高等流体力学

GAODENGLIUTILIXUE

高等学校"十二五"规划教材　市政与环境工程系列研究生教材

伍悦滨　主　编

HITP 哈爾濱工業大學出版社

高等学校"十二五"规划教材

市政与环境工程系列研究生教材

高等流体力学

伍悦滨　主编

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书按照流体力学学科系统阐明流体运动所遵循的基本规律，以及流体与固体相对运动时的相互作用，并着重讨论流体力学的基本物理概念，以及流体力学问题的建立过程和数学处理方法。使读者获得从事与流体力学相关的研究工作所必需具备的理论基础。在取材的深度和广度上，本书尽量考虑了不同类型专业的要求，以使该书具有较好的适用性。

全书共7章：场论与张量、流体运动学、流体动力学的基本方程、理想流体、黏性流体动力学基础、湍流理论基础、边界层理论。为加深对于基本内容的理解，本书各章编入了若干例题和习题。

本书主要作为土木工程一级学科下各专业以及环境工程专业研究生课程的教材或教学参考书，也可作为有关专业从事科研、教学及工程工作的科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等流体力学/伍悦滨主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.8

ISBN 978-7-5603-4214-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①伍… Ⅲ.①流体力学－高等学校－教材 Ⅳ.①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第185390号

策划编辑　贾学斌　王桂芝
责任编辑　李广鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.25　字数 326 千字
版　　次　2013年8月第1版　2013年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4214-6
定　　价　32.00元

前　言

“高等流体力学”是硕士研究生的专业基础课程，适用于航天、能源、土木工程、市政环境、建筑热能工程等不同专业。在本科工程流体力学的基础上，在对流动所伴随物理现象的认识、概念的建立及规律的分析的同时，努力加深学生对学科中分析和研究问题的基本思想和方法的理解和掌握，以提高分析和解决流体力学问题的水平及能力。

本书的编写广泛吸收了国内各类高等流体力学教材的精华，力求有所发展和提高。考虑到工科教学的特点，本书在透彻讲解流体力学基本微分方程组的基础上，联系工程实际，旨在由浅入深、循序渐进地培养学生应用基本理论解决各类流体力学问题的思维习惯和方法。

本书在选材上注意了与本科生教材有恰当的分工和衔接，避免了不必要的重复。在介绍了矢量分析和运算微积及张量分析必要的数学基础后，讲述了流体运动学及动力学基本原理及控制方程，此外还涵盖了理想流体、黏性流体、湍流及边界层等内容。为加深对于基本内容的理解，本书各章编入了若干例题和习题，不但适合教学使用，而且适合学生自学。

本书共分为 7 章，第 1 章场论与张量，介绍了流体力学分析时必要的数学理论基础；第 2 章流体运动学，介绍了运用几何学知识研究流体的运动规律；第 3 章流体动力学的基本方程，介绍了流体力学的基本方程式的微分及积分形式；第 4 章理想流体，介绍了理想流体的基本性质和运动规律；第 5 章黏性流体动力学基础，介绍了黏性流体流动的基本特性；第 6 章湍流理论基础，介绍了普遍适用的湍流理论；第 7 章边界层理论，介绍了边界层理论基础及边界层的特点等。

本书由哈尔滨工业大学伍悦滨和哈尔滨商业大学徐莹共同编写，其中伍悦滨主编，徐莹参编。

鉴于编者水平有限，书中难免会有疏漏和不妥之处，恳请读者、专家批评指正，以帮助我们进一步完善教材。

编　者

2013 年 7 月

目　录

第 1 章　预备知识:场论与张量

场是具有物理量的空间,场的研究方向是将物理量作为空间点位置 R 和时间 t 的函数。但在场论分析中,t 作为参变量处理,即分析 t 时刻的场的情况。

1.1　向量及张量的基本运算

1.1.1　向量运算符号规定

1. 爱因斯坦(Einstein) 求和符号

数学式子任意一项中如出现一对符号相同的指标,则称为爱因斯坦求和符号,它是哑指标,表示求和。例如:

$$a_i \boldsymbol{e}_i = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}$$

$$k_1 a_i b_i + k_2 \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = k_1 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + 3k_2$$

2. 克罗内克尔(Kronecker) 符号

任意两个正交单位向量点积用 δ_{ij} 表示,称为克罗内克尔符号,即

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i,j=1,2,3 \tag{1.1}$$

式中　i,j—— 自由指标。

式(1.1) 表示 $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$。

3. 置换符号

任意两个正交单位向量叉积可表示为

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = e_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{1.2}$$

