　δ–函数及其性质

δ–函数最早是由 1933 年度诺贝尔物理学奖获得者英国物理学家狄拉克 (P. A. M. Dirac, 1902~1984) 在量子力学研究中引入的, 它在边界元方法的研究和应用中起着重要的作用.

设有如下函数

$$\delta_h(x-x_0)=\begin{cases}0, & x<x_0,\\ \dfrac{1}{h}, & x_0<x<x_0+h,\\ 0, & x>x_0.\end{cases}$$

若令 $h=x-x_0$, 则当 $h\to 0$ 时上述函数的极限为

$$\lim_{h\to 0}\delta_h(x-x_0)=\begin{cases}0, & x<x_0,\\ \infty, & x=x_0,\\ 0, & x>x_0.\end{cases}$$

在经典分析意义下, 上述极限是没有意义的. 现在引入算符 $\delta(x-x_0)$ 或 $\langle x-x_0\rangle^{-1}$ 来表示 (称为*δ–函数*), 即

$$\delta(x-x_0)=\langle x-x_0\rangle^{-1}=\begin{cases}0, & x\neq x_0,\\ \infty, & x=x_0.\end{cases}$$

δ–函数不符合函数定义的对应法则, 所以在相当长的一段时间内没有受到应有的重视. 直到 20 世纪 40 年代引进广义函数概念后, 才对 δ–函数作了正确解释. 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_h(x-x_0)\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{1}{h}\mathrm{d}x=1,$$

所以, 给出 δ–函数如下定义.

定义 1.1.1　定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上且满足如下性质的函数称为δ– 函数:

(i) $\delta(x-x_0)=\begin{cases}0, & x\neq x_0,\\ \infty, & x=x_0,\end{cases}$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1.$

由定义 1.1.1 可得, 对任意连续函数 $f(x)$ 均有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0). \tag{1.1.1}$$

事实上, 对任意正数 ε 总有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1.$$

再由积分中值定理, 可得

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(\xi),\quad \xi\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon).$$

又由于当 $\varepsilon\to 0$ 时, 有 $\xi\to x_0$, 所以对上式取 $\varepsilon\to 0$ 时的极限易得结论.

定义 1.1.2 (广义函数相等)　若对任意 $\varphi(x)\in C[a,b]$, 使函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 恒有

$$\int_a^b \varphi(x)\big(f_1(x)-f_2(x)\big)\mathrm{d}x=0,$$

则称定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 相等, 或函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 弱相等.

若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为连续函数, 则它们的弱相等即为通常意义下的相等. 函数弱相等为通常意义下函数相等概念的推广.

上述定义的 δ–函数具有如下一些性质:

性质 1.1.1　δ–函数具有 Fourier 积分展开式

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(x-x_0)}\mathrm{d}\omega \quad 或 \quad \delta(x_0-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega(x_0-x)}\mathrm{d}\omega. \tag{1.1.2}$$

事实上, 取 Fourier 变换公式为

$$\widetilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x, \tag{1.1.3}$$

逆变换公式为

$$f(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(\omega)e^{i\omega x_0}\mathrm{d}\omega. \tag{1.1.4}$$

将式 (1.1.3) 代入式 (1.1.4), 并通过交换积分次序可得

$$f(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x_0\right)e^{i\omega x_0}\mathrm{d}\omega$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(x-x_0)}\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}x_0. \tag{1.1.5}$$

将式 (1.1.5) 与式 (1.1.1) 进行比较可得式 (1.1.2).

性质 1.1.2 δ–函数为偶函数.

事实上, 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(x_0-x)}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega(x-x_0)}\mathrm{d}\omega$, 所以由式 (1.1.2) 可知 $\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x)$, 即 δ–函数为偶函数. 特别地, 当 $x_0=0$ 时, $\delta(x)=\delta(-x)$.

性质 1.1.3 $x\delta(x)=0$.

