

數學之書

The
Math
Book

時報出版

From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics

一本圖文並茂的數學百科、一本博古通今的數學歷史、一本趣味橫生的數學故事、一本條理分明的數學資料庫、關於數學世界裡最重要、最有趣的故事盡在其中。

作者——柯利弗德·皮寇弗 (Clifford A. Pickover)

譯者——陳以禮

審訂——洪萬生 (臺灣師範大學數學系退休教授)

推薦

于靖 (國立中央大學數學系教授)

李羅權 (國立交通大學數學系教授)

陳力俊 (國立中央大學數學系教授)

數學之書

The
Math
Book

作者 — 柯利弗德·皮寇弗（Clifford A. Pickover）

譯者 — 陳以禮

審訂 — 洪萬生

科學人文 ④④
數學之書

The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics

作者——柯利弗德·皮寇弗 (Clifford A. Pickover)
譯者——陳以禮
主編——李清瑞
責任編輯——李筱婷
美術設計——三人制創
執行企畫——鍾居明
董事長——孫思照
發行人——趙政岷
總經理——趙政岷
出版者——時報文化出版企業股份有限公司
一〇八〇三臺北市和平西路三段二四〇號四樓
發行專線——(〇二) 二三〇六六八四二
讀者服務專線——〇八〇〇二三一七〇五
(〇二) 二三〇四七一〇三
讀者服務傳真——(〇二) 二三〇四六八五八
郵撥——一九三四四七二四時報文化出版公司
信箱——臺北郵政七九~九九信箱
時報悅讀網——<http://www.readingtimes.com.tw>
電子郵件——history@readingtimes.com.tw
法律顧問——理律法律事務所 陳長文律師、李念祖律師
印刷——鴻嘉彩藝印刷股份有限公司
初版一刷——二〇一三年一月四日
初版七刷——二〇一三年十月八日
定價——新台幣五八〇元



◎行政院新聞局局版北市業字第八〇號
版權所有 翻印必究
(缺頁或破損的書，請寄回更換)

國家圖書館出版品預行編目資料

數學之書 / 柯利弗德·皮寇弗 (Clifford A. Pickover) 作；陳以禮譯。-- 初版。-- 臺北市：時報文化，2013.01
面：公分。-- (科學人文：44)
譯目：The math book: from Pythagoras to the 57th dimension.
250 milestones in the history of mathematics
ISBN 978-957-13-5699-0 (平裝)
1. 數學 2. 歷史
310.9 101024887

© 2009 by Clifford A. Pickover

Originally published in the U.S. by Sterling Publishing Co., Inc. under the title:

The Math Book

This edition has been published by arrangement with Sterling Publishing Co., Inc.,

387 Park Ave. South, New York, NY 10016, through Andrew Nurnberg Associates International Limited.

Complex Chinese translation © 2013 by CHINA TIMES PUBLISHING COMPANY

ALL RIGHTS RESERVED.