式中　e_{ijk}—— 置换符号,又称利西(Ricci) 符号,其数值为下:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & i,j,k \text{ 中有 2 个或 3 个自由指标值相同} \\ 1, & i,j,k \text{ 中按 12312 顺序任取 3 个排列} \\ -1, & i,j,k \text{ 中按 13213 顺序任取 3 个排列} \end{cases}$$

上式表示 $e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1$,其余分量为零。由此可知,$e_{ijk}$ 中任意两个自由指标对换,对应分量值相差一个负号,如 $e_{132} = -e_{123}$,故 e_{ijk} 称为置换符号。

1.1.2　向量运算的常用公式

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{e}_i \pm b_i \boldsymbol{e}_i = (a_i \pm b_i) \boldsymbol{e}_i \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{e}_i \cdot b_j \boldsymbol{e}_j = a_i b_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_j \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{e}_i \times b_j \boldsymbol{e}_j = a_i b_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = a_i b_j e_{ijk} \boldsymbol{e}_k = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & e_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot(b_j\boldsymbol{e}_j\times c_k\boldsymbol{e}_k)=a_ib_jc_k\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)=$$
$$a_ib_jc_k\,e_ie_{jki}\,e_i=a_ib_jc_ke_{jki}=a_ib_jc_ke_{ijk}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\tag{1.6a}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\tag{1.6b}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\tag{1.7}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\tag{1.8}$$

1.1.3 向量分量的坐标变换

按向量定义：

$$\boldsymbol{\alpha}=a_i\boldsymbol{e}_i=a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}\tag{1.9}$$

式中 a_i, a_i' 和 $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{i'}$——$\boldsymbol{\alpha}$ 两个不同的正交坐标系中的分量和坐标轴单位向量。

各单位向量间的夹角的余弦（即方向余弦）为 $l_j, m_j, n_j\,(j=1,2,3)$，见表 1.1，则对应的向量分量的坐标变换关系有

$$\begin{aligned}a_{i'}&=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_{i'}=(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_{i'})a_i,\quad i'=1,2,3\\a_i&=a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_i=(\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_i)a_{i'},\quad i=1,2,3\end{aligned}\tag{1.10}$$

例如：

$$a_{1'}=(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_{1'})a_1+(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_{1'})a_2+(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_{1'})a_3=l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3$$
$$a_2=(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_2)a_{1'}+(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_2)a_{2'}+(\boldsymbol{e}_{3'}\cdot\boldsymbol{e}_2)a_{3'}=l_2a_{1'}+m_2a_{2'}+n_2a_{3'}$$

表 1.1 各坐标轴间方向余弦

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_{1'}$	l_1	l_2	l_3
$\boldsymbol{e}_{2'}$	m_1	m_2	m_3
$\boldsymbol{e}_{3'}$	n_1	n_2	n_3

1.1.4 二阶张量的基本运算

力学中最常用的张量是二阶张量。二阶张量就是两个向量的并积，可表示为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha c}=a_i\boldsymbol{e}_ic_j\boldsymbol{e}_j=a_ic_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=b_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\quad i,j=1,2,3\tag{1.11}$$

式中 b_{ij}—— 二阶张量在单位坐标轴向量为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的正交坐标系中的分量，共有 9 个。$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 是二阶张量的基，其分量也有 9 个。注意 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\neq\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$。

1. 二阶张量的运算规则

$$\boldsymbol{ab}\pm\boldsymbol{cd}=(a_ib_j\pm c_id_j)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{bc}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{ad}=\boldsymbol{ad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{ad}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{ab}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\tag{1.16}$$

2. 二阶张量分量的坐标变换

按张量定义：

$$\boldsymbol{B}=b_{ij}\,\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j=b_{i'j'}\,\boldsymbol{e}_{i'}\,\boldsymbol{e}_{j'} \tag{1.17}$$

式中　b_{ij}，$b_{i'j'}$——对应于两个坐标系中的张量分量，其对应的坐标变换为

$$\left.\begin{aligned} b_{i'j'}&=\boldsymbol{e}_{i'}\cdot(b_{ij}\,\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_{j'}=b_{ij}(\boldsymbol{e}_{i'}\cdot\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_{j'}\cdot\boldsymbol{e}_j), \quad i',j'=1,2,3\\ b_{ij}&=\boldsymbol{e}_i\cdot(b_{i'j'}\,\boldsymbol{e}_{i'}\,\boldsymbol{e}_{j'})\cdot\boldsymbol{e}_j=b_{i'j'}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_{i'})(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_{j'}), \quad i,j=1,2,3\end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