事实上, 由式 (1.1.1) 知, 对任意连续函数 $f(x)$, 当 $x_0=0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

以 $xf(x)$ 代替上式的 $f(x)$, 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\delta(x)\mathrm{d}x=0\cdot f(0)=0.$$

由函数 $f(x)$ 的任意性, 故有 $x\delta(x)=0$.

性质 1.1.4 $\int_{-\infty}^{x}\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=\mathscr{H}(x-\xi)$, 其中 $\mathscr{H}(t)=\frac{1}{2}\Big(1+\mathrm{sgn}(t)\Big)$ 为Heaviside 函数.

性质 1.1.5 $\varphi(x)\delta(x-a)=\varphi(a)\delta(x-a)$, 其中 $\varphi(x)$ 为任意连续函数.

事实上, 对任意连续函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$, 由式 (1.1.1) 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a)\varphi(a),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(a)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a)\varphi(a).$$

比较上述两式, 可得结论.

性质 1.1.6 $\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$, 其中 $a\neq 0$.

事实上, 对任意连续函数 $f(x)$, 令 $\xi=ax$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(ax)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{\xi}{a}\right)\delta(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{a}f(0), & a>0,\\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}f\left(\frac{\xi}{a}\right)\delta(\xi)\mathrm{d}\xi=-\frac{1}{a}f(0), & a<0,\end{cases}$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}f(0).$$

又由式 (1.1.1) 知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{1}{|a|}\delta(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}f(0).$$

比较上述两式即得结论.

性质 1.1.7 $\delta(x^2-a^2) = \dfrac{1}{2|a|}\big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\big)$, 其中 $a \neq 0$.

事实上, 对任意连续函数 $f(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x.$$

作变换 $x=-\sqrt{t}$, 则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{0} f(-\sqrt{t})\delta(t-a^2)\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{f(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\delta(t-a^2)\mathrm{d}t = \frac{f(-|a|)}{2|a|}.\end{aligned}$$

同理, 作变换 $x=\sqrt{t}$, 有

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x = \frac{f(|a|)}{2|a|}.$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(-a)}{2|a|} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\Big)\mathrm{d}x.$$

这就证明了性质 1.1.7.

1.2 经典的边界归化

边界归化的途径是多种多样的, 由不同的边界归化途径可得到不同的边界积分方程, 从而导致不同的边界元法. 由于边界归化途径的差异, 从同一边值问题出发得到不同的边界积分方程. 这些积分方程可能是非奇异的, 可能是 Cauchy 型奇异的, 也可能是 Hadamard 型奇异的. 本节主要以二维调和边值问题为例, 简要介绍直接边界归化与间接边界归化两类经典的边界归化法 (详情可参见文献 [63], [64]).

约定: $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$, $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 等, 而 n 为区域 Ω 的维数.

1.2.1 调和方程边值问题、基本解

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是以封闭光滑 (或分段光滑) 简单曲线 Γ 为边界的平面有界区域, 考虑如下的Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Gamma \end{cases} \tag{1.2.1}$$

及Neumann 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} = u_n(\boldsymbol{x}). & \boldsymbol{x} \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 上的单位外法线向量. 边值问题 (1.2.1) 存在唯一解, 而边值问题 (1.2.2) 在满足相容性条件

$$\int_\Gamma u_n \mathrm{d}s = 0 \tag{1.2.3}$$

时, 在相差一个任意常数的意义下有唯一解.

记 $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \backslash \bar{\Omega}$. 类似地, 考虑如下的Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega^c, \\ u(\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Gamma \end{cases} \tag{1.2.4}$$

及Neumann 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega^c, \\ \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} = u_n(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

边值问题 (1.2.4) 及 (1.2.5) 的解的唯一性依赖于无穷远性态. 例如, 在单位圆周 $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x}| = 1\}$ 上给出边界条件 $u_0 = 1$. 易证

$$u(\boldsymbol{x}) = 1 \text{ 及 } u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{x}| + 1$$

均为 (1.2.4) 的解. 通常要求解无穷远处有界, 即

$$u(\boldsymbol{x}) = O(1), \text{ 当 } |\boldsymbol{x}| \to +\infty.$$

这样前例中第二个解$u(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{1}{2}\ln|\boldsymbol{x}| + 1$ 便不满足此条件. 因此, 我们必须对解在无穷远处的性态作一定的限制才能保证解的唯一性. 这与有界区域的情况不同.

