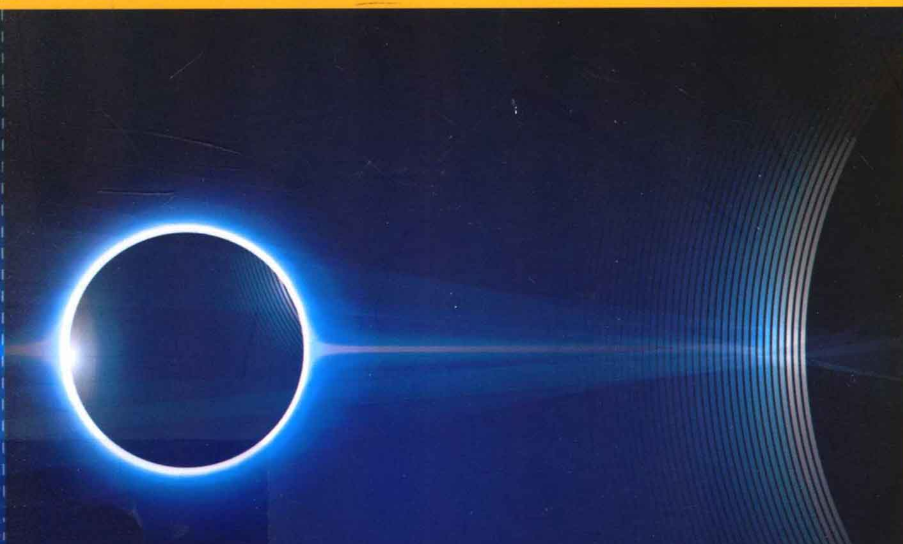
中法工程师学历教育系列教材

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

微分方程（中法文版）

Marc Pauly 著
方 乐 译



科 学 出 版 社

中法工程师学历教育系列教材

微分方程

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(中法文版)

Marc Pauly 著

方 乐 译

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是北京航空航天大学中法工程师学院“微分方程”课程的授课教材。本书以法国路易大帝 MPSI 班预科数学课程为基础，内容涵盖了“常微分方程”、“偏微分方程”、“数理方程”、“自制系统”等。全书共 8 章，具体内容包括：可分离变量型方程、线性方程（组）、Riccati 方程、Bernoulli 方程、Euler 方程、Clairaut 方程、自治系统、偏微分方程等。

本书注重数学的理论性和严谨性，从经典的常微分方程入手，逐步深入至波动方程、弦振动方程、热传导方程。本书叙述深入浅出，条理清晰，论证严密，突出代数思想，便于读者理解与掌握。

本书同时包含中文版和法文版，便于读者对照阅读。本书可作为与法国有交流合作的工程师院校的“微分方程”课程教材，亦可作为其他法语数学类的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微分方程：中法文/(卢森堡)波利(Pauly, M.)著；方乐译. —北京：科学出版社, 2013

(中法工程师学历教育系列教材)

ISBN 978-7-03-037692-3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①波… ②方… Ⅲ. ①微分方程-教材-法、汉 Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 118270 号

丛书策划：匡　敏　余　江

责任编辑：余　江　李岚峰 / 责任校对：宣　慧

责任印制：闫　磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013 年 5 月第 一 版　开本：720×1000 B5

2013 年 5 月第一次印刷　印张：13

字数：208 000

定价：30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

丛　书　序

我国《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010–2020 年）》明确提出，要“适应国家经济社会对外开放的要求，培养大批具有国际视野、通晓国际规则、能够参与国际事务和国际竞争的国际化人才”，为此教育部于 2010 年启动了“卓越工程师教育培养计划”，并把培养国际化工程人才作为我国高等工程教育改革发展的战略重点之一。通过与国际高水平大学开展人才培养合作，借鉴国外先进经验，引入国外优质教育资源并结合自身优势，面向国家发展战略需求，建立植根于本土的工程师学历教育体系，是培养具有国际竞争力工程师人才的重要途径，也是贯彻落实“人才强国”战略、提升我国国际竞争力的重要举措。

采用精英培养模式的法国工程师学历教育对法国乃至世界经济、社会发展起到了重要的推进作用，许多工程师院校在世界范围内享有盛誉。为此，近年来我国许多大学对这种培养模式进行了深入研究，并成立了多家中法合作的工程师培养机构。这些具有国际化教育目标与理念的办学机构与项目，已经成为我国高等工程教育的重要组成部分，取得的成功经验深刻影响着我国高等工程教育改革与创新进程。

