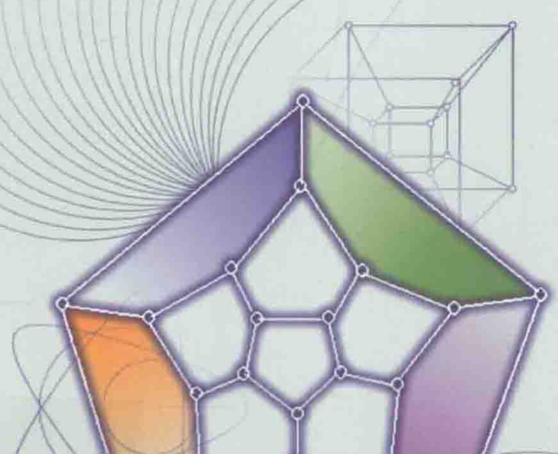
离散数学
内容提要与习题解析

刘国荣　李　文　陈建明

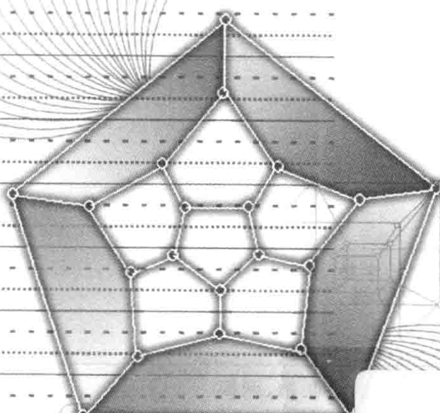


西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

离散数学

内容提要与习题解析

刘国荣　李　文　陈建明



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是与《离散数学》(第3版)(西安交通大学出版社,2012)配套的教学指导用书。每章包括内容提要、学习要求、习题与解答提示、习题详解四部分。“内容提要”总结了每章的主要定义、定理、公式、算法和重要的结论;“学习要求”给出了学习者在每章节应掌握的概念、结论、方法;“习题与解答提示”给出了习题中涉及的概念、定理、算法、证明方法和思路,对其中的典型习题,给出了多种解题思路或构造方法;“习题详解”给出了习题的详细解答。解答的习题共265道,涵盖了数理逻辑、集合论、代数系统、图论等离散数学模块的基本内容和典型的解题方法。

本书既可以作为主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的读者在解题能力和技巧训练方面提供有益的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学内容提要与习题解析/刘国荣,李文,陈建明编著.
—西安:西安交通大学出版社,2013.12
ISBN 978-7-5605-5195-1

Ⅰ.离…　Ⅱ.①刘…②李…③陈…　Ⅲ.①离散数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第079848号

书　　名	离散数学内容提要与习题解析
编　　者	刘国荣　李　文　陈建明
责任编辑	刘雅洁　叶　涛
出版发行	西安交通大学出版社 (西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址	http://www.xjtupress.com
电　　话	(029)82668357　82667874(发行中心) (029)82668315　82669096(总编办)
传　　真	(029)82668280
印　　刷	陕西宝石兰印务有限责任公司
开　　本	727mm×960mm　1/16　**印张**　22.5　**字数**　419千字
版次印次	2014年1月第1版　2014年1月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5605-5195-1/O·425
定　　价	35.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

前　言

众所周知，离散数学是计算机学科和软件工程学科的基础，离散数学课程是计算机专业和软件工程专业重要的专业基础课程，其教材的编写对于该门课程而言有着极其重要的意义。自1991年西安交通大学出版社首次出版《离散数学》教材至今已有二十多年，目前已出版了《离散数学》(第3版)。二十几年来承蒙广大教师和学生的抬爱，该教材得到了广泛的使用。但是，在使用教材的过程中广大读者一直强烈要求我们编写出版与该教材配套的习题解答。为了回报读者，方便教师的教学和学生的学习，我们编写了《离散数学内容提要与习题解析》。