为了建立调和方程解的边界积分表达式, 我们要用到著名的第一 Green 公式

$$\int_\Omega v\Delta u \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s \tag{1.2.6}$$

及第二 Green 公式

$$\int_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Gamma}\Big(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\mathrm{d}s. \tag{1.2.7}$$

称满足

$$-\Delta E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{1.2.8}$$

的函数 $E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 为二维 Laplace 方程 $-\Delta u = 0$ 的基本解. 称满足

$$\mathscr{L}E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{1.2.9}$$

的函数 $E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 为线性微分算子 $\mathscr{L}$ 或相应的微分方程的基本解. 二维 Laplace 方程的基本解是

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|. \tag{1.2.10}$$

定理 1.2.1[63, 64]　设 $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 则有

$$\int_{\Gamma}\Big\{E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}} - u(\boldsymbol{x}')\frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}}\Big\}\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'} - \int_{\Omega}E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Delta u(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$$
$$=\begin{cases} u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ 0, & \boldsymbol{x}\in\Omega^c,\end{cases} \tag{1.2.11}$$

其中 $E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 是 Laplace 算子的基本解.

特别地，当 u 为 Ω 内的调和函数, 即 $\Delta u = 0$ 时, 有

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma}\Big\{E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}} - u(\boldsymbol{x}')\frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}}\Big\}\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'},\ \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{1.2.12}$$

此为调和函数的基本积分公式, 它表示调和函数 u 在区域内部的值与其在边界上的值和边界上的外法向导数之间的关系. 一旦以某种方式确定出 $u|_\Gamma$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma$ 的值, 则可利用式 (1.2.12) 计算区域 Ω 内任一点上的调和函数 u 的值. 但我们并不可以任意给定 $u|_\Gamma$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma$, 据解的存在性定理, 只要求已知部分边值即可确定整个解, 所以我们需要边界量之间的关系.

定理 1.2.2[63, 64]　设 $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是调和函数, 则

$$\alpha(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma}\Big\{E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}} - u(\boldsymbol{x}')\frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}}\Big\}\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'},\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma, \tag{1.2.13}$$

其中 $E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 为 Laplace 方程的基本解, $\alpha(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\theta(\boldsymbol{x})}{2\pi}$, 而 $\theta(\boldsymbol{x})$ 是过 $\boldsymbol{x}$ 点的 Γ 的两条切线间的夹角 (指包含在 Ω 内的部分, 见图 1.1).

当在 $\boldsymbol{x}$ 点处边界 Γ 光滑时, $\theta(\boldsymbol{x})=\pi$, 因而 $\alpha=\dfrac{\theta(\boldsymbol{x})}{2\pi}=\dfrac{1}{2}$. 关系式(1.2.13) 反映了边界量 $u|_\Gamma$ 与 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_\Gamma$ 之间的约束关系.

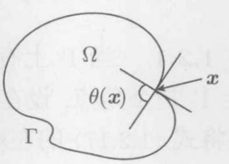

图 1.1

设在 Γ 上 $\boldsymbol{x}$ 点处的外法线向量为 $\boldsymbol{n_x}$, 用 $\boldsymbol{n_x^+}$ 表示此法线在 Γ 的外区域 Ω^c 中的部分, 用 $\boldsymbol{n_x^-}$ 表示此法线在区域 Ω 中的部分, 定义

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n_x^-}}&=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{n_x^-}}}\frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n_x}}=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{n_x^-}}}\frac{u(\boldsymbol{x}')-u(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|},\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma,\\ \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n_x^+}}&=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{n_x^+}}}\frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n_x}}=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{n_x^+}}}\frac{u(\boldsymbol{x}')-u(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|},\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma,\end{aligned}\right\}\tag{1.2.14}$$