例如（参见表 1.1）：

$$\begin{aligned} b_{1'2'}=&\,b_{11}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_1)+b_{12}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_2)+b_{13}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_3)+\\ &\,b_{21}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_1)+b_{22}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_2)+b_{13}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_3)+\\ &\,b_{31}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_1)+b_{32}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_2)+b_{13}(\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_3)=\\ &\,l_1m_1b_{11}+l_1m_2b_{12}+l_1m_3b_{13}+l_2m_1b_{21}+l_2m_2b_{22}+l_2m_3b_{23}+\\ &\,l_3m_1b_{31}+l_3m_2b_{32}+l_3m_3b_{33}\end{aligned}$$

1.2　物理量的梯度、散度与旋度

1.2.1　物理量的梯度

物理量的梯度可用来描述该物理量在一点邻域内的变化情况。

如有一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，处处满足 $\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$。这里$\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$为标量 φ 沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的方向导数，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 定义为物理量 φ 的梯度，并表示为 grad φ。它在直角坐标系中的表达式为

$$\operatorname{grad}\varphi=\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.19}$$

标量梯度有两条经常应用的重要性质：

(1)$\boldsymbol{e}_l\cdot\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$，$\mathrm{d}l\cdot\operatorname{grad}\varphi=\mathrm{d}\varphi$，这里 $\mathrm{d}l=\mathrm{d}l\boldsymbol{e}_l$，前式表示由梯度可以得到物理量 φ 沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的方向导数，后式表示由梯度可以知道物理量沿 $\boldsymbol{e}_l$ 经过 $\mathrm{d}l$ 线段的增量。

(2)$\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{e}_n$，这里 $\boldsymbol{e}_n$ 为 φ 等值面法线指向 φ 增大的方向的单位向量，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$是 φ 沿 $\boldsymbol{e}_n$ 方向的方向导数，所以由梯度可以求得等值面法线方向的单位向量，它为 $\pm\dfrac{\operatorname{grad}\varphi}{|\operatorname{grad}\varphi|}$。

1.2.2　物理量的散度

物理量的散度可以用来判别场是否有源。

1. 向量的散度的定义及其在直角坐标系中的表达式

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在点 M 的散度用 div $\boldsymbol{\alpha}$ 表示，定义为 $\operatorname{div}\boldsymbol{\alpha}=\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{1}{\tau}\oiint_A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}A$。式中 τ 为包围点 M 的任意空间体积，A 为 τ 域对应的边界曲面，$\boldsymbol{n}$ 为边界曲面上微元面积 $\mathrm{d}A$ 的外法线方

向单位向量，$\oiint_A \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}A$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 流出曲面 A 的通量，在直角坐标系中，令 $\boldsymbol{\alpha}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$，则有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\alpha}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1.20}$$

流体力学中常用的向量散度的速度散度，令 $\mathbf{V}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$，则

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

2. 二阶张量的散度及其在直角坐标系中的表达式

完全类似于向量散度，可以定义二阶张量 $\boldsymbol{B}$ 的散度为 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\oiint_A \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}A$。同样在直角坐标系中可令 $\boldsymbol{B}=\mathbf{i}\,\boldsymbol{b}_x+\mathbf{j}\,\boldsymbol{b}_y+\mathbf{k}\,\boldsymbol{b}_z$，则有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=\frac{\partial\,\boldsymbol{b}_x}{\partial x}+\frac{\partial\,\boldsymbol{b}_y}{\partial y}+\frac{\partial\,\boldsymbol{b}_z}{\partial z}$$

流体力学中常用的二阶张量散度为应力张量散度，令 $\boldsymbol{P}=\mathbf{i}\,\boldsymbol{p}_x+\mathbf{j}\,\boldsymbol{p}_y+\mathbf{k}\,\boldsymbol{p}_z$，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{P}=\frac{\partial\,\boldsymbol{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\,\boldsymbol{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\,\boldsymbol{p}_z}{\partial z} \tag{1.21}$$