ISBN 978-957-13-5699-0

Printed in Taiwan

目次 |

簡介／數學之美與效用 007

本書的架構與目的 010

導讀 013

條目

約西元前一億五千萬年／螞蟻的里程表 014

約西元前三千萬年／靈長類算數 015

約西元前一百萬年／為質數而生的蟬 016

約西元前十萬年／結繩記事 017

約西元前一萬八千年／伊山戈骨骸 018

約西元前 3000 年／祕魯的奇譜 019

約西元前 3000 年／骰子 020

約西元前 2200 年／魔方陣 021

約西元前 1800 年／普林頓 322 號泥板 022

約西元前 1650 年／萊因德紙草文件 023

約西元前 1300 年／圈叉遊戲 024

約西元前 600 年／畢氏定理與三角形 025

西元前 548 年／圍棋 026

約西元前 530 年／畢達哥拉斯創立數學兄弟會 027

約西元前 445 年／季諾悖論 028

約西元前 440 年／月形求積 029

約西元前 350 年／柏拉圖正多面體 030

約西元前 350 年／亞里斯多德的《工具論》 031

約西元前 320 年／亞里斯多德滾輪悖論 032

西元前 300 年／歐幾里得《幾何原本》 033

約西元前 250 年／阿基米德：沙粒、群牛問題跟胃痛遊戲 034

約西元前 250 年／圓周率 π 035

約西元前 240 年／埃拉托斯特尼篩檢法 036

約西元前 240 年／阿基米德不完全正多面體 037

西元前 225 年／阿基米德螺線 038

約西元前 180 年／蔓葉線 039

約西元 150 年／托勒密的《天文學大成》 040

西元 250 年／戴奧芬特斯的《數論》 041

約西元 340 年／帕普斯六邊形定理 042

約西元 350 年／巴克沙里手稿 043

西元 415 年／希帕提婭之死 044

約西元 650 年／數字 0 045

約西元 800 年／阿爾琴的《砥礪年輕人的挑戰》 046

西元 830 年／阿爾·花拉子密的《代數》 047

西元 834 年／博羅密環 048

西元 850 年／《摩訶吠羅的算術書》 049

約西元 850 年／塔比親和數公式 050

約西元 953 年／印度數學璀璨的章節 051

西元 1070 年／奧瑪·海亞姆的《代數問題的論著》 052

約西元 1150 年／阿爾·薩馬瓦爾的《耀眼的代數》 053

約西元 1200 年／算盤 054

西元 1202 年／費波那契的《計算書》 055

西元 1256 年／西洋棋盤上的小麥 056

約西元 1350 年／發散的調和級數 057

約西元 1427 年／餘弦定律 058

西元 1478 年／《特雷維索算術》 059

約西元 1500 年／圓周率 π 的級數公式之發現 060

西元 1509 年／黃金比 061

西元 1518 年／《轉譯六書》 062

西元 1537 年／傾角螺線 063

西元 1545 年／卡丹諾的《大衛》 064

西元 1556 年／《簡明摘要》 065

西元 1569 年／麥卡托投影法 066

西元 1572 年／虛數 067

西元 1611 年／克卜勒猜想 068

西元 1614 年／對數 069

- 西元 1621 年／計算尺 070
西元 1636 年／費馬螺線 071
西元 1637 年／費馬最後定理 072
西元 1637 年／笛卡兒的《幾何學》 073
西元 1637 年／心臟線 074
西元 1638 年／對數螺線 075
西元 1639 年／射影幾何 076
西元 1641 年／托里切利的小號 077
西元 1654 年／巴斯卡三角形 078
西元 1657 年／奈爾類立方拋物線的長度 079
西元 1659 年／維維亞尼定理 080
約西元 1665 年／發現微積分 081
西元 1669 年／牛頓法 082
西元 1673 年／等時曲線問題 083
西元 1674 年／星形線 084
西元 1696 年／洛必達的《闡明曲線的無窮小分析》 085
西元 1702 年／繞地球一圈的彩帶 086
西元 1713 年／大數法則 087
西元 1727 年／歐拉數 e 088
西元 1730 年／斯特靈公式 089
西元 1733 年／常態分佈曲線 090
西元 1735 年／歐拉—馬歇羅尼常數 091
西元 1736 年／柯尼斯堡七橋問題 092
西元 1738 年／聖彼得堡悖論 093
西元 1742 年／哥德巴赫猜想 094
西元 1748 年／安聶希的《解析的研究》 095
西元 1751 年／歐拉多面體公式 096
西元 1751 年／歐拉多邊形分割問題 097
西元 1759 年／騎士的旅程 098
西元 1761 年／貝氏定理 099
西元 1769 年／富蘭克林的魔術方陣 100
西元 1774 年／最小曲面 101
西元 1777 年／布馮投針問題 102
西元 1779 年／三十六位軍官問題 103
約西元 1789 年／算額幾何 104
西元 1795 年／最小平方方法 105
西元 1796 年／正十七邊形作圖 106
西元 1797 年／代數基本定理 107
西元 1801 年／高斯的《算術研究》 108
西元 1801 年／三臂量角器 109
西元 1807 年／傅立葉級數 110
西元 1812 年／拉普拉斯的《機率分析論》 111
西元 1816 年／魯珀特王子的謎題 112
西元 1817 年／貝索函數 113
西元 1822 年／巴貝奇的計算機器 114
西元 1823 年／柯西的《無窮小分析教程概論》 115
西元 1827 年／重心微積分 116
西元 1829 年／非歐幾里得幾何 117
西元 1831 年／莫比烏斯函數 118
西元 1832 年／群論 119
西元 1834 年／鴿籠原理 120
西元 1843 年／四元數 121
西元 1844 年／超越數 122
西元 1844 年／卡塔蘭猜想 123
西元 1850 年／西爾維斯特的矩陣 124
西元 1852 年／四色定理 125
西元 1854 年／布爾代數 126
西元 1857 年／環遊世界遊戲 127
西元 1857 年／諧波圖 128
西元 1858 年／莫比烏斯帶 129
西元 1858 年／霍迪奇定理 130
西元 1859 年／黎曼假設 131
西元 1868 年／貝爾特拉米的擬球面 132
西元 1872 年／魏爾斯特拉斯函數 133
西元 1872 年／格羅斯的《九連環理論》 134
西元 1874 年／柯瓦列夫斯卡婭的博士學位 135
西元 1874 年／十五格數字推盤遊戲 136
西元 1874 年／康托爾的超限數 137
西元 1875 年／勒洛三角形 138
西元 1876 年／諧波分析儀 139
西元 1879 年／瑞提第一號收銀機 140
西元 1880 年／文氏圖 141
西元 1881 年／本福特定律 142
西元 1882 年／克萊因瓶 143

- 西元 1883 年／河內塔 144
- 西元 1884 年／《平面國》 145
- 西元 1888 年／超立方體 146
- 西元 1889 年／皮亞諾公理 147
- 西元 1890 年／皮亞諾曲線 148
- 西元 1891 年／壁紙圖群 149
- 西元 1893 年／西爾維斯特直線問題 150
- 西元 1896 年／質數定理的證明 151
- 西元 1899 年／皮克定理 152
- 西元 1899 年／莫雷角三分線定理 153
- 西元 1900 年／希爾伯特的二十三個問題 154
- 西元 1900 年／卡方 155
- 西元 1901 年／波以曲面 156
- 西元 1901 年／理髮師悖論 157
- 西元 1901 年／榮格定理 158
- 西元 1904 年／龐加萊猜想 159
- 西元 1904 年／科赫雪花 160
- 西元 1904 年／策梅洛的選擇公理 161
- 西元 1905 年／若爾當曲線定理 162
- 西元 1906 年／圖厄－摩斯數列 163
- 西元 1909 年／布勞威爾不動點定理 164
- 西元 1909 年／正規數 165
- 西元 1909 年／布爾夫人的《代數的哲學與趣味》 166
- 西元 1910 年～西元 1913 年／《數學原理》 167
- 西元 1912 年／毛球定理 168
- 西元 1913 年／無限猴子定理 169
- 西元 1916 年／畢伯巴赫猜想 170
- 西元 1916 年／強森定理 171
- 西元 1918 年／郝斯多夫維度 172
- 西元 1919 年／布朗常數 173
- 約西元 1920 年／天文數字「Googol」 174
- 西元 1920 年／安多的項鍊 175
- 西元 1921 年／諾特的《理想子環》 176
- 西元 1921 年／超空間迷航記 177
- 西元 1922 年／巨蛋穹頂 178
- 西元 1924 年／亞歷山大的角球 179
- 西元 1924 年／巴拿赫－塔斯基悖論 180
- 西元 1925 年／用正方形拼出的矩形 181
- 西元 1925 年／希爾伯特旅館悖論 182
- 西元 1926 年／門格海綿 183
- 西元 1927 年／微分分析機 184
- 西元 1928 年／雷姆斯理論 185
- 西元 1931 年／哥德爾定理 186
- 西元 1933 年／錢珀瑙恩數 187
- 西元 1935 年／布爾巴基：祕密協會 188
- 西元 1936 年／菲爾茲獎 189
- 西元 1936 年／圖靈機器 190
- 西元 1936 年／渥德堡鋪磚法 191
- 西元 1937 年／考拉茲猜想 192
- 西元 1938 年／福特圈 193
- 西元 1938 年／亂數產生器的誕生 194
- 西元 1939 年／生日悖論 195
- 約西元 1940 年／外接多邊形 196
- 西元 1942 年／六貫棋 197
- 西元 1945 年／豬頭滿江紅 198
- 西元 1946 年／ENIAC 199
- 西元 1946 年／馮紐曼平方取中隨機函數 200
- 西元 1947 年／格雷碼 201
- 西元 1948 年／資訊理論 202
- 西元 1948 年／科塔計算器 203
- 西元 1949 年／塞薩多面體 204
- 西元 1950 年／納許均衡 205
- 約西元 1950 年／海岸線悖論 206
- 西元 1950 年／囚犯的兩難 207
- 西元 1952 年／細胞自動機 208
- 西元 1957 年／賈德納的「數學遊戲」專欄 209
- 西元 1958 年／吉伯瑞斯猜想 210
- 西元 1958 年／球面翻轉 211
- 西元 1958 年／柏拉圖撞球檯 212
- 西元 1959 年／外邊界撞球檯 213
- 西元 1960 年／紐康伯悖論 214
- 西元 1960 年／謝爾賓斯基數 215
- 西元 1963 年／混沌理論與蝴蝶效應 216
- 西元 1963 年／烏拉姆螺線 217

