

高等数学教材丛书

高等数学

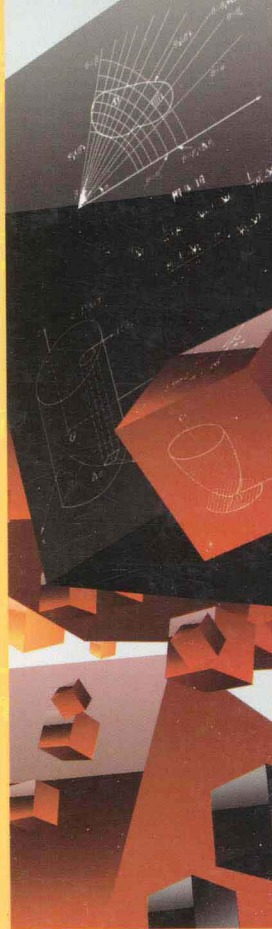
(下)

□ 张发秦
傅金波
柳文清
编著

GAODENG SHUXUE



中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS



高等数学

(下)

张发秦 傅金波 柳文清 编著

中国科学技术出版社

• 北 京 •

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学. 下/张发秦, 傅金波, 柳文清编著. —北京: 中国科学技术出版社, 2013. 12

(高等数学教材丛书)

ISBN 978-7-5046-6474-7

I. ①高… II. ①张… ②傅… ③柳… III. ①高等数学-高等学校-教材
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 282932 号

责任编辑 王晓义

封面设计 孙雪骊

责任校对 孟华英

责任印制 张建农

出版 中国科学技术出版社
发行 科学普及出版社发行部
地址 北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮编 100081
发行电话 010-62173865
传 真 010-62179148
投稿电话 010-62103347
网 址 <http://www.cspbooks.com.cn>

开 本 787mm×1092mm 1/16
字 数 290 千字
印 张 17.75
版 次 2014 年 1 月第 1 版
印 次 2014 年 1 月第 1 次印刷
印 刷 北京长宁印刷有限公司

书 号 ISBN 978-7-5046-6474-7/O · 170
定 价 39.50 元

(凡购买本社图书, 如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责调换)

《高等数学教材丛书》编委会

主 编 张发秦

副主编 傅金波

编 委 刘顺琴 林国斌 黄 嘉 柳文清
王艳珍 李 翔 李巧欣 李艳芳

前 言

为了适应 21 世纪我国高等教育的发展,特别是理工科独立学院的发展,在中国科学院数学研究所研究员、生物数学家、福建师范大学闽南科技学院名誉院长陈兰荪教授的主持下,由张发秦、傅金波等人执笔,根据在闽南科技学院十多年的教学实践,编写了这套《高等数学教材丛书》。

这套教材主要特点是采用分层教学理念编写。一方面,简明直接地阐述最基本内容,让大多数非数学专业的学生掌握最基础的数学知识;另一方面,为保证大学教育的公正性,书中带 * 号内容,提供给学有余力,愿意深入学习的学生。我们希望通过精讲精练的方式,把高等数学更明白地展现给普通人,展现给未来需要数学工具和方法的人,而不只是数学工作者。

这套书每章的最后一节《综合训练》都应该在全书学完后,再做进一步学习。另外,它还可以作为非数学专业学生报考研究生的复习资料。

作者水平有限,不妥之处,欢迎读者批评指正。

希望我们的这项工作能为理工科独立学院的发展做出有益的贡献。

目 录

第七章 向量与空间解析几何	1
第一节 向量及其线性运算	1
第二节 直角坐标系	2
第三节 向量的内积与外积	6
第四节 空间曲面及其方程	9
第五节 空间曲线及其方程	11
第六节 平面及其方程	13
第七节 空间直线及其方程	15
* 第八节 综合训练	17
习题七	23
第八章 多元函数微分学	25
第一节 多元函数的概念、极限与连续性	25
第二节 偏导数与全微分	27
第三节 多元复合函数求导法则	35
第四节 多元函数的极值与求法	42
第五节 多元函数微分学的几何应用	45
第六节 方向导数与梯度	50
第七节 二元函数 n 阶泰勒公式	55
* 第八节 综合训练	56
习题八	75
第九章 重积分	77
第一节 二重积分的概念与性质	77
第二节 二重积分的计算	79
第三节 三重积分简介	96
* 第四节 含参变量的积分	101