本书与西安交通大学出版社出版的《离散数学》(第3版)相配套。书中针对数理逻辑、集合论、代数系统和图论四个部分的内容，首先给出了相应的概念和定理，然后介绍在概念驱动下的各种解题方法，为学习如何解题做好铺垫。书中对于《离散数学》(第3版)教材中的每道习题不仅给出解题思路而且给出详尽的解答过程。为了使学生开拓思路、举一反三、掌握更多的解题方法，有些题目给出了多种解法。本书适合于计算机专业和软件工程专业的教师和学生使用，同时也适合自学离散数学的读者使用。我们希望本书的出版能够为学生更好地掌握离散数学的内容有所帮助。

本书由刘国荣提供全部习题解答，李文给出知识要点和习题提示，陈建明对全书做了仔细的核查。由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵意见和建议。

编　者

2013年5月

目 录

第 1 章 命题演算

一、内容提要

1. 命题

命题是可辨真假的陈述语句。也就是说,每给出一个命题,就要求你作出一次判断。所以,在形式逻辑中,命题有时也称为判断。命题是命题逻辑推理的基本要素。

2. 简单命题

简单命题是不包含其他命题作为组成部分的一种命题。简单命题在命题逻辑中不可再分解。简单命题是命题逻辑推理的最小单位。

3. 复合命题

复合命题是包含其他命题作为组成部分,由其他命题组成的命题。

4. 支命题

支命题是组成复合命题的各个命题。

5. 联结词

将支命题联结起来构成复合命题的词项称为联结词。即一个复合命题由支命题以及联结它们的联结词构成。复合命题的真假依赖于构成它的各支命题的真假以及所用的联结词的种类。

6. 命题函数

含有未知因素的具有命题形式的陈述语句。命题函数不是命题,不能确定真假。

7. 真值联结词

在命题逻辑中所使用的、意义比较严格的联结词称为真值联结词或命题联

结词。

8. 命题的形式化

使用数学符号来表示一个命题中的简单命题和真值联结词，从而将命题表示成一个公式(符号串)的过程，我们称作命题的形式化(或命题的符号化)。

9. 真值函项

一个联结词，只要给出自变项们的真值，就能够推断出由此联结词构成的整个复合命题的真值，具有这种特性的联结词称为真值函项算子。由真值函项算子构成的复合命题称为真值函项。

五大真值联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$均是真值函项算子；由它们构成的复合命题都是真值函项。

10. 初始符号

命题变项：$P,Q,R,\cdots$(不够加下标)；

真值联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

11. 形成规则：

FR1. 单独一个命题变项是公式(原子)；

FR2. 如果 α 是公式，则 $\neg\alpha$ 也是公式；

FR3. 如果 α,β 都是公式，则 $\beta*\alpha$ 也是公式；

注：这里*为 $\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；原子为原子公式。

12. 合式公式

有限多次应用上述 FR1 ~FR3 规则所构成的有限符号串称为合式公式(简称公式)。

13. 指派

给公式所涉及到的所有命题变项(原子公式)的每一个变元一个真值的过程称为一个指派。

设公式 α 所含的全部命题变项为：$P_1,P_2,\cdots,P_n$，则公式 α 称为一个 n 元命题公式，并记 α 为 $\alpha(P_1,P_2,\cdots,P_n)$。

成真指派：使 $\alpha(\pi)=T$ 的赋值 π 称为公式 α 的一个成真指派。

成假指派：使 $\alpha(\pi)=T$ 的赋值 π 称为公式 α 的一个成假指派。

14. 真值表

将一公式在所有指派下形成真值的过程排列起来形成一张表，这张表就称为真值表。

15. 可满足性

公式 α 是可满足的当且仅当至少存在着 α 的一个成真指派 π。

16. 不可满足性

公式 α 是不可满足的当且仅当每一个指派 π 都是它的成假指派。

不可满足的公式 α 记为 Unsatα 或 Insatα。

17. 有效性

公式 α 是有效的当且仅当每一个指派 π 都是它的成真指派。

有效的公式 α 记为 $\Rightarrow\alpha$。

18. 逻辑蕴涵关系

称公式 β 与公式 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 有逻辑蕴涵关系，或者称公式 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 逻辑蕴涵公式 β，记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\Rightarrow\beta$。当且仅当对于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 β 的合成变项组的任一指派 π，均有：如果 π 同时是公式 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的成真指派，则 π 也是公式 β 的成真指派。即如果 $\alpha_1(\pi)=t,\alpha_2(\pi)=t,\cdots,\alpha_n(\pi)=t$，则 $\beta(\pi)=t$。其中公式 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为前提，公式 β 称为结论。