- 西元 1963 年／無法證明的連續統假設 218
- 約西元 1965 年／超級橢圓蛋 219
- 西元 1965 年／模糊邏輯 220
- 西元 1966 年／瞬時瘋狂方塊遊戲 221
- 西元 1967 年／朗蘭茲綱領 222
- 西元 1967 年／豆芽遊戲 223
- 西元 1968 年／劇變理論 224
- 西元 1969 年／托卡斯基的暗房 225
- 西元 1970 年／高德納與珠璣妙算遊戲 226
- 西元 1971 年／群策群力的艾狄胥 227
- 西元 1972 年／HP-35：第一台口袋型工程計算機 228
- 西元 1973 年／潘洛斯鋪磚法 229
- 西元 1973 年／藝廊定理 230
- 西元 1974 年／魔術方塊 231
- 西元 1974 年／柴廷數 Ω 232
- 西元 1974 年／超現實數 233
- 西元 1974 年／博科繩結 234
- 西元 1975 年／碎形 235
- 西元 1975 年／費根堡常數 236
- 西元 1977 年／公鑰密碼學 237
- 西元 1977 年／西拉夕多面體 238
- 西元 1979 年／池田收束 239
- 西元 1979 年／連續三角螺旋 240
- 西元 1980 年／曼德博集合 241
- 西元 1981 年／怪獸群 242
- 西元 1982 年／球內三角形 243
- 西元 1984 年／瓊斯多項式 244
- 西元 1985 年／威克斯流形 245
- 西元 1985 年／安德里卡猜想 246
- 西元 1985 年／ABC 猜想 247
- 西元 1986 年／發聲數列 248
- 西元 1988 年／電腦套裝軟體 Mathematica 249
- 西元 1988 年／莫非定律詛咒下的繩結 250
- 西元 1989 年／蝶形線 251
- 西元 1996 年／整數數列線上大全 252
- 西元 1999 年／永恆難題 253
- 西元 1999 年／完美的魔術超立方體 254
- 西元 1999 年／巴蘭多悖論 255
- 西元 1999 年／破解極致多面體 256
- 西元 2001 年／床單問題 257
- 西元 2002 年／破解艾瓦里遊戲 258
- 西元 2002 年／NP 完備的俄羅斯方塊 259
- 西元 2005 年／《數字搜查線》 260
- 西元 2005 年／破解西洋跳棋 261
- 西元 2007 年／探索特殊 E8 李群的旅程 262
- 西元 2007 年／數理宇宙假說 263

數學之美與效用

慧黠的觀察者看過數學家所從事的工作後，大概會認為他們是一群狂熱流派奉獻者，宇宙的神祕鑰匙的追尋者。

——戴維斯（Philip Davis）與賀須（Reuben Hersh），

《數學經驗談》（*The Mathematical Experience*）

數學已經滲入每一個需要費盡心思的科學領域，並且在生物學、物理、化學、經濟、社會學跟工程等方面取得無法替代的角色。我們可以用數學說明夕陽色彩分佈的情況，也可以用來說明人類的大腦結構。數學幫助我們打造超音速飛機跟雲霄飛車，模擬地球天然資源流轉的方式，進入次原子的量子世界探索，甚至讓我們得以想像遙遠的銀河系。數學可以說是改變了我們看待宇宙的方式。

在本書中，我希望運用少量數學公式提供一點數學品味，而鼓勵讀者發揮想像力。對大多數讀者而言，這本書所談論的應該不只是能滿足好奇心卻缺乏實用價值的單元，根據美國教育部實際調查的結果顯示，能夠順利完成高中數學課程的學生升上大學後不論選讀哪一個科系，都能夠展現出比較優秀的學習能力。

數學的實用性讓我們可以建造太空船，探索所處宇宙的幾何結構。數字也可能是我們跟有智能的外星生物間所採用的第一種溝通手段。有些物理學家認為掌握更高空間維度和拓樸學（topology，探索形狀與彼此間相互關係的一門學問），或許有一天當現在這個宇宙處於在極熱或極冷的末日之際，我們就能逃出，在所有不同的時空環境下安身立命。

數學史上不乏許多人同步有重大發現的例子，就以這本書裡面的莫比烏斯帶（The Möbius Strip）為例。德國數學家莫比烏斯（August Möbius）和當時另一位德國數學家利斯廷（Johann Benedict Listing）同時在西元 1858 年各自發現莫比烏斯帶（一個只有單面，神奇的扭曲物體）。這種同步發現的現象就跟英國博學多聞的牛頓（Isaac Newton）與德國數學家萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz）各自同時發現微積分的例子相似。這些例子讓我不禁懷疑科學領域為何經常有不同人，在相同時間，獨立發現同一件事情的情況？其他例子還包括英國博物學家達爾文（Charles Darwin）和華萊士（Alfred Wallace）都在相同時間各別提出演化論的觀點，匈牙利數學家鮑耶（János Bolyai）和俄羅斯數學家羅巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky）似乎也是在同一時間各別提出雙曲幾何的想法。