* 第五节 综合训练	103
习题九	118
第十章 曲线积分与曲面积分	120
第一节 对弧长的曲线积分	120
第二节 对坐标的曲线积分	123
第三节 格林公式	128
第四节 对面积的曲面积分	134
第五节 对坐标的曲面积分	136
第六节 高斯公式 通量与散度	145
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	152
* 第八节 综合训练	163
习题十	189
第十一章 无穷级数	191
第一节 常数项级数的概念与性质	191
第二节 数项级数的审敛法	193
第三节 幂级数	200
第四节 函数展成幂级数	205
第五节 傅里叶级数	207
* 第六节 综合训练	213
习题十一	220
第十二章 微分方程	223
第一节 基本概念	223
第二节 一阶方程求解	224
第三节 可降阶高阶方程举例	234
第四节 常系数二阶线性方程	238
* 第五节 差分方程简介	241
* 第六节 其他方法举例	245
* 第七节 综合训练	248
习题十二	270
参考答案	272

第七章

向量与空间解析几何

第一节 向量及其线性运算

一、向量概念

既有大小又有方向的量(也叫矢量).

几何表示:有向线段 $\overrightarrow{AB}$. 有向线段的方向表示向量方向,有向线段的长度,表示向量大小.

以 A 为起点, B 为终点的向量写为 $\overrightarrow{AB}$, 我们只研究与其起点无关的向量(自由向量).

相等:向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等,写作 $\vec{a} = \vec{b}$, 指经过平行移动后能完全重合.

模 $|\vec{a}|$: 向量 $\vec{a}$ 的大小(长度).

单位向量: 模为 1.

零向量 $\vec{0}$: 模为 0.

非零向量平行: 方向相同或相反, 记作 $\vec{a} // \vec{b}$.

当两平行向量起点放在同一点时, 终点与起点在同一直线上

$\therefore \vec{a} // \vec{b} \iff \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线.

二、向量的线性运算(加减法与数乘)

1. 向量的加法

(1) 三角形法则: 首尾相接, 如图 7-1 所示.

特别适用于多个向量相加, 如图 7-2 所示.

(2) 平行四边形法: 两个向量作为边, 对角线即为向量之和(适于分解), 见图 7-3.

规定: $-\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 模相等, 方向正相反.

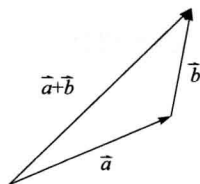


图 7-1

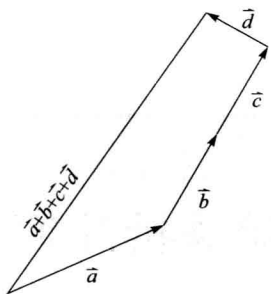


图 7-2

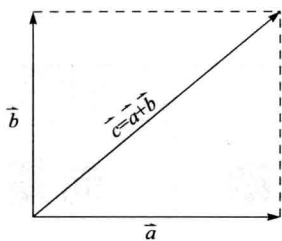


图 7-3

(3) 减法

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

2. 向量与数的乘法

向量 $\vec{a}$ 与实数 λ 相乘得 $\lambda \vec{a}$, 它是一个向量, 模 $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$; $\lambda > 0$ 与 $\vec{a}$ 同方向, $\lambda < 0$, $\lambda \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向正相反.

设 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 则 $\vec{a} // \vec{b} \iff$ 存在唯一的实数使 $\vec{b} = \lambda \vec{a} \iff \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线.

第二节 直角坐标系

1. 平面直角坐标系

把 x 轴和 y 轴放在水平面上, 垂直相交于原点 O , x 轴正方向逆时针旋转 90° 指向 y 轴正方向, 构成平面直角坐标系, 平面上任意一点 M 与有序数组 (x, y) 一一对应, 其中 x 是 $\vec{OM}$ 在 x 轴上投影, y 是 $\vec{OM}$ 在 y 轴上的投影, 如图 7-4.