它们分别表示过 $\boldsymbol{x}$ 点的法向导数 $\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n_x}}$ 从 Ω 一侧趋于 Γ 以及从 Ω^c 一侧趋于 Γ 时所取得的值. 在不至于引起混淆的情况下, $\boldsymbol{n_x}$ 可省去下标 $\boldsymbol{x}$, 即

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^-}=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{n_x^-}}}\frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}},\quad \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^+}=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{n_x^+}}}\frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}},\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma.$$

另外还定义

$$u^-(\boldsymbol{x})=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\in\Omega}}u(\boldsymbol{x}'),\quad u^+(\boldsymbol{x})=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\in\Omega^c}}u(\boldsymbol{x}'),\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma.$$

如果 $u(\boldsymbol{x})\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega^c})$, 则无论从 Ω 内还是从 Ω^c 内趋于边界 Γ 时, 按上述定义的极限值也就是边界值 u^-, u^+, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^-}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^+}$都是存在的.

定理 1.2.3[63, 64] 设 Γ 是平面上的光滑曲线, u 是 Ω 和 Ω^c 中的调和函数, 其所有一阶偏导数在 $\Omega+\Gamma$ 和 $\Omega^c+\Gamma$ 上分别都是连续的. 又假定 u 在无穷远处具有性态

$$|u(\boldsymbol{x})|=O(|\boldsymbol{x}|^{-1}),\quad |\nabla u(\boldsymbol{x})|=O(|\boldsymbol{x}|^{-2}),\quad |\boldsymbol{x}|\to+\infty,\tag{1.2.15}$$

则 u 有如下表达式:

$$u(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left\{\sigma(\boldsymbol{x}')\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|+\mu(\boldsymbol{x}')\frac{\partial\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{\partial\boldsymbol{n}}\right\}\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'},\ \boldsymbol{x}\in\Omega\cup\Omega^c,\tag{1.2.16}$$

$$\frac{u^-(\boldsymbol{x})+u^+(\boldsymbol{x})}{2}=-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left\{\sigma(\boldsymbol{x}')\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|+\mu(\boldsymbol{x}')\frac{\partial\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{\partial\boldsymbol{n}}\right\}\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'},\ \boldsymbol{x}\in\Gamma,\tag{1.2.17}$$

其中

$$\mu(\boldsymbol{x})=u^+(\boldsymbol{x})-u^-(\boldsymbol{x})\equiv[u(\boldsymbol{x})],\ \boldsymbol{x}\in\Gamma,\tag{1.2.18}$$

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^-} - \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^+} \equiv \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}\right],\ \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{1.2.19}$$

注 1.2.1　当 Γ 上有有限个角点 (即 Γ 分段光滑) 时, 公式 (1.2.16) 仍成立. 若 $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$ 是个角点, 设在 $\boldsymbol{x}_0$ 处 Γ 的两条切线间的夹角 (指含于 Ω 内的部分) 为 θ, 只要将式 (1.2.17) 的左端换成如下量即可:

$$\frac{\theta}{2\pi} u^-(\boldsymbol{x}_0) + \frac{2\pi - \theta}{2\pi} u^+(\boldsymbol{x}_0). \tag{1.2.20}$$

注 1.2.2　分别于 Ω, Ω^c 内的调和函数 u, 若满足无穷远处的边界条件 (1.2.15), 则

$$\int_\Gamma \frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}^+} \mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'} = \int_\Gamma \frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}^-} \mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'} = 0. \tag{1.2.21}$$

注 1.2.3　表达式 (1.2.16) 和 (1.2.17) 同样适用于内边值问题或外边值问题.