最有可能解釋同步重大發現的理由，是因為人類在那些時間點對於即將誕生的發現，已經累積足夠的知識，這些想法自然也就瓜熟蒂落地被提出來；可能兩位科學家都受到當代其他研究人員同一篇先導研究論文的影响。另一種帶有神祕色彩的解釋，會從較深層的觀點說明這種巧合。奧地利生物學家卡梅納（Paul Kammerer）曾表示：「或許我們可以說，儘管打散、重組的過程在現實世界繁華的表面下與宇宙無垠的千變萬化中不斷重複發生，但是物以類聚的現象也會同時在這些過程中產生」；卡梅納把現實世界的重大事件比喻成海洋波濤的頂端，彼此間看起來各自孤立，毫無瓜葛，不過根據他充滿爭議性的理論，我們其實只看到上層的波浪，卻沒注意到海面下可能存在某種同步機制，詭譎地把世上各種重大事件串在一起，才顯現出這種一波又一波的風潮。

易法拉（Georges Ifrah）在《數目溯源》（*The Universal History of Numbers*）一書中談論馬雅數學時，

順便論及了這種同步情況：

我們因此又再一次地見證到，散居在廣大時空環境的下互不認識的人……也會有非常類似甚至是一模一樣想法。……有些例子的解釋：是因為他們接觸了另一群不一樣的人並受到對方的影響，……真正的有效解釋是因為前面提過的深層文化融合：智人（*Homo sapiens*）這種生物的智力具有共通性，把世界各個角落統整串連的潛力非常可觀。

古代的希臘人深深受到數目字的吸引。在這個不停變動世界的艱困年代，會不會只有數目字才是唯一恆常不變的？對於源自一門古希臘學派、畢達哥拉斯理念的追隨者而言，數目字是具體不變、和緩永恆的——比所有朋友更值得信賴，卻不像阿波羅或宙斯般讓人無法親近。

本書中有很多條目都跟整數有關，聰穎的數學家艾狄胥（Paul Erdős）醉心於數論——有關於整數課題——的研究，他經常能輕易使用整數提出問題，儘管問題的陳述很簡單，但是每一題卻都是出了名的難解。艾狄胥認為如果有任何數學問題提出後經過一個世紀依然無解的話，那一定是個跟數論有關的問題。

有很多宇宙萬物可以用整數表達之，譬如用整數描述菊花花瓣構成的方式、兔子的繁衍、行星的軌道、音樂的合弦，以及週期表元素間的關係。德國代數學家暨數論大師克羅內克（Leopold Kronecker）曾經說過：「只有整數來自於上帝，其他都是人造的。」這句話也暗示整數是一切數學的最主要根源。

自從畢達哥拉斯的年代以來，按照整數比例演奏出的音樂，就相當受到歡迎，更重要的是，在人類理解科學的演進過程中，整數也扮演著相關關鍵的角色，像是法國化學家拉瓦節（Antoine Lavoisier）就是依照整數比調配組成化合物的元素，顯示出原子存在的強烈證據。西元 1925 年，激態原子放射出一定整數比的光譜波長，也是當時發現原子結構的一項證據。幾乎按照整數比呈現的原子量，顯示原子核是由整數個數的相似核子（質子跟中子）所組成，與整數比的誤差則促成同位素（基本元素的變形體，擁有幾乎一樣的化學特性，只在中子數的個數上有所差異）的發現。

純同位素（pure isotope）原子量無法完全以整數比呈現的微小差異，確認了愛因斯坦（Albert Einstein）著名方程式 $E = mc^2$ 是成立的，也顯示出生產原子彈的可能。在原子物理領域隨處可見整數的存在。整數關係是組成數學最基本的一股勢力——或者引用高斯（Carl Friedrich Gauss）的說法：「數學是所有科學的女王——而數論則是數學中的天后。」

用數學描述宇宙這門學科成長迅速，但是，我們的思考方式跟語言表達能力卻還有待好好加強。我們一直發現或創造出新的數學，但是，我們還需要用更先進的思維才能加以理解。譬如最近這幾年已經有人針對數學史上幾個最著名問題提出證明，可是，他們的論證方式非常冗長又複雜，就連專家們也都沒辦法確定這些論證是否正確。數學家哈里斯（Thomas Hales）將一篇幾何學論文投稿到《數學會誌》（*Annals of Mathematics*）期刊後，整整花了五年的時間等待專家審查意見——專家們最後的結論是找不到這篇論文哪裡有錯，建議該期刊加以發表，可是必須加上免責聲明——他們無法肯定這個證明是對的！另一個例子來自數學家德福林（Keith Devlin），他在《紐約時報》（*New York Times*）刊出的文章中承認：「數學已經進展到一個相當抽象的程度，甚至就連專家有時都無法理解最新的研究課題到底在講什麼。」如果就連專家都有這樣的困擾，想要把這些資訊傳遞給普羅大眾當然更是困難重重，我們只好竭盡所能，盡力而為。雖然數學家們在建構理論、執行運算這些方面很在行，不過他們在融會貫通、解說傳達先進觀念的能力恐怕還是有所不足。

在此引用物理作為類比。當海森堡（Werner Heisenberg）擔心一般人可能永遠也無法真正理解原子是怎麼一回事時，波耳（Niels Bohr）顯得相對樂觀。西元 1920 年代，波耳在一封回給海森堡的信中提到：「我認為這是有可能的，但是要配合我們重新認識『理解』這個詞彙真正意涵的過程。」我們現在使用電腦進行研究的真正原因，是因為我們直觀能力有限，透過電腦實驗實際上已經讓數學家們取得更進一步的發現與洞見，這是在電腦普及以前作夢也想不到的結果。電腦及其繪圖功能，讓數學家們早在有辦法正式完成證明之前，就先看到結果，也開啟了一項全新的數學研究領域，就連試算表這種簡單的電腦工具，也能讓現代數學家擁有高斯、歐拉（Leonhard Euler）、牛頓等人渴望的數學功力。隨便舉個例子，西元 1990 年代末由貝利（David Bailey）跟佛格森（Helaman Ferguson）兩人設計的電腦程式用一條新公式把圓周率 π 、 $\log 5$ 跟其他兩個常數串在一塊，如同克拉瑞克（Erica Klarreich）在《科學新知》（*Science News*）上的報導，只要電腦能把公式先找出來，事後完成證明的工作就簡單多了，畢竟在完成數學證明的過程中，簡單地知道答案這項工作，通常也是最難以跨越的障礙。