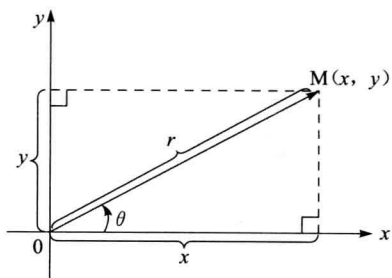


图 7-4

向量 $\vec{OM}$ 也与上述有序数组 (x, y) 一一对应, 即 (x, y) 既表示上述点 M , 也可表示向量 $\vec{OM}$.

用极坐标系也可以表示上述点 $M(r, \theta)$.

其中, r 表示原点 O 到 M 的长度, θ 表示

$\vec{OM}$ 与极轴 (x 轴正向) 的夹角, 于是有

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

用诱导公式给出与 $\vec{OM} = (x, y)$ 长度一样且垂直的向量 $\vec{ON}$ 及 $\vec{ON}^*$, 如图 7-5.

$$\overrightarrow{ON}: r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -r\sin\theta = -y,$$

$$r\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = r\cos\theta = x.$$

$$\overrightarrow{ON}^*: r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = r\sin\theta = y,$$

$$r\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -r\cos\theta = -x.$$

有点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 坐标为 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 由终点坐标减起点坐标得到, 它的模(长度)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

它正好是平面直角坐标系下两点间的距离.

2. 空间直角坐标系

在平面直角坐标系(水平面)基础上, 过原点 O 添一条铅垂线为 z 轴, 正向向上, 符合右手法则: 右手四指从 x 轴正向转 90° 指向 y 轴正向, 拇指指向 z 轴正向.

三个坐标平面: xOy 面($z=0$), yOz 面($x=0$), zOx 面($y=0$), 见图 7-6.

八个象限: I ($x>0, y>0, z>0$), II ($x<0, y>0, z>0$) III ($x<0, y<0, z>0$), IV ($x>0, y<0, z>0$), V ($x>0, y>0, z<0$), VI ($x<0, y>0, z<0$) VII ($x<0, y<0, z<0$), VIII ($x>0, y<0, z<0$), 如图 7-7 所示.

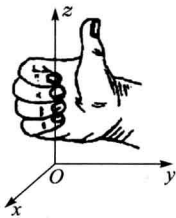


图 7-6

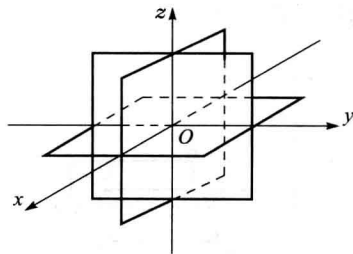


图 7-7

空间任一点 M 的坐标 (x, y, z) , 其中 x, y, z 分别为过 M 点作与 x 轴, y 轴, z 轴垂直的平面与三个轴截得的, 它们也正是 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的投影, 在空间 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 空间的点 M 与三元有序数组即坐标 (x, y, z) 一一对应

x 轴上的单位向量 $\vec{i} = (1, 0, 0)$,

y 轴上的单位向量 $\vec{j} = (0, 1, 0)$,

z 轴上的单位向量 $\vec{k} = (0, 0, 1)$,

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 两两相互垂直.

可以用坐标做向量的线性运算

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = \lambda \vec{a} \iff (b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z) \iff \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} (= \lambda).$$

例 1 已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$. 求两点间距离.

解: 过点 M_1 和 M_2 分别作三坐标轴的垂面, 得到以线段 M_1M_2 为对角线的平行六面体(见图 7-8)

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

两点的距离 $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

它也是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

向量的方向角与方向余弦

非零向量 $\vec{r}$ 与三坐标轴的夹角 α, β, γ 称为方向角夹角的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为方向余弦(见图 7-9).