19. 定理：以下三条等价

(1) $\alpha\Rightarrow\beta$　　(α 逻辑蕴涵 β)

(2) $\Rightarrow\alpha\rightarrow\beta$　　($\alpha\rightarrow\beta$ 是有效的)

(3) Insat$(\alpha\wedge\neg\beta)$　　($\alpha\wedge\neg\beta$ 是不可满足的)

20. 定理：以下五条等价

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\Rightarrow\beta$;

(2) $\Rightarrow\alpha_1\rightarrow(\alpha_2\rightarrow\cdots\rightarrow(\alpha_{n-1}\rightarrow(\alpha_n\rightarrow\beta))\cdots)$;

(3) $\Rightarrow\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n\rightarrow\beta$;

(4) $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n\Rightarrow\beta$;

(5) Insat$(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n\wedge\neg\beta)$。

21. 定理：基本逻辑蕴涵式

(1) $P\wedge Q\Rightarrow P,P\wedge Q\Rightarrow Q$　　(合取分析式)

(2) $P\Rightarrow P\vee Q,Q\Rightarrow P\vee Q$　　(析取构成式)

(3) $P,P\rightarrow Q\Rightarrow Q$　　(充足理由律，假言推理、肯定(分离)前件式)

(4) $\neg Q,P\rightarrow Q\Rightarrow\neg P$　　(假言推理、否定(拒绝)后件式)

(5) $\neg Q,\neg P\rightarrow Q\Rightarrow P$　　(换质位律、否定(拒绝)后件式)

(6) $\neg P,P\vee Q\Rightarrow Q$　　(相容选言推理、否定肯定式)

(7) $P\rightarrow Q,Q\rightarrow R\Rightarrow P\rightarrow R$　　((假言)三段论原则)

(8) $P\vee Q,P\rightarrow R,Q\rightarrow R\Rightarrow R$　　(二难推理、简单构成式)

(9) $\Rightarrow P\vee\neg P$　　(排中律)

(10) $\Rightarrow\neg(P\wedge\neg P)$　　(无矛盾律)

(11) $P \Rightarrow P$（或 $\Rightarrow P \to P$）　　（同一律）

22. 逻辑等价关系

称公式 α 与公式 β 有逻辑等价关系，或者称公式 α 逻辑等价公式 β，记为 $\alpha \Leftrightarrow \beta$ 当且仅当对于公式 α 和公式 β 的合成变项组的任一指派 π，均有：$\alpha(\pi)=\beta(\pi)$。

其中：公式 α 称为左边，公式 β 称为右边。

23. 定理：逻辑等价与形式等价间的转换关系

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ 当且仅当 $\Rightarrow \alpha \leftrightarrow \beta$

24. 定理：逻辑等价关系是（全体命题公式集上的）一种等价关系

(1) 自反性：$\alpha \Leftrightarrow \alpha$；

(2) 对称性：若 $\alpha \Leftrightarrow \beta$，则 $\beta \Leftrightarrow \alpha$；

(3) 传递性：若 $\alpha \Leftrightarrow \beta$ 且 $\beta \Leftrightarrow \gamma$，则 $\alpha \Leftrightarrow \gamma$。

25. 定理：基本逻辑等价式

(1) 双重否定律：$\neg\neg P \Leftrightarrow P$；

(2) 幂等律：$P \wedge P \Leftrightarrow P, P \vee P \Leftrightarrow P$；

(3) 结合律：$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R), (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$；

(4) 吸收律：$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P, P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$；

(5) 交换律：$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P, P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$；

(6) 分配律：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$；

(7) 逆否律：$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$（换质位律）；

(8) de Morgan 律：$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q, \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$；

(9) 归约律：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$（真值联结词），

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P);$$

(10) 化简律：$P \wedge (Q \vee \neg Q \vee R) \Leftrightarrow P, P \vee (Q \wedge \neg Q \wedge R) \Leftrightarrow P$。

26. 定理（定理 1.10）[①]：逻辑蕴涵关系是（全体命题公式集上的）一种“半序关系”