作为我国教育部批准的第一家中法教育合作培养通用工程师人才的教育机构，北京航空航天大学中法工程师学院于 2005 年由北京航空航天大学与法国中央理工大学集团合作建立，在创立和实施我国的国际通用工程师学历教育过程中，通过借鉴法国工程师培养理念，引进国外优质教育资源，结合北京航空航天大学自身优势，建立了卓越工程师培养本-硕统筹课程体系，赢得了国内外教育界、工业界的广泛认同与赞誉，并通过了法国工程师职衔委员会（CTI）和欧洲工程教育 EUR-ACE 体系的认证，成为迄今为止国内唯一一家具有在本土颁发法国和欧洲工程师文凭资质的办学机构，培养出来的毕业生得到了用人单位的普遍欢迎和高度评价。

为把探索实践过程中取得的成功经验和优质课程资源与国内外高校分享，我们在北京市教委和科学出版社的支持下，组织出版了这套《中法工程师学历教育系列教材》，其中包括由法国著名预科教师和法国工程师学院一线教师领衔编写的法文版、英文版和中文版的预科数学、物理、工业科学教材，以及适合工程师培养阶段的专业教材。本套教材可作为中法合作办学单位的预科和专业教材，也

可作为其他相关专业的参考教材。

希望本套教材能为我国卓越工程师的教育培养作出贡献！

熊璋

北京航空航天大学中法工程师学院院长

2013 年 5 月

前　言

法国工程师学历教育是世界上先进的高等教育模式之一。几个世纪以来，该模式不仅培养了大批卓越的工程师人才，而且造就了大量高水平的科学家、政治家、企业家、商界精英。2005 年北京航空航天大学与法国中央理工大学集团联合创建北京航空航天大学中法工程师学院，成功将法国工程师学历教育模式引入中国，并在过去的几年中成功培养了数批高水平、国际化的通用工程师。

在长年的教学工作中，我们积累了大量的授课经验，并且针对中国学生开发编写了丰富实用的课堂讲义。为了将北京航空航天大学中法工程师学院的教学经验传播给更多的相关院校以供借鉴交流，我们编写出版了本套《中法工程师学历教育系列教材》。在本套系列教材中，《法语数学》、《代数》、《几何》、《微分方程》四本数学教材由法国资深预科数学教师 Marc Pauly 根据其多年来在北京航空航天大学中法工程师学院授课的实际情况编写而成。

《微分方程》全书分上下两篇，上篇为法文版、下篇为中文版，方便教师学生对照阅读。全书共 8 章，具体内容包括：可分离变量型方程、线性方程（组）、Riccati 方程、Bernoulli 方程、Euler 方程、Clairaut 方程、自治系统、偏微分方程等。本书注重数学理论性和严谨性，试图从抽象的角度帮助学生开拓思路。本书可作为与法国有交流合作的工程师院校的“微分方程”课程教材，亦可作为其他法文数学类的教材或参考书。

感谢北京航空航天大学中法工程师学院数理组的老师和同学们在本教材的校订和翻译中所付出的辛勤工作。

编　者

于北京航空航天大学中法工程师学院

2013 年 5 月

Table des matières

目　　录

Version I Française

上篇 法文版

Chapitre 1 Rappels: Quelques équations résolubles

$$\boxed{f'(x) = a(x)f(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = a(x)f(x) + b(x)}$$

Ce sont des équations très simples du premier ordre. **L'ordre d'une équation différentielle** est l'ordre de dérivation le plus grand apparaissant dans l'équation. Ici les équations contiennent la dérivée de f, mais pas de dérivée d'ordre plus grand. Ce sont donc des équations d'ordre 1.

Les équations $f'(x) = a(x)f(x)$, où a est une fonction donnée, sont des exemples d'équations différentielles **linéaires homogènes**. Ces équations se caractérisent par le fait que l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel. Autrement dit, si f_1 et f_2 sont solutions, alors pour deux constantes quelconques λ_1, λ_2, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est encore solution.