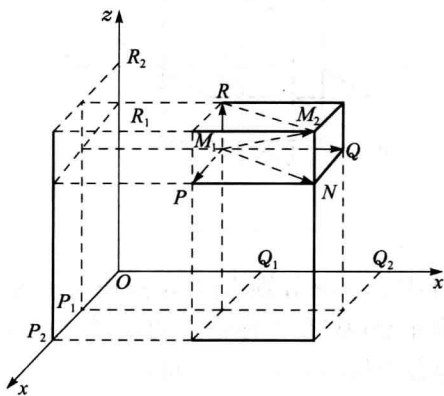


图 7-8

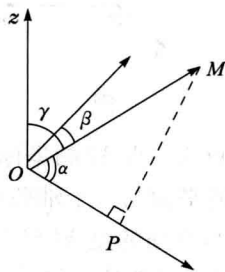


图 7-9

由于是自由向量, 平行移至原点为起点, 认为

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z), \quad |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r,$$

$$|OP| = x, \quad MP \perp OP.$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{x}{|\vec{OM}|} = \frac{x}{r}.$$

同理:

$$\cos\beta = \frac{y}{r},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = 1.$$

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{r}(x, y, z) = \vec{e}_{\vec{r}}$$

就是 $\vec{r}$ 方向上的单位向量.

例 2 设 $M_1(2, -\sqrt{2}, 1), M_2(5, 2\sqrt{2}, 4)$. 求 $\overline{M_1M_2}$ 的模, 方向余弦与方向角.

解: $\overline{M_1M_2} = [5-2, 2\sqrt{2}-(-\sqrt{2}), 4-1] = (3, 3\sqrt{2}, 3).$

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(3)^2 + (3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{1+2+1} = 6.$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

向量在轴上的投影 $Prj_u \vec{r}$

作 $\vec{OM} = \vec{r}$

过点 M 作 u 轴垂直的平面与 u 轴交 M'

点(是 M 点在 u 轴上的投影点)

向量 $\vec{OM'}$ 为 $\vec{OM}$ 在 u 上的分向量, $\vec{e}$ 为 u 轴上的单位向量, 若 $\vec{OM'} = \lambda \vec{e}$ 称 λ 为 $\vec{OM}$ 在 u 轴上的投影(如图 7-10).

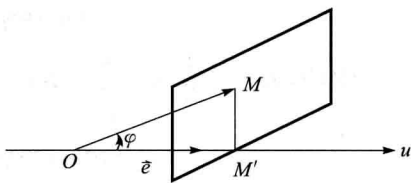


图 7-10

记作 $Prj_u \vec{OM}$ 或 $Prj_u \vec{r}$

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, 则 $a_x = Prj_x \vec{a}$,

$$a_y = Prj_y \vec{a},$$

$$a_z = Prj_z \vec{a}.$$

性质 1 $Prj_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$.

性质 2 $Prj_u (\vec{a} + \vec{b}) = Prj_u \vec{a} + Prj_u \vec{b}$.

性质 3 $Prj_u \lambda \vec{a} = \lambda Prj_u \vec{a}$.

例 3 $A(1, 2, 3), B(3, 6, 9)$, 求 $Prj_{\vec{OA}} \vec{AB}$.

解法一: $\vec{AB} = (2, 4, 6) = 2(1, 2, 3) = 2\vec{OA}$,

$$|\vec{OA}| = \sqrt{1+2^2+3^2} = \sqrt{14},$$

$$\vec{AB} = 2\sqrt{14}\vec{e}_{\vec{OA}} \quad P_{\vec{r}-\vec{OA}}\vec{AB} = 2\sqrt{14}.$$

解法二: $\vec{AB} = (2, 4, 6) // \vec{OA} = (1, 2, 3), \quad \cos\varphi = 1$

$$\therefore P_{\vec{r}-\vec{OA}}\vec{AB} = |\vec{AB}| = \sqrt{2^2+4^2+6^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

例4 求与 $\vec{a} = (3, -2, 1)$ 共线且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 28$ 的矢量 $\vec{b}$.