(1) 自反性：$\alpha \Rightarrow \alpha$；

(2) 反对称性：若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 β，则 $\alpha \Rightarrow \alpha \Leftrightarrow \beta$；

(3) 传递性：若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \gamma$，则 $\alpha \Rightarrow \gamma$。

27. 引理（引理 1.3.1）：逻辑运算是保持逻辑等价的。即如果 $\alpha_1 \Leftrightarrow \beta_1$ 且 $\alpha_2 \Leftrightarrow \beta_2$，

① 括号中内容与《离散数学》（第 3 版）对应。

则

(1) $\neg\alpha_1 \Leftrightarrow \neg\beta_1$；

(2)$\alpha_1 \vee \alpha_2 \Leftrightarrow \beta_1 \vee \beta_2$；

(3)$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Leftrightarrow \beta_1 \wedge \beta_2$；

(4)$\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \Leftrightarrow \beta_1 \rightarrow \beta_2$；

(5)$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \Leftrightarrow \beta_1 \leftrightarrow \beta_2$。

28. 定理(替换定理)(定理 1.3)

等价替换是保持逻辑等价的。设 α 是含有子公式 γ 的公式，将其中 γ 的出现一处或多处用子公式 δ 替换，从而得到 β，即，$\beta=\alpha(\delta/\gamma)$，则

$$若\ \gamma \Leftrightarrow \delta，则\ \alpha \Leftrightarrow \beta$$

29. 定理(代入定理)(定理 1.4)

命题变项代入是保持有效性的。设 $\beta=\alpha[\delta/\pi]$ 为将公式 α 中的命题变项 π 的每处出现均替换为子公式 δ 所得到的公式，则有：

$$若\ \Rightarrow\alpha，则\ \Rightarrow\beta$$

其中：π 为一原子公式，即命题变项，比如 P。

30. 推论(推论 1.4.1)

(1)若 $\alpha \Rightarrow \beta$，则 $\alpha[\delta/\pi] \Rightarrow \beta[\delta/\pi]$(代入保持逻辑蕴涵)；

(2)若 $\alpha \Leftrightarrow \beta$，则 $\alpha[\delta/\pi] \Leftrightarrow \beta[\delta/\pi]$(代入保持逻辑等价)。

31. 对偶式

设公式 α 不含联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$，称将 α 中所有的 $\wedge$，$\vee$ 同时分别换为 $\vee$，$\wedge$ 后所得的公式为 α 的对偶式，记为 α^*。借用代入记法，对偶式：$\alpha^*=\alpha[\vee/\wedge,\wedge/\vee]$。

32. 内否式

设公式 α 不含联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$，称将 α 中命题变项(原子 π)的肯定式均换为否定式，命题变项否定式均换为肯定式后所得的公式为 α 的内否式，记为 α^-。借用代入记法，内否式：$\alpha^-=\alpha[\neg\pi/\pi,\pi/\neg\pi]$。

33. 性质：对偶式、内否式的基本性质

(1)$\alpha^{**}=\alpha$；

(2)$\alpha^{--}=\alpha$；

(3)$\alpha^{*-}=\alpha^{-*}$；

(4)$(\alpha_1 \vee \alpha_2)^-=\alpha_1^- \vee \alpha_2^-$；

(5)$(\alpha_1 \wedge \alpha_2)^-=\alpha_1^- \wedge \alpha_2^-$；

(6)$(\alpha_1 \vee \alpha_2)^*=\alpha_1^* \wedge \alpha_2^*$；

(7)$(\alpha_1 \wedge \alpha_2)^*=\alpha_1^* \vee \alpha_2^*$。

34. 引理(引理 1.11.1):设公式 α 不含联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$

(1)$(\neg\alpha)^{*}=\neg(\alpha^{*})$;

(2)$(\neg\alpha)^{-}\Leftrightarrow\neg(\alpha^{-})$;

(3)$(\neg\alpha)^{*-}\Leftrightarrow\neg(\alpha^{*-})$。

35. 定理(引理 1.11.2):否定深入定理

设公式 α 不含联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$。则 $\neg\alpha\Leftrightarrow\alpha^{*-}$。