Les équations $f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$, où b est aussi une fonction donnée, sont plus générales. Ce sont des exemples d'équations différentielles **linéaires**. Leur ensemble de solutions n'est plus un espace vectoriel (sauf si b est la fonction nulle). En revanche, c'est un espace affine. Cela signifie: Si f est solution de l'équation $f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$, et h est solution de son équation homogène associée $h'(x) = a(x)h(x)$, alors $f + h$ obéit à $(f + h)'(x) = a(x)(f + h)(x) + b(x)$ et on a encore une solution. Toutes les solutions s'écrivent d'ailleurs sous la forme $f + h$.

Voici une autre propriété remarquable des équations linéaires: elles permettent la méthode de la **superposition des solutions**. Sur l'exemple de $f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$, cela signifie ceci: Si on sait que

$$\begin{cases} f_1'(x) = a(x)f_1(x) + b_1(x) \\ f_2'(x) = a(x)f_2(x) + b_2(x) \end{cases}$$

alors, par addition des équations, on obtient que la fonction $f_1 + f_2$ est une solution de l'équation linéaire $f' = af + (b_1 + b_2)$. Dans cette notation, nous avons supprimé la variable; l'égalité est maintenant une égalité entre la fonction f' et la fonction $af + (b_1 + b_2)$.

Théorème. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation linéaire homogène $f' = af$ si et seulement s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in I, f(x) = ce^{A(x)}, \qquad \text{avec } A' = a$$

Pour résoudre $f' = af$, il faut chercher une primitive A de a. Comme a est supposée continue, une telle primitive existe. En effet, nous avons appris que pour toute fonction continue, il existe une primitive. Le théorème reste vrai si la fonction a possède une primitive (sans que a soit continue).

Comme c peut prendre toutes les valeurs réelles possibles, l'ensemble des solutions est infini. C'est en fait un espace vectoriel de fonctions. Sa dimension est 1. Il est engendré par la fonction $x \mapsto e^{A(x)}$.

Dans certains cas, on peut s'intéresser plus généralement aux solutions de $f' = af$ à **valeurs complexes.** On cherche alors les solutions $f : I \to \mathbb{C}$. Le théorème ci-dessus s'applique encore: il suffit de prendre la constante c dans le corps complexe $\mathbb{C}$. Encore plus généralement, la fonction a peut aussi être à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, le théorème est encore vrai: la primitive A devient alors aussi une fonction à valeurs complexes, et l'exponentielle du théorème doit être interprétée comme une exponentielle complexe.

À partir d'ici, le symbole $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce qui suit, nous considérons des équations dont les inconnues et les fonctions données sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire: l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{K}$). Cela évite de faire la distinction entre les réels et les complexes. En revanche, il est bien clair que les ensembles de départ sont toujours des intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation linéaire homogène $f' = af + b$ si et seulement s'il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telle que*

$$\forall x \in I, f(x) = ce^{A(x)} + p(x), \qquad \text{avec } A' = a \text{ et } p(x) = \left[\int b(x)e^{-A(x)}dx\right] e^{A(x)}$$

Ici $\int b(x)e^{-A(x)}dx$ désigne une primitive quelconque de la fonction $x \mapsto b(x)e^{-A(x)}$.

La fonction p est appelée *"solution particulière"*. Elle vérifie $p' = ap + b$. Pour en trouver une (car elle n'est jamais unique), on peut appliquer la méthode de la *"variation de la constante"*: on cherche une solution de la forme $p(x) = c(x)e^{A(x)}$, qui ressemble à la forme des solutions de l'équation homogène associée, mais où la constante c a été remplacée par une fonction $c(x)$. L'équation différentielle $p' = ap + b$ impose alors $c'(x)e^{A(x)} = b(x)$. On est ensuite mené au résultat du théorème.

Le théorème sur la résolution de $f' = af + b$ nous dit en particulier que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 1, et que sa direction est l'espace des solutions de l'équation homogène $h' = ah$.

En théorie des équations différentielles, un problème de Cauchy consiste en une (ou plusieurs) équation(s) différentielle(s) et une (ou plusieurs) condition(s) initiale(s). Résoudre ce problème de Cauchy signifie trouver toutes les solutions de l'équation différentielle qui obéissent à la condition initiale.