解: $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, 存在实数 $\lambda \neq 0$ 使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

$$\text{又 } 28 = \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{a} = \lambda(9+4+1) = 14\lambda$$

$$\therefore \lambda = 2. \text{ 代回得 } \vec{b} = 2\vec{a} = (6, -4, 2).$$

例5 矢量 $\vec{a}$ 与 x 轴、 y 轴成等角, 与 z 轴所成的角是它们的和, 确定该矢量的方向.

解: 设该矢量 $\vec{a}$ 与 x, y 轴成的角为 α , 则与 z 轴夹角 2α . 显然 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 且有

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

$$2\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)^2 = 1$$

$$2\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1 = 1$$

$$4\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha = 0$$

$$2\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = 0$$

(1) $\cos\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2} = \beta, \gamma = \pi$, 方向余弦为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (0, 0, -1);$$

(2) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}, \alpha = \frac{\pi}{4} = \beta, \gamma = \frac{\pi}{2}$, 方向余弦为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

第三节 向量的内积与外积

1. 内积(·积),(数量积)

设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, 模 $|\vec{a}|$ 及 $|\vec{b}|$ 内积定义为一个数:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \text{ 还可以写作 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{Prj}_{\vec{b}} |\vec{a}|.$$

显然满足交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

$$\text{分配律 } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

关于数的结合律 $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

由 $\cos 0 = 1$. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

定理一 $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

证明: $\Rightarrow$ 必要性

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$\Leftarrow$ 充分性

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \begin{cases} \text{若 } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0, \vec{a} \perp \vec{b}; \\ \text{若 } |\vec{a}| |\vec{b}| = 0 \text{ 必有一为零向量, 认为与任何向量} \\ \text{垂直, } \vec{a} \perp \vec{b}. \end{cases}$$

三坐标轴上的单位向量两两垂直, $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos 0 = 1$.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1. \text{ 由此可得内积的坐标运算式.}$$

$$\text{设 } \vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \cdot \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} \\ &\quad + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + y_1 z_2 \vec{j} \cdot \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \cdot \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

定理二 平面直角坐标系三点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 构成的三角形 ABC

$$\text{的面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

证明: 如图 7-11 中,

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

与 $\vec{b}$ 长度一样, 且垂直(顺时针转 $\frac{\pi}{2}$)的

向量 $\vec{b}^* = (y_3 - y_1, x_1 - x_3)$ (由诱导公式在第二节中得出), $|\vec{b}| = |\vec{b}^*| = b, |\vec{c}| = c$.

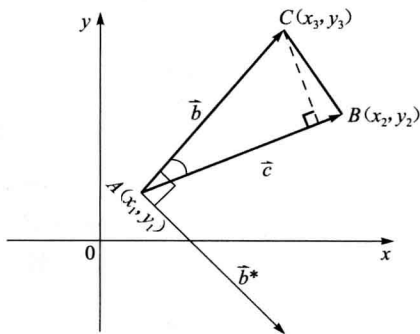


图 7-11

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} bc \cos \left(A - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \vec{b}^* \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{记为二阶} \\ \text{行列式} \end{array} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

2. 外积(向量积)($\times$ 积)

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的外积 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ 是一个向量 $\vec{c}$.

方向: $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, 按右手法则, 从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 为四指方向, 拇指指向 $\vec{c}$ 的方向.

模:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle,$$

性质:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0};$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b};$$

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

分配律

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

关于数的结合律

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \lambda \vec{b}.$$

设

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

注意

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$

右手规则:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 y_2 \vec{k} - x_1 z_2 \vec{j} - y_1 x_2 \vec{k} + y_1 z_2 \vec{i} + z_1 x_2 \vec{j} - z_1 y_2 \vec{i} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{记为} \\ \text{行列式} \end{array} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

例 已知空间三点 $A(1,1,1), B(2,2,1), C(2,1,2)$.