(i) 考虑内边值问题时, 可定义解的表达式为 (解的零延拓)

$$\widetilde{u}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega^c, \end{cases}$$

则有

$$\mu(\boldsymbol{x}) = \widetilde{u}^+(\boldsymbol{x}) - \widetilde{u}^-(\boldsymbol{x}) = -\widetilde{u}^-(\boldsymbol{x}) = -u(\boldsymbol{x}),$$

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \widetilde{u}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^-} - \frac{\partial \widetilde{u}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^+} = \frac{\partial \widetilde{u}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^-} = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

此时式 (1.2.16) 与式 (1.2.17) 即为下式:

$$\int_\Gamma \left\{ u(\boldsymbol{x}') \frac{\partial \ln |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot \ln |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \right\} \mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'} = \begin{cases} 2\pi u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \pi u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Gamma, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega^c. \end{cases} \tag{1.2.22}$$

其中 $u(\boldsymbol{x})$ 和 $\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在 Γ 上的值应理解为$\boldsymbol{x}$ 从 Ω 趋向于边界 Γ 时所取得的值.

(ii) 考虑外边值问题时, 可定义解的表达式为 (解的零延拓)

$$\widetilde{u}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega^c, \end{cases}$$

则

$$\mu(\boldsymbol{x}) = \widetilde{u}^+(\boldsymbol{x}) - \widetilde{u}^-(\boldsymbol{x}) = \widetilde{u}^+(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}),$$

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \widetilde{u}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^-} - \frac{\partial \widetilde{u}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^+} = -\frac{\partial \widetilde{u}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^+} = -\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

此时式 (1.2.16) 与式 (1.2.17) 即为

$$-\int_\Gamma \left\{u(\boldsymbol{x}')\frac{\partial \ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot \ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\right\}\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'} = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x}\in\Omega, \\ \pi u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Gamma, \\ 2\pi u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega^c. \end{cases} \tag{1.2.23}$$

其中 $u(\boldsymbol{x})$ 和 $\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在 Γ 上的值应当理解为$\boldsymbol{x}$ 从 Ω^c 内趋向于边界 Γ 时所取的值 (此处规定法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向指向 Ω^c 内部).

1.2.2 间接边界归化

*间接边界归化*是从基本解及位势理论出发将微分方程边值问题归化为 Fredholm 积分方程. 此时积分方程的未知量并非原问题的解的边值, 而是引入了新的变量. 因此这一归化方法被称为*间接边界归化法*. 引入如下两个辅助变量:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = [u(\boldsymbol{x})] = u^-(\boldsymbol{x}) - u^+(\boldsymbol{x}) \tag{1.2.24}$$

及

$$q(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}\right] = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^-} - \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}^+}. \tag{1.2.25}$$

当调和方程的解被解释为物理学中静电场的电位分布时, $\varphi(\boldsymbol{x})$ 表示在 Γ 两侧的电位的跃度, 相当于在 Γ 的内侧分布着负电荷, 而在 Γ 的外侧分布着等量的正电荷, 从而形成的电偶极子的矩在 Γ 上的分布密度; $q(\boldsymbol{x})$ 则表示 Γ 两侧电场强度法向分量的跃度, 相当于在 Γ 上分布的电荷密度.

在 $u(\boldsymbol{x})$ 连续通过 Γ, 即当 $[u(\boldsymbol{x})] \equiv 0$ 时, 调和方程解的积分表达式 (1.2.16) 为

$$u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{x}')}{\partial \boldsymbol{n}}\right] \ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'}, \quad \forall\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2. \tag{1.2.26}$$

利用刚引入的记号便得

$$u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma q(\boldsymbol{x}')\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'}, \quad \forall\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2. \tag{1.2.27}$$

上式称为*单层位势*, 其物理意义为当在 Γ 上分布密度为 $q(\boldsymbol{x})$ 的电荷时产生的电位场.

考察 Ω 或 Ω^c 内的 Dirichlet 问题 (1.2.1) 或 (1.2.4), 此时 $u^-(\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ 或 $u^+(\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ 为已知. 若解 $u(\boldsymbol{x})$ 可用单层位势式 (1.2.27) 表示, 则电荷密度 $q(\boldsymbol{x})$ 应为如下第一类 Fredholm 积分方程的解

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma q(\boldsymbol{x}')\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}'} = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{x}\in\Gamma. \tag{1.2.28}$$