Théorème. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On donne $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une seule solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} f'(x) = a(x)f(x) + b(x) \\ f(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Preuve. Nous savons que les solutions f de l'équation $f' = af + b$ sont exactement de la forme

$$f(x) = ce^{A(x)} + p(x)$$

où A est une primitive fixée de a, et p une solution particulière fixée. Le symbole c désigne ici une constante dans $\mathbb{K}$. Or on veut également $y_0 = f(x_0) = ce^{A(x_0)} + p(x_0)$ et donc $c = e^{-A(x_0)}[y_0 - p(x_0)]$ est unique.

Exemple. Résoudre le problème de Cauchy $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} + 2x^2$ avec $f(1) = 0$. L'équation homogène a pour solutions $h(x) = cx$. Par la méthode de la variation de la constante, on trouve $c'(x)x = 2x^2$ et on peut choisir $c(x) = x^2$. Donc $p(x) = x^3$ est une solution particulière, et les solutions de l'équation sont exactement $f(x) = cx + x^3$. Comme il faut $f(1) = 0$, on trouve $0 = c + 1$. La fonction cherchée est alors $\boxed{f(x) = x^3 - x}$.

$\boxed{pf''(x) + qf'(x) + rf(x) = 0}$

C'est la plus simple des équations linéaires homogènes d'ordre 2.

Ici p, q, r sont trois constantes dans $\mathbb{K}$. Il est naturel de supposer p non nul, car sinon on se ramène à un cas particulier des équations linéaires homogènes d'ordre 1. Le théorème de résolution pour cette équation est plus simple à énoncer pour $\mathbb{C}$ que pour $\mathbb{R}$. Nous commençons par cette situation.

Théorème. *Soient p, q, r trois constantes dans $\mathbb{C}$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $p\mu^2 + q\mu + r = 0$.*

Si $\Delta \neq 0$, on note μ_1, μ_2 les deux solutions complexes de l'équation caractéristique. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution de $pf'' + qf' + rf = 0$ si et seulement s'il existe deux constantes complexes c_1, c_2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$$

Si $\Delta = 0$, on note μ l'unique solution complexe de l'équation caractéristique. La fonction f est solution de $pf'' + qf' + rf = 0$ si et seulement s'il existe deux constantes complexes c_1, c_2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 x e^{\mu x}$$

On rappelle que $\{\mu_1, \mu_2\} = \left\{ \dfrac{-q + \sqrt{\Delta}}{2p}, \dfrac{-q - \sqrt{\Delta}}{2p} \right\}$, l'ordre n'ayant pas d'importance. Bien entendu, $\Delta = q^2 - 4pr$, et $\sqrt{\Delta}$ désigne l'une des deux racines carrées complexes du discriminant Δ. Si $\Delta = 0$, on se souvient que $\mu = \dfrac{-q}{2p}$.

Pour trouver les solutions à valeurs réelles, lorsque p, q, r sont des constantes réelles, on peut utiliser ce théorème. En effet, on peut voir p, q, r comme des nombres complexes et considérer l'ensemble de toutes les solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Il suffit ensuite de garder, parmi celles-ci, les fonctions dont toutes les valeurs sont réelles. Cela donne le théorème ci-dessous:

Théorème. *Soient p, q, r trois constantes dans $\mathbb{R}$. On appelle Δ le discriminant de l'équation caractéristique $p\mu^2 + q\mu + r = 0$.*

Si $\Delta > 0$, on note μ_1, μ_2 les deux solutions réelles de l'équation caractéristique. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de $pf'' + qf' + rf = 0$ si et seulement s'il existe deux constantes réelles c_1, c_2 avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$$

Si $\Delta = 0$, on note μ l'unique solution réelle de l'équation caractéristique. La fonction f est solution de $pf'' + qf' + rf = 0$ si et seulement s'il existe *deux constantes réelles* c_1, c_2 *avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 x e^{\mu x}$$

Si $\Delta < 0$, *on note* $\alpha \pm i\beta$ *les deux solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique. La fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est solution de* $pf'' + qf' + rf = 0$ *si et seulement s'il existe deux constantes réelles* c_1, c_2 *avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Ces théorèmes nous disent en particulier que l'ensemble des solutions est toujours un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La dimension de cet espace vectoriel est égale à 2 (la dimension est souvent égale à l'ordre de l'équation). Les deux théorèmes précédents nous fournissent un exemple concret d'une base de cet espace vectoriel de dimension 2. Par exemple, si p, q, r sont réels avec $\Delta < 0$, et que $\alpha \pm i\beta$ sont les solutions de l'équation caractéristique, alors la famille à deux fonctions

$$(x \mapsto e^{\alpha x} \cos \beta x, \ x \mapsto e^{\alpha x} \sin \beta x)$$

est une base de l'espace vectoriel des solutions.