3. 有源场与无源场

如果某物理量的散度处处为零，则称该物理量的场是无源场，否则就是有源场。

【例 1.1】　求 $\operatorname{div}(\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{V})$ 在直角坐标系中的表达式，这里

$$\boldsymbol{P}=\mathbf{i}\,\boldsymbol{p}_x+\mathbf{j}\,\boldsymbol{p}_y+\mathbf{k}\,\boldsymbol{p}_z=$$
$$p_{xx}\mathbf{ii}+p_{xy}\mathbf{ij}+p_{xz}\mathbf{ik}+p_{yx}\mathbf{ji}+p_{yy}\mathbf{jj}+p_{yz}\mathbf{jk}+p_{zx}\mathbf{ki}+p_{zy}\mathbf{kj}+p_{zz}\mathbf{kk}$$
$$\mathbf{V}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$$

解　$$\operatorname{div}(\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{V})=\operatorname{div}(p_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot V_k\boldsymbol{e}_k)=\operatorname{div}(p_{ij}V_k\boldsymbol{e}_i\delta_{jk})=\operatorname{div}(p_{ij}V_j\boldsymbol{e}_i)=$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u+p_{xy}v+p_{xz}w)+\frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}u+p_{yy}v+p_{yz}w)+$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}u+p_{zy}v+p_{zz}w)$$

1.2.3　物理量的旋度

物理量的旋度可用来判别流场是否有旋。流体力学一般很少用二阶张量的旋度，所以这里只讨论向量的旋度。

1. 向量旋度的定义及其在直角坐标系中的表达式

如有一向量 $\boldsymbol{c}$ 处处满足 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}=\lim\limits_{A\to 0}\dfrac{\oint_l \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{A}$，则定义 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的旋度，并用 $\operatorname{rot}\boldsymbol{\alpha}$ 表示。这里 $\boldsymbol{l}$ 为可缩封闭曲线，A 为以 $\boldsymbol{l}$ 为周线的周面，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 A 缩小为零时法线方向单位向量，$\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 方向满足右手螺旋法则，$\oint_l \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 的环量。在直角坐标系中 $\boldsymbol{\alpha}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 的旋度可表示为

$$\text{rot}\ \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} \tag{1.22}$$

流体力学中常用的向量旋度是速度旋度，它的表达式为

$$\nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

2. 有旋场与无旋场

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的旋度处处为零，则称向量场 $\boldsymbol{\alpha}$ 为无旋场，否则就是有旋场。

【例 1.2】　已知 $\boldsymbol{V}_e=\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}$，式中 $\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{V}_0(t)$，$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(t)$，$\boldsymbol{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，求 $\text{rot}\ \boldsymbol{V}_e$。

解

$$\text{rot}\ \boldsymbol{V}_e=\text{rot}\ \boldsymbol{V}_0+\text{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})=\text{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\mathbf{i}(\omega_y z-\omega_z y)+\mathbf{j}(\omega_z x-\omega_x z)+\mathbf{k}(\omega_x y-\omega_y x)$$

$$\text{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \omega_y z-\omega_z y & \omega_z x-\omega_x z & \omega_x y-\omega_y x\end{vmatrix}=$$

$$\mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y-\omega_y x)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x-\omega_x z)\right]+$$

$$\mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\omega_y z-\omega_z y)-\frac{\partial}{\partial x}(\omega_x y-\omega_y x)\right]+$$

$$\mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega_z x-\omega_x z)-\frac{\partial}{\partial y}(\omega_y z-\omega_z y)\right]=$$

$$2\omega_x\mathbf{i}+2\omega_y\mathbf{j}+2\omega_z\mathbf{k}=2\boldsymbol{\omega}$$

所以 $\text{rot}\ \boldsymbol{V}_e=2\boldsymbol{\omega}$。

1.3　哈密尔顿算子及其应用

哈密尔顿(Hamilton)算子是一个具有微分及向量双重运算的算子，适用于任意正交曲线坐标系，但其具体形式在不同坐标系中是不同的，由于公式推导或恒等式的证明常常在直角坐标系中最为简捷，所以哈密尔顿算子的直角坐标系中的表达式最为常用。其具体形式为

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

运算时先进行微分运算，然后进行向量运算，具体运算规定如下：

$$\left.\begin{aligned}
\nabla\varphi &= \boldsymbol{e}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \mathrm{grad}\ \varphi \\
\nabla\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{e}_i \frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial x_i} = \mathrm{grad}\ \boldsymbol{\alpha} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial x_i} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} \\
\nabla\times\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\times\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial x_i} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