我們有時候會用數學理論預測某些要經過好幾年後才能確認的現象，譬如以物理學家麥斯威爾（James Clerk Maxwell）命名的麥斯威爾方程式（Maxwell equation）預測了無線電波的存在；愛因斯坦場論方程式（fields equation）指出重力可以折彎光線及宇宙擴張論。物理學家狄拉克（Paul Dirac）曾說過，今天研究的數學課題可以讓我們偷偷瞄見未來的物理理論，事實上，狄拉克的方程式預測了之後才陸續發現的反物質（antimatter）存在。數學家羅巴切夫斯基也說過類似的話：「就算再抽象的數學分支，也總有一天會運用在詮釋現實世界的物理現象上。」

在這本書裡，讀者們將會碰上許多被認為掌握宇宙之鑰、相當有趣的幾何學家。伽利略（Galileo Galilei）曾說過：「大自然的鬼斧神工不外乎是數學符號寫成的篇章。」克卜勒（Johannes Kepler）曾使用正十二面體之類的柏拉圖正多面體，建構太陽系的模型。西元 1960 年代的物理學家維格納（Eugene Wigner）對於「數學在自然科學中具有超乎常理的效用」感到印象深刻；像是 E_8 這種大李群（large Lie Group）——請參照條目：探索特殊 E_8 李群的旅程（西元 2007 年）——則可能在某一天協助我們創造一統物理學的終極理論。西元 2007 年，瑞典裔的美國宇宙學家泰格馬克（Max Tegmark）發表一篇相當受到歡迎、談論數理宇宙假說的科學文章，指出我們看到的物理實體其實都是數學結構；也就是說，我們不只可以用數學描述所處的宇宙，甚至可以說——宇宙本身就是數學。

本書架構與目的

物理所踏出重要的每一步，都需要而且刺激數學新工具與新觀念的引進，我們現在對物理定律的精確性與普適性之理解，只有在它們以數學名詞表示時才變得可能。

——阿帝雅爵士（Sir Michael Atiyah），〈拉動弦〉，《自然》期刊

數學家們有一項共同的特徵，那就是對於一以貫之的熱情——迫切想要從第一原理開始說明整個研究內容的一種驅動力，結果將導致數學文本的讀者們在有絲毫收穫之前，必須經常在不同頁面間找尋各種背景資料。為了避免相同的問題發生，本書每一則條目都很精簡，最多只有幾段篇幅的長度，省去分門別類的過多措辭，希望這種體例能讓讀者們很快進入討論主題。想要知道什麼是無限大？請參閱康托爾的超限數（西元 1874 年）或希爾伯特旅館悖論（西元 1925 年）兩則條目，相信讀者們很快就可以有些基本概念。對於在納粹集中營由難民開發完成、第一台成功商業化的口袋型機械計算器有興趣嗎？請參閱科塔計算器（西元 1948 年）此一條目。

一個聽起來很好玩的定理可能會讓科學家在未來某一天，發展出電子設備所需的奈米線路，好奇嗎？是的話，請翻閱毛球定理（西元 1912 年）這則條目。納粹為何要逼迫波蘭數學學會的會長用自己的血液餵養虱子？為什麼第一位女性數學家會被謀殺？我們真的能把一個球體的內、外面翻轉嗎？是誰享有「數字教宗」的名號？人類什麼時候開始結繩記事？為什麼我們不再使用羅馬數字系統？誰是數學史上第一位叫得出名號的人？單面的曲面可能存在嗎？包含上述這些以及其他可以促進思考的問題，將會在後續篇章中一一呈現。

我所採用的進路當然也有其缺點，我沒辦法在短短幾段內深入討論某個主題，不過我會在「註腳及延伸閱讀」那邊，提供深入閱讀的建議清單。除了提供最原始的資料來源外，我也會載明一些值得參考的附加資料來源；相較於年份久遠的原始資料，讀者們應該更容易頻繁查閱這些附加的資料來源。有興趣深入研究的讀者，不妨將這些參考資料當成有用的立足點。

我寫本書的目的，是把重要的數學觀念跟大師級人物濃縮成精簡的摘要，讓每則條目都簡短到能在幾分鐘內消化吸收，以饗廣大的閱聽大眾。書中大多數條目，其實也是我個人相當感興趣的內容，可惜的是，為了避免這本書最終變得長篇贅牘，並非每一項偉大的數學里程碑，都收錄在這本書裡面。除此之外，為了在短篇幅內交代完這些數學大事記，我也不得不忽略很多重要的數學軼事。儘管如此，相信我已經把深具歷史意義，對數學、社會及我們思考方式有重大影響的主要項目都蒐羅在內了。有些條目跟日常生活息息相關，諸如計算尺跟其他各種計算工具、巨蛋穹頂跟 0 的發明等條目皆屬之，但是我偶爾也會放進一些較輕鬆、但是一樣具有意義的事件，像是風靡一時的魔術方塊或是解決床單對摺問題等條目。分別剪輯的資訊會在書中重複出現，因此，每一則條目都可以單獨閱讀。偶爾用粗體字標示的項目是用來提醒讀者相關條目的存在，至於在每則條目下方「參照條目」的部分，則像是編織一張交互連結的蛛網一樣，讓讀者可以穿越本書的時空架構，進行一場有趣的發現之旅。

本書其實也反映出我的智識有所侷限之處。儘管我盡力涉獵各種科學與數學的專業知識，但是，要在每個領域知無不詳畢竟還是太困難了，因此，這本書的內容清楚顯示出我個人的偏好、強項與弱點。我必須為書中主要條目的選擇負起所有責任，當然也包括書中錯誤與不周延的部分。這本書並不是一篇大部頭或學術性的論文，相反地，為科學及數學相關科系的學生或是對這些學科有興趣的一般

民眾帶來閱讀的樂趣，才是本書的主要目的。任何來自讀者的回饋意見與改善建議，我都樂於接受，並且考慮把這些寶貴的觀點轉化成下一階段的工作計畫，紮紮實實地精益求精。

這本書根據數學發展的里程碑或重要發現誕生的年份，依照發生時間先後順序編排。有些發展階段的里程碑，在文獻上所顯示的時間點，會有些微的差異，因為有些是以作品的出版日期，做為重要發現問世的日子，有些則是直接以數學原理真正萌芽的那一天為準，不考慮相關作品發行年份可能會延遲一年或更長時間的現象。碰到這種問題而我又無法確認重大發現確切誕生的時間點時，通常我會選擇以出版日期為準。