36. 定理(引理 1.11.3):设公式 α 不含联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$,则:

(1) $\Rightarrow\alpha$ 当且仅当 $\Rightarrow\alpha^{-}$;

(2) $\Rightarrow\neg\alpha$ 当且仅当 $\Rightarrow\alpha^{*}$。

37. 定理(定理 1.11):对偶定理

设公式 α 不含联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$,则:

(1)$\alpha\Rightarrow\beta$ 当且仅当 $\beta^{*}\Rightarrow\alpha^{*}$;

(2)$\alpha\Leftrightarrow\beta$ 当且仅当 $\alpha^{*}\Leftrightarrow\beta^{*}$。

38. 异或

异或意义是“不可兼或”,有时也称其为“不可兼析取”。表示“异或”的符号是:$\overline{\vee}$(或$\oplus$)。符号$\overline{\vee}$称为异或词,简称异或。

对于两个命题 P 和 Q,P 和 Q 的异或命题“要么 P 要么 Q”表示为:$P\overline{\vee}Q$。

39. 与非

表示“与非”的符号是:$\uparrow$(或$|$),符号$\uparrow$(或$|$)称为谢孚竖。

对于两个命题 P 和 Q,P 和 Q 的与非命题“P 或 Q 不成立”表示为:$P\uparrow Q$。$P\uparrow Q$ 称为 P 和 Q 的与非式。

40. 或非

表示“或非”的符号是:$\downarrow$,符号 $\downarrow$ 称为谢孚竖。

对于两个命题 P 和 Q,P 和 Q 的或非命题“P 且 Q 不成立”表示为:$P\downarrow Q$。$P\downarrow Q$ 称为 P 和 Q 的或非式。

41. 真值函项

n 元函数 $f:\{t,f\}^{n}\rightarrow\{t,f\}$,称为 n 元真值函项(算子)。

42. 联结词集

真值函项集的任一子集 A,都称为是一个联结词集。

43. 全功能集

一个联结词 A,若对任一真值函项 f,都可由 A 中的联结词来表达,则称 A 是一个全功能集,或功能完备集。

44. 定理(定理 1.5):联结词集$\{\neg,\wedge,\vee\}$是一个全功能集。

45. 极小全功能集

若全功能集 A 中每一个联结词，都不能用其余联结词来表达，则称 A 是一个极小全功能集，或极小功能完备集。

46. 定理(定理 1.6)：联结词集 $\{\neg,\wedge\}$ $\{\neg,\vee\}$ $\{\neg,\rightarrow\}$ 都是极小全功能集。

47. 定理(定理 1.7)：联结词集 $\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$ 都是极小全功能集。

48. 范式：范式是公式的规范形式。只含联结词 $\neg,\wedge,\vee$。

49. 析取范式

公式 α 是析取范式当且仅当 α 是一析取式，即 $\alpha=\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3\vee\cdots\vee\alpha_m$。

其中：每个析取项 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 都是文字的一个合取式。

50. 合取范式

公式 α 是合取范式当且仅当 α 是一合取式，即 $\alpha=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\wedge\cdots\wedge\alpha_m$。

其中：每个合取项 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 都是文字的一个析取式。

51. 定理(范式存在性定理)

对于任何公式 α，都存在 $DNF\ \beta$，和 $CNF\ \gamma$，使得：

$$\alpha\Leftrightarrow\beta \text{ 且 } \alpha\Leftrightarrow\gamma$$

52. 主范式

主范式是一范式，但相对于某一命题变项组 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是全的，或者说是唯一的。

53. 主析取范式

公式 α 是主析取范式当且仅当 α 是一析取范式，即：

$$\alpha=\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3\vee\cdots\vee\alpha_m$$

其中：每个析取项 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 相对于命题变项组 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 为 $a_i=\widetilde{P}_1\wedge\widetilde{P}_2\wedge\cdots\wedge\widetilde{P}_n$。这里：$\widetilde{P}_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 是对应 P_j 的一对文字之一。

54. 主合取范式

公式 α 是主合取范式当且仅当 α 是一合取范式，即：

$$\alpha=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\wedge\cdots\wedge\alpha_m$$