物理量梯度的散度运算称为拉普拉斯(Laplace) 运算，通常用算子∇^2表示(也有用 Δ 表示)，即$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi$，$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\alpha}=\nabla^2\boldsymbol{\alpha}$，这里$\nabla^2$称为拉普拉斯算子，按哈密尔顿算子运算规则，在直角坐标系中

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2\varphi &= \nabla\cdot\nabla\varphi = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{e}_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_i} \\
\nabla^2\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{e}_j\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\partial x_i}
\end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

【例 1.3】 证明：$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{\alpha})=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{\alpha}+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha}$。

证明 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\varphi\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e}_i\cdot\varphi\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial x_i}=$

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{\alpha}+\varphi\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial x_i}=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{\alpha}+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha}$$

证毕。

【例 1.4】 证明：$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$。

证明 $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=$

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}\times\boldsymbol{b}\right)+\boldsymbol{e}_i\cdot\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\right)=$$

$$\left(\boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}\right)\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}_i\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\times\boldsymbol{a}\right)=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$$

证毕。

【例 1.5】 证明：$\nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$。

证明 $\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times\boldsymbol{b}\right)=\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\right)=\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_i-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i)\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}=$

$$\boldsymbol{e}_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{a}\right)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}=\nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}$$

所以

$$\nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$$

证毕。

【例 1.6】 证明：$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$。

证明 $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}=\nabla\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{a}=$

$$\nabla\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$$

上述最后一个等式是利用例 1.5 的恒等式，所以

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$$

证毕。

【例 1.7】 证明：$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$。

证明

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})\doteq\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\times\boldsymbol{a}\right)=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\times\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_i\partial x_j}=\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_i\partial x_j}=$$
$$e_{ijk}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\boldsymbol{e}_k=e_{123}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_1\partial x_2}\cdot\boldsymbol{e}_3+e_{132}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_1\partial x_3}\cdot\boldsymbol{e}_2+$$
$$e_{213}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_2\partial x_1}\cdot\boldsymbol{e}_3+e_{231}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_2\partial x_3}\cdot\boldsymbol{e}_1+e_{321}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x_3\partial x_2}\cdot\boldsymbol{e}_1+$$
$$e_{312}\frac{\partial^2 a}{\partial x_3\partial x_1}\cdot\boldsymbol{e}_2=0$$

证毕。

【例 1.8】 如$\mathbf{V}_e=\mathbf{V}_0(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x_i\boldsymbol{e}_i$，证明：$\nabla\mathbf{V}_e\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\omega}$。

证明

$$\nabla\boldsymbol{V}_e\cdot\boldsymbol{a}=\nabla(\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{a}=\nabla(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_i\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\right]\cdot\boldsymbol{a}=$$
$$\boldsymbol{e}_i\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x_i}\right)\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_i\left[\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\boldsymbol{e}_j)\right]\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{a}=$$
$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\omega})_i=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\omega}$$

证毕。

1.4　广义高斯定理与斯托克斯定理

1.4.1　广义高斯(Gauss)定理

如 A 为空间体积 τ 的边界曲面，物理量 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 φ 在 $\tau+A$ 上一阶偏导数连续，则有

$$\left.\begin{aligned}&\int_\tau\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{d}\tau=\oint_A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{d}A\\&\int_\tau\nabla\varphi\,\mathrm{d}\tau=\oint_A\boldsymbol{n}\times\varphi\,\mathrm{d}A\\&\int_\tau\nabla\times\boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{d}\tau=\oint_A\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{d}A\end{aligned}\right\}\qquad(1.25)$$

式(1.25)就是广义高斯定理，式中 $\boldsymbol{n}$ 为微元曲面 $\mathrm{d}A$ 外法线方向单位向量，上式还可推广用于将 $\boldsymbol{\alpha}$ 改为二阶张量，将 φ 改为向量的情况。

1.4.2　斯托克斯(Stokes)定理

如 l 为曲面 A 的边界，且为可缩曲线，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一阶偏导数连续，则有

$$\int_A\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}A=\oint_l\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad(1.26)$$

式(1.26)就是斯托克斯定理，式中 $\boldsymbol{n}$ 为微元曲面 $\mathrm{d}A$ 的法线方向，其指向与 l 方向符合右手螺旋法则。