若有些條目是集眾人之力而有所成時，該如何判斷相關的時間點，也會是個問題。通常我會選擇以最早的日期為準，但有時候我會在詢問過工作同仁後，選擇某些重要觀念後來開始風行的時間點為準。譬如以格雷碼為例，這種編碼方式是以西元 1950、1960 年代任職於貝爾實驗室（Bell Telephone Laboratory）的物理學家格雷（Frank Gray）為名，類似電視訊號傳送的數位通訊，經常使用格雷碼進行錯誤偵測，並減少雜訊干擾。格雷碼之所以能在那段期間大量普及，部分原因與格雷在西元 1947 年取得相關專利認證，以及現代通訊在當時越來越發達有關。因此，儘管格雷碼的概念，其實可以追溯回最初提出這個構想的法國電報專家博多（Émile Baudot）身上，歸類在一個更早的時間點，但這則條目在本書中的時間劃分仍舊落在西元 1947 年。總而言之，我會盡量在每一則條目的解說中，讓讀者們感受到這種時間上的跨距。

學術界有時會爭論重大發現的功勞，是否該歸功於傳統認定的單一個人身上，譬如德里（Heinrich Dörrie）曾指出有四位學者不同意某一版的阿基米德「群牛問題」真的出自阿基米德之手，不過，他也指出另外四位學者認為這應該就是阿基米德的傑作。此外，學界對於誰才是亞里斯多德滾輪悖論的真正作者，也還有所爭論。

讀者們可能會注意到有相當數量的里程碑，是最近數十年內的成就。隨便舉個例子，研究人員終於在西元 2007 年「破解」西洋跳棋的玄機，證明只要兩位玩家都不犯錯的話，這個遊戲一定會以平手局面作收。如同先前所提過的，數學領域近期快速成長的一部分原因，在於使用電腦做為實驗數學的工具，像西洋跳棋的分析工作其實早在西元 1989 年，就動用了數十台電腦才一起算出所有可能的棋路——這個遊戲總共有大約 5×10^{20} 種走法。

有時候，我會在條目內容中引用科學文章報導或知名研究人員的說詞，但是，為了力求內容精簡，我並未將引述的資料來源或是原作者的文獻標題，一併寫進條目內容中。在此，先懇求各位讀者能夠體諒這種刻意簡化的安排。

其實就連定理的名稱也都暗藏玄機，譬如數學家德福林（Keith Devlin）於西元 2005 年替美國數學協會（Mathematical Association of America）寫了一則專欄指出：

大多數數學家用一生的時間證明數學定理，能夠在證明過程中將自己名字跟定理名稱連在一起的例子少之又少，如同歐拉、高斯、費馬等人都證明了上百條定理，其中還有不少的內容非常重要，但是以這三位數學家命名的定理，卻只佔了其中一小部分。有時候，定理冠名的原則也大有問題，最有名的一個例子，大概就是我們幾乎可以確定費馬並沒能完成證明的「費馬最後定理」。這個定理其實是另有其人在費馬過世後，才冠上這個名稱，只因為他從這位法國數學家留在書本頁緣上的潦草字跡，直接推測費馬已經知道如何證明的方法。此外，畢氏定理其實早在畢達哥拉斯誕生之前就已經有其他人提出相同的概念了。

最後別忘了，是數學上的新發現才讓我們有探索真相本質的框架，科學家們也必須透過數學工具，預測我們所處的宇宙。換句話說，這本書裡面的重大發現，不啻也是人類歷史上最偉大的成就。

剛接觸這本書的時候，可能會覺得這是一本充滿各自獨立概念的長篇目錄，每一則條目間出現的人物似乎也沒多大關連，但是，隨著讀者們越來越深入本書內容後，應該就會開始發現這些事物間綿密的關係。這其實並不意外，科學家跟數學家最終的目的，都是設法揣摩萬物之間的互動模式，用有組織的原理了解各項事實之間的相互關係，再透過定理演繹出人類全新的思考模式，而不是單純地在一堆事實中以建立公式為滿足。對我而言，數學能夠在我們心靈的本質上，在思路的極限處，在浩瀚宇宙中所處地位，開創出永恆的奇景。

我們的大腦經過長期演化後，能夠讓我們躲避非洲大草原上的獅子，卻還無法讓我們穿透覆蓋在真相上那數不盡的面紗。我們需要數學、科學、電腦跟更進化的大腦，甚至還需要文學、藝術跟詩詞的幫助，才能揭開這一層又一層的面紗，看見永恆的真相。對於那些已經打算從頭到尾踏上閱讀《數學之書》這趟旅程的讀者們，祝福你們能夠從各條目的關連中，以敬畏之心看待各種觀點的演變，順利航向那廣闊無邊的想像之洋。

導讀

洪萬生／台灣師範大學數學系退休教授

這是一本類似百科全書的數學普及讀物。全書共有 250 個數學發展之里程碑條目，作者按照年代編寫，試圖勾勒人類數學發展的整體風貌。同時，作者在各個條目之後，納入相關的參照條目（都本書所包含），方便讀者交叉閱讀與參引。還有，凡是條目涉及數學家等等之貢獻者，都清楚表彰姓名於條目之下，冀收見賢思齊之效！

就條目的規劃來說，除了純數學、（傳統）應用數學領域與計算機科學之外，本書還納入具有意義深長的生物數學、遊戲背景的謎題，以及一般讀者深感興趣的悖論。當然，從人類文化關懷的角度切入，作者也非常努力全面關照各個種族在歷史長河中，所曾經創造或參與的數學知識活動。儘管力有未逮，譬如他對中國與日本算學發展的說明，就顯得心有餘而力不足，但是，他的用心還是值得肯定。另一方面，作者為 1900 年之後的數學保留了近半的篇幅，則充分反映二十世紀數學的飛躍發展，也見證了計算機如何介入數學研究的各個層面。

就書寫的敘事來說，由於作者並非數學本科畢業，以致於他在描述近現代的數學專業知識時，手法難免比較生澀，而這一「不足」在數學史脈絡的適當烘托下，有時候反倒顯得樸拙可以親近。至於作者對於數學與數學史之理解，或許主要得自於他自身的博雅閱讀經驗，於是，他在某些脈絡中，依賴少數幾位科普作家的觀點或評論，應該也是情有可原。