求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: 如图 7-12 所示, $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$,

$$\overrightarrow{AC} = (1,0,1).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1).$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin A$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

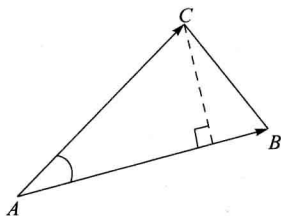


图 7-12

验: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2} = |\overrightarrow{AC}|$, $\overrightarrow{BC} = (0, -1, 1)$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$. 等边三角形面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

第四节 空间曲面及其方程

在空间直角坐标系中,若方程 $F(x, y, z) = 0$ 与曲面 S 存在关系:①满足方程 $F(x, y, z) = 0$ 的任一组解 (x, y, z) 都是曲面 S 上点的坐标;②曲面 S 上任意一点的坐标 (x, y, z) 都满足方程 $F(x, y, z) = 0$, 那么称 $F(x, y, z) = 0$ 是曲面 S 的方程, S 是方程 $F(x, y, z) = 0$ 的曲面.

三个独立变量 x, y, z , 一个约束条件(一个方程), 还有两个自由度, 故曲面若用参数表示, 一定是双参数的 $\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \\ z = Z(u, v) \end{cases}$. 而曲线只是单参数的.

1. 二次曲面及方程

本节先不讨论平面, 专门谈二次曲面及其方程(三元二次方程).

(1) $x^2 + y^2 = R^2$, 圆柱面 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{椭圆柱面}\right)$.

在 $z=0$ 的 xOy 面上, 方程表示以原点为圆心, R 为半径的圆.

方程不显含 z , z 可以任意取, 只需 x 与 y 满足方程 $x^2 + y^2 = R^2$, R 是通过点 $(x, y, 0)$ 平行于 z 轴的直线 e (称为母线) 上的点都在曲面上, 曲面是由平行于 z 轴的母线 e 沿准线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 移动而成的圆柱面(平行于 z 轴方向无限延伸, 见图 7-13).

(2) $y^2 = ax$ 抛物柱面准线 $\begin{cases} y^2 = ax \\ z = 0 \end{cases}$ 母线平行于 z 轴, 见图 7-14.

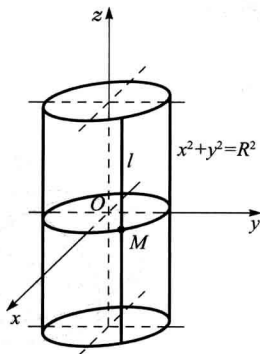


图 7-13

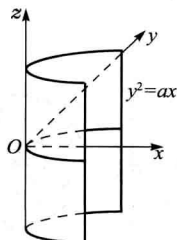


图 7-14

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 双曲柱面, 见图 7-15.

(4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = y^2$ 椭圆锥面, 见图 7-16.

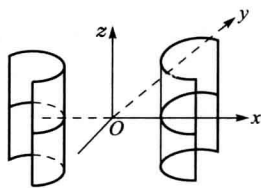


图 7-15

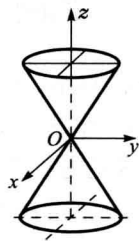


图 7-16

(5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ 椭圆抛物面, 见图 7-17.

(6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 单叶双曲面, 见图 7-18.

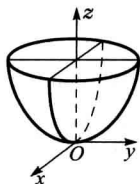


图 7-17

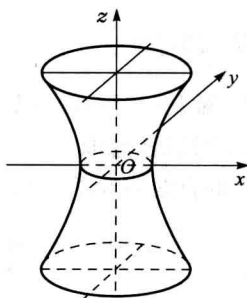


图 7-18

(7) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 双叶双曲面, 见图 7-19.

(8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 椭球面, 见图 7-20.

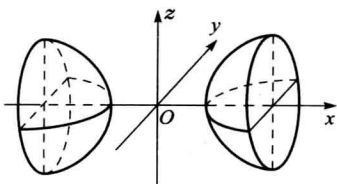


图 7-19

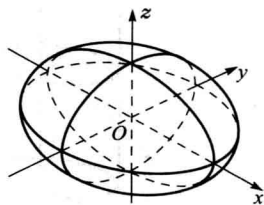


图 7-20