其中：每个合取项 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 相对于命题变项组 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 为 $a_i=\widetilde{P}_1\vee\widetilde{P}_2\vee\cdots\vee\widetilde{P}_n$。这里：$\widetilde{P}_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 是对应 P_j 的一对文字之一。

55. 求主析取范式的算法：

(1)联结词归约：同前；

(2)否定词深入：同前；

(3) $\wedge$ 与 $\vee$ 调整：同前；

(4)化简：同前；

(5)补足变项：若某个命题变项 $P_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 在某一析取项 α_i 中没有出现，则根据化简律，将 α_i 替换为 $\alpha_i \wedge (P_j \vee \neg P_j)$，然后用分配律将其展开；

(6)合并相同项：若某两个析取项 α_i 与 α_j 相同，则根据幂等律，只保留其中之一，比如 α_i。

56. 引理(引理 1.8.1)：小项与成真指派一一对应。

设 α 是含 n 个命题变项 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一个小项，即 $a_i=\widetilde{P}_1\wedge\widetilde{P}_2\wedge\cdots\wedge\widetilde{P}_n$，$\pi$ 是 α 的一个指派，即 $\pi=(P^{\circ}{}_1,P^{\circ}{}_2,\cdots,P^{\circ}{}_n)$，则：

$$\alpha(\pi)=t \text{ 当且仅当 } P^{\circ}{}_i=\begin{cases} t, & \text{当 } \widetilde{P}_i=P_i \\ f, & \text{当 } \widetilde{P}_i=\neg P_i \end{cases} \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

57. 定理(定理 1.8)：主析取范式是唯一的。

58. 数学推理关系

数学推理关系就是根据 n 个已知命题 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 推断出一个新命题 B 的思维形式。记为：$A_1,A_2,\cdots,A_n\Rightarrow B$。其中：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为 n 个前提命题；B 称为结论命题。

数学推理关系简称数学推理或更简单的推理。

59. 逻辑推理关系

逻辑推理关系就是逻辑蕴涵关系。它是数学推理关系的形式化，记为：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\Rightarrow\beta$。其中：$\alpha_i$ 为命题 A_i 的形式化$(1\leqslant i\leqslant n)$；$\beta$ 为命题 B 的形式化；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为 n 个前提公式；β 称为结论公式。

逻辑推理关系简称逻辑推理。

60. 形式推理关系

称公式集 $\Gamma=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 和公式 β 有形式推理关系，或者说公式 β 可从公式集 Γ 推导出，记为：$\Gamma\vdash\beta$ 或者 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\vdash\beta$ 当且仅当在前提公式 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的假定下，根据一些给定的(直接性或间接性的)推理规则，可以构造出一个公式的序列：

$$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m \qquad (*)$$

直到引出结论公式 β，即 $\gamma_m=\beta$。这时称上述公式序列(＊)为在前提 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下，结论 β 的一个形式证明，或形式推导、形式演绎。

61. 形式证明的描述

形式证明按行进行。每行写一个公式，每行的格式如下：

〈编号〉　〈公式〉　〈正当理由记录〉

其中：编号从 1 开始，每行增 1，第 i 行的编号写成(i)；公式为形式证明公式序列(＊)中的公式 γ_i；正当理由记录为得到该行公式的根据，一般由所涉及到的

序列(*)中前面某些公式的编号和所用到的规则(的名)构成。

62. 命题演算的自然推理系统

我们的自然推理系统来自根茨的自然演绎系统,有修正。自然推理系统一共有 11 条推理规则,其中 2 条直接引入规则,6 条直接性推理规则,3 条间接性推理规则。

(1)直接引入规则:

(a)前提引入规则。记作 P(Premise——前提),可根据需要随时引入一个前提。

规则形式:$\Gamma \vDash \alpha$(这里:$\alpha \in \Gamma$)

或者 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vDash \alpha_j$(这里:$1 \leqslant j \leqslant n$)。

这里 α 或 α_j 的正当理由记录为 P。

(b)假设引入规则。记作 H(Hypothesis——假设),可按需要随时引入一个假设(额外假设)公式。其正当理由记录为要求引入该假设的间接性规则。

(2)直接性推理规则:

(a)蕴涵消去规则。记作 $\rightarrow_-$

规则形式:$\alpha, \beta \rightarrow \alpha \vDash \beta$

使用形式:

	……	
(i)	α	——
	……	
(j)	$\beta \rightarrow \alpha$	——
	……	
(k)	β	$\rightarrow_-$ (i)(j)

(b)合取引入规则。记作 $\wedge_+$

规则形式:$\alpha, \beta \vDash \alpha \wedge \beta$

使用形式:

	……	
(i)	α	——
	……	
(j)	β	——
	……	
(k)	$\alpha \wedge \beta$	$\wedge_+$ (i)(j)

(c)合取消去规则。记作 $\wedge_-$

规则形式:$\alpha \wedge \beta \vDash \alpha$　　　$\alpha \wedge \beta \vDash \beta$

使用形式：

……

(i)　$\alpha \wedge \beta$　　——

……

(j)　α　　$\wedge_{-}$(i)

(d)析取引入规则。记作 $\vee_{+}$

规则形式：$\alpha \vDash \alpha \vee \beta$　　$\beta \vDash \alpha \vee \beta$

使用形式：

……

(i)　α　　——

……

(j)　$\alpha \vee \beta$　　$\vee_{+}$(i)

(e)等价引入规则。记作 $\leftrightarrow_{+}$

规则形式：$\beta \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \beta \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$

使用形式：

……

(i)　$\beta \rightarrow \alpha$　　——

……

(j)　$\alpha \rightarrow \beta$　　——

……

(k)　$\alpha \leftrightarrow \beta$　　$\leftrightarrow_{+}$(i)(j)

(f)等价消去规则。记作 $\leftrightarrow_{-}$

规则形式：$\alpha \leftrightarrow \beta \vDash \beta \rightarrow \alpha$，　　$\alpha \leftrightarrow \beta \vDash \alpha \rightarrow \beta$

使用形式：

……

(i)　$\alpha \leftrightarrow \beta$　　——

……

(j)　$\beta \rightarrow \alpha$　　$\leftrightarrow_{-}$(i)

(3)间接性推理规则：

(a)蕴涵引入规则。记作 $\rightarrow_{+}$

规则形式：若 $\Gamma, \alpha \vDash \beta$，则 $\Gamma \vDash \beta \rightarrow \alpha$

使用形式：

(i−1) γ

……

(i)　$\sqcup\alpha$　　$H(\rightarrow_+)$

……

(j)　$\sqcup\beta$　　——

……

(k)　$\alpha\rightarrow\beta$　　$\rightarrow_+$(j)|(i)

……

规则的意义:若在增加假设 α 的情况下,已证出公式 β,则在此后可消去假设 α,而直接得到形式蕴涵 $\alpha\rightarrow\beta$。

(b)析取消去规则。记作 $\vee_-$

规则形式:若 $\Gamma\vdash\alpha\vee\beta$ 且 $\Gamma,\alpha\vdash\gamma$ 且 $\Gamma,\beta\vdash\gamma$,则 $\Gamma\vdash\gamma$

使用形式:

……

(i)　$\alpha\vee\beta$　　——

……

(j)　$\sqcup\alpha$　　$H(\vee_-)$

……

(l)　$\sqcup\gamma$　　——

……

(k)　$\sqcup\beta$　　$H(\vee_-)$

……

(m)　$\sqcup\gamma$　　——

……

(n)　γ　　$\vee_-$(i)(l)(m)|(j)(k)

……

规则的意义:若 $\alpha\vee\beta$ 已证,并且若在增加假设 α 的情况下,能够证出公式 γ;同时,若在增加假设 β 的情况下,能够证出公式 γ;则在消去假设 α 和 β 后,根据 $\alpha\vee\beta$ 的证明,可以直接得到公式 γ。

规定:第二个假设 β 的引入,必须在引入第一个假设 α 后所引出的证明结束之后,方可进行;第二个假设 β 的引入应与已引入的第一个假设 α 对齐。

(c)否定消去规则。记作 $\neg_-$

规则形式:若 $\Gamma,\neg\alpha\vdash\gamma$ 且 $\Gamma,\neg\alpha\vdash\neg\gamma$,则 $\Gamma\vdash\alpha$