有關本書之閱讀與參考使用，我要特別針對中學數學教師與學生，提出一些建議。對教師來說，本書條目有益於教學的內容，可以粗略分為兩大類：(1) 生活經驗中的趣味數學；(2) 歷史文化（含人類學面向）中的數學。前者主要源自人類的熱愛遊戲謎題的好奇心，後者則是基於數學的美感與效用之雙重動機。當教師有意將本書某些素材引進課堂，並藉以分享數學知識活動的趣味時，則不妨將它們包裝成為一個遊戲，讓抗拒學習的學生無法自外於此一活動。譬如說，本書 1702 年條目〈繞地求一圈的彩帶〉，十分簡單，人人都可以參與討論，但結果卻是大大地令人感到不可思議的謎題。

另一方面，教師也可利用本書條目，來組織一個教學單元，比如說初等代數發展的輪廓，讓學生在不斷演練求解方程式之餘，也能多少領會代數認知與方法演化的趣味與意義。針對此一主題，我推薦的條目有如下列：〈萊因德紙草文件〉、〈戴奧芬特斯的《數論》〉、〈數字 0〉、〈阿爾·花拉子密的《代數》〉、〈摩訶吠羅的算術書〉、〈印度數學璀璨的章節〉、〈奧瑪·海亞姆的《代數問題的論著》〉、〈阿爾·薩馬瓦爾的《耀眼的代數》〉、〈費波那契的《計算書》〉、〈特維索算術〉、〈卡丹諾的《大術》〉、〈簡明摘要〉、〈虛數〉以及〈笛卡兒的《幾何學》〉等等。上述這些條目的內容已經相當豐富，足以說明西方代數發展之大概，以及三、四次方程解法之意義。當然，如能補上十三世紀中國的天元術，乃至於十七世紀日本的點竄術與旁書法這些東方代數進路，那麼，我們對於代數思維的演化，就可以掌握全面的結構了。

總之，這是一本非數學專家所寫的相當大部頭的數學普及讀物。作者的學術專長在於生物物理與生物化學，不過，他顯然非常聰明幹練，而且求知若渴，因而可以成功介入一些與數學有關的謎題之研究。此外，由於他擁有遠較於其他科學作家更加豐富的寫作經驗（以每年出版一版書為準），因此，本書敘事多於論證，既凸顯了它的文類（科普）定位，也見證了作者的通識素養。至於有關本書作者的有些史識的「一家之言」，我們就不必過度在意了。

螞蟻的里程表

螞蟻是白堊紀中葉——距今約一億五千萬年前——由胡螞蜂（vespoid wasp）演化而成的社會性昆蟲，直到距今大約一億年前、開花植物大量繁衍之後，螞蟻才開始演變成各式各樣不同的種類。

撒哈拉沙漠螞（*Cataglyphis fortis*，長腳沙漠螞蟻）經常長途跋涉在廣袤、沒有地標指引的沙漠地帶裡尋找食物，但這些螞蟻卻能夠採取直線前進的方式回到巢穴，而不是一步步回溯離開巢穴的路徑。牠們不僅會利用晴朗的陽光判斷巢穴方位，牠們甚至看似隨身攜帶內嵌式「計步器」用以測量精確距離。一隻螞蟻最遠可以離巢漫遊 160 呎（約 50 公尺）直到發現其他昆蟲屍體為止，隨後牠會支解食物並直線回到入口直徑通常小於一公釐的巢穴中。

一組由德國及瑞士人組成的研究團隊由調整螞蟻腳的長度，讓牠們步伐變長或變短，進而發現這些螞蟻透過「計算」步數的方式判斷距離。當螞蟻抵達食物所在地時，研究人員替一部分螞蟻加裝支架讓腳變長，並把另一部分螞蟻的腳截去一小段，隨後就讓這些螞蟻開始回程，結果加裝支架的螞蟻會走過頭，被輕微截肢的螞蟻則還要再多走幾步才會抵達洞口。另一方面，如果讓這些被加工過的螞蟻重新從螞蟻窩外出找尋食物的話，牠們又通通能夠測量出正確的距離，顯示出步伐長短所扮演的關鍵因素。除此之外，螞蟻腦海中高度精密的電腦，顯然可以把牠漫遊的路徑進行水平（量化）投影，所以，就算沙漠的地貌在旅程中變成一座小山丘或是窪谷時，也不會讓螞蟻們找不到回家的路。



撒哈拉沙漠螞似乎隨身攜帶「計步器」用以測量精確距離。被黏上支架的螞蟻（如圖中紅色部分）會爬太遠以致過家門而不入，代表著螞蟻步伐寬度是測定距離的關鍵因素。

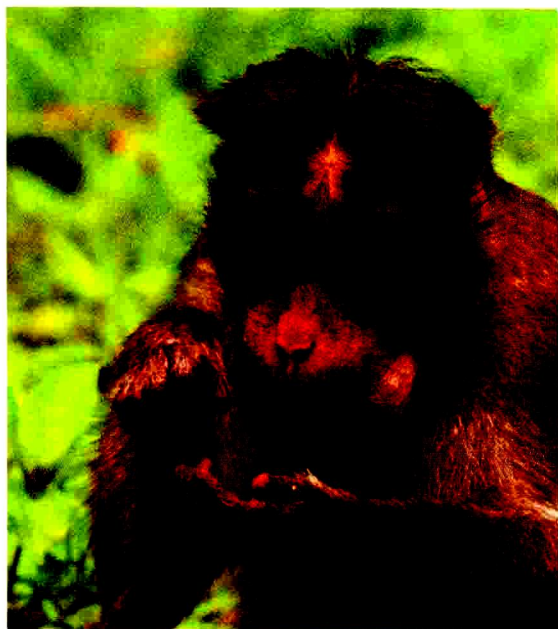
約西元前三千萬年

靈長類算數

距今約六千萬年前，一種小型、長得像狐猴（lemur）的靈長類動物開始在世界各地繁衍，演化到距今約三千萬年前，則開始有了類似猿猴的特徵。這種生物會算數嗎？雖然對於動物行為科學家而言，該如何判定動物會算數，是個高度爭議的課題，但仍有許多專家學者同意動物的確帶有一些數字概念，譬如卡穆斯（H. Kalmus）就在《自然》期刊上，發表一篇名為〈動物也懂數學〉（Animals as Mathematicians）的文章，上面寫著：