Théorème. *Soient* a, b, c *trois constantes dans* $\mathbb{K}$. *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$, *et* $y_0, z_0 \in \mathbb{K}$. *Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} pf'' + qf' + rf = 0 \\ f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

possède une solution unique.

Preuve. $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$ Nous savons que les solutions sont toutes de la forme $f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$, où g_1, g_2 sont deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (précisées par le théorème de résolution). Les deux conditions initiales imposent alors

$$\begin{cases} c_1 g_1(x_0) + c_2 g_2(x_0) = y_0 \\ c_1 g_1'(x_0) + c_2 g_2'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Il faut montrer que ce système possède une solution unique (c_1, c_2). Cela revient à montrer que

$$\det \begin{bmatrix} g_1(x_0) & g_2(x_0) \\ g_1'(x_0) & g_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

Lorsque $\Delta \neq 0$, on trouve

$$\det \begin{bmatrix} g_1(x_0) & g_2(x_0) \\ g_1'(x_0) & g_2'(x_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{\mu_1 x_0} & e^{\mu_2 x_0} \\ \mu_1 e^{\mu_1 x_0} & \mu_2 e^{\mu_2 x_0} \end{bmatrix} = (\mu_2 - \mu_1) e^{(\mu_1+\mu_2)x_0} \neq 0$$

Lorsque $\Delta = 0$, on trouve

$$\det \begin{bmatrix} g_1(x_0) & g_2(x_0) \\ g_1'(x_0) & g_2'(x_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{\mu x_0} & x_0 e^{\mu x_0} \\ \mu e^{\mu x_0} & e^{\mu x_0} + \mu x_0 e^{\mu x_0} \end{bmatrix} = e^{2\mu x_0} \neq 0$$

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$ Comme les p, q, r sont aussi des nombres complexes, on sait déjà qu'il existe une seule fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifie le problème de Cauchy. Il reste à montrer que l'ensemble d'arrivée de f est bien $\mathbb{R}$. Nous savons que f est solution de $pf'' + qf' + rf = 0$. Comme p, q, r sont réels, on trouve après conjugaison de l'équation qu'on a $p\bar{f}'' + q\bar{f}' + r\bar{f} = 0$. Autrement dit, $\bar{f}$ est aussi solution de l'équation différentielle. Comme y_0, z_0 sont réels, cette fonction vérifie aussi $\bar{f}(x_0) = y_0$ et $\bar{f}'(x_0) = z_0$. Donc f et $\bar{f}$ sont deux fonctions vérifiant le même problème de Cauchy sur $\mathbb{C}$. Or nous savons déjà qu'un problème de Cauchy admet une solution unique. Donc f et $\bar{f}$ sont égales, ce qui veut dire $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \overline{f(x)}$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{pf''(x) + qf'(x) + rf(x) = b(x)}$$

Contrairement à l'équation précédente, ce n'est plus une équation linéaire homogène d'ordre 2; c'est une équation linéaire d'ordre 2. Pour la résoudre, il suffit de trouver une solution particulière s de l'équation. Toutes les solutions sont alors de la forme $s + h$, où h est une solution quelconque de l'équation homogène associée $ph'' + qh' + rh = 0$.

Il y a des méthodes pour trouver $s(x)$ lorsque $b(x)$ prend une forme spéciale (polynôme ou produit exponentielle-polynôme). Nous les avions rencontrées dans notre cours de première année.

Dans ce qui suit, nous donnons une méthode plus générale pour trouver une solution particulière.

Nous savons que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $c_1h_1 + c_2h_2$, où c_1, c_2 sont des constantes dans $\mathbb{K}$ et (h_1, h_2) une base de l'espace vectoriel des solutions homogènes. Nous cherchons une solution s particulière de l'équation avec membre de droite, avec s de la forme

$$s(x) = c_1(x)h_1(x) + c_2(x)h_2(x)$$

Autrement dit, les constantes c_1, c_2 varient maintenant. C'est "la vari-