松鼠、鸚鵡之類的動物可以經由訓練學會算數，這一點至今已經較無爭議了，……很多報告顯示包括松鼠、老鼠，以及能協助傳授花粉的昆蟲，都具備算數能力。在這些動物當中，有些可以區別數字或是以圖案示意的類似模式，有些可以經由訓練分辨數字或是複誦出相同的數列，甚至有些動物可以經由訓練敲打出以圖案符號（以小圓點表示）所表示的數字……，就因為牠們既無法說出，也無法用書寫方式表示數字，所以，還有很多人不同意承認動物也懂數學。

老鼠經由正確辨識數字以交換獎品，展現牠們的「算數能力」，黑猩猩可以根據箱子內的香蕉數量，在電腦上輸入相對應的正確數字。日本京都大學靈長類研究中心的松澤哲郎（Tetsuro Matsuzawa），就是藉由教導黑猩猩根據螢幕上的物品數量，輸入相對應正確數字的作法，讓牠們學會認識 1～6 這幾個數字。



另一位美國亞特蘭大喬治亞州立大學的研究人員巴倫（Michael Beran），則是教導黑猩猩使用電腦跟搖桿。牠們會先在螢幕上看到一個數字跟幾張圓點圖，接著會要求牠們挑出與數字相對應的圓點圖，有一隻黑猩猩可以認得 1～7 這幾個數字，另一隻則可以從 1 算到 6。時隔三年後，再讓這兩隻黑猩猩受測時，牠們都還是一樣具有算數能力，只不過犯錯的機率也多了一倍。

靈長類動物似乎具備一定程度的數字概念，較高等靈長類可以學會在看到螢幕上出現數量不等的物品時，輸入相對應的正確數字，進而認識 1～6 這幾個數字。

參照 條目

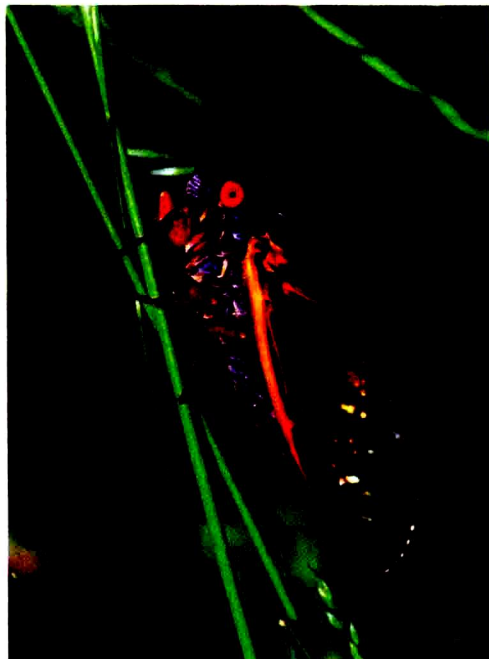
螞蟻的里程碑（約西元前一億五千萬年）、伊山戈骨骸（約西元前一萬八千年）

為質數而生的蟬

蟬是在大約一百八十萬年前、當覆蓋北美大陸的冰河消退後，於更新世時期，演化而成的有翅昆蟲，其中有一種叫做週期蟬（*Magicada*）的品種，會在地底度過生命中絕大多數的時間，靠吸吮樹根的汁液為生，隨後會以很快的速度經歷成長、交配及死亡的過程。這種生物有一種令人吃驚的特性：牠們變成成蟲的時間，通常會跟 13 或 17 這樣的質數年份同步（質數就是 11、13 或 17 這類只能被 1 跟本身兩個數字整除的整數）。當在地底度過 13 或 17 年後，這些對時間週期有感應的週期蟬，會在那年春天一起挖掘一條通往地面的通道，此時一英畝的面積裡大概會有一百五十萬隻以上的成蟬。這些週期蟬就是採取以量制勝的方式，面對鳥類這樣的掠食天敵，只要鳥類沒辦法把牠們一次全部吃光，剩下的週期蟬就能存活下去。

有些學者推測這種對應質數的生命週期，是為了避免被壽命較短的掠食者及寄生蟲吞嚥、增加成蟬存活率的演化成果，就好比以 12 年的生命週期為例，則所有壽命介於 2、3、4、6 年的掠食者都能更輕易地把蟬吞進五臟廟裡。德國多特蒙德馬克斯普朗克研究所分子生理學家馬庫斯（Mario Markus）及其研究團隊，發現這種質數化的生命週期，可以從掠食者與獵物間互動演化的數學模型中自然地得到解釋；他們先隨機設定生命週期年份不等的成蟬構成母體，經過電腦模擬一段時間的演變後，幾乎所有實驗結果，都會導出這種穩定質數化生命週期的現象。

這個研究還處於初步發展階段，當然還有很多可被質疑之處，譬如說，為什麼恰好是 13 跟 17 這兩個質數？到底又是哪些掠食者跟寄生蟲促成蟬演化出這樣的生命週期？而另外一個仍舊無解的謎題則是——在全球 1,500 多種分類中，為什麼只有週期蟬這樣少數的品種，才具備質數化生命週期的特性？



有些蟬會展現出令人吃驚的特性：牠們集體探出土壤的時間通常都跟 13 和 17 這樣的質數年同步，此時大概會有一百五十萬隻以上的成蟬在短時間內同時出現在一英畝的土地上。

參照
條目

螞蟻的里程碑（約西元前一億五千萬年）、伊山戈骨骸（約西元前一萬八千年）、埃拉托斯特尼篩檢法（西元前 240 年）、哥德巴赫猜想（西元 1742 年）、正十七邊形作圖（西元 1796 年）、高斯的《算術研究》（西元 1801 年）、質數定理的證明（西元 1896 年）、布朗常數（西元 1919 年）、吉伯瑞斯猜想（西元 1958 年）、謝爾賓斯基數（西元 1960 年）、烏拉姆螺旋（西元 1963 年）、群策群力的艾狄胥（西元 1971 年）及安德里卡猜想（西元 1985 年）