北京高等教育精品教材
BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学分析系列
开放式讲座

主　编　杨小远　文　晓
编　者　孙玉泉　薛玉梅　苑　佳
　　　　李　娅　邢家省

科学出版社

北京高等教育精品教材
普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学分析系列开放式讲座

主编　杨小远　文　晓
编者　孙玉泉　薛玉梅　苑　佳
李　娅　邢家省

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共11讲，主要内容包括：压缩映射原理及其应用，分段函数的应用：样条插值逼近，从数列到混沌，Hausdorff维数，Riemann积分与Lebesgue积分，常微分方程初步，从三体问题到Smale马蹄，小波变换应用：信号多分辨分析初步，Mathematica软件在微积分中的应用，非线性数值优化初步，微分几何初步. 本书重在强调方法和思想，目的培养学生开放思维和应用数学能力.

本书可以作为普通高等院校微积分教学的辅助教材，也可供其他科学研究人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析系列开放式讲座/杨小远，文晓主编. —北京：科学出版社，2014.1

北京高等教育精品教材·普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-039548-1

Ⅰ. ①工…　Ⅱ. ①杨…②文…　Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第008831号

责任编辑：张中兴　周金权 / 责任校对：钟　洋

责任印制：阎　磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014年1月第　一　版　开本：(720×1000)B5

2014年1月第一次印刷　印张：12

字数：242 000

定价：30.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

包括数学在内的所有的科学，都不是奉天承运、皇帝诏曰、从天而降的圣旨，而是宇宙间万事万物的客观存在的普遍规律. 人类认识这些规律，归根结底是为了顺应这些规律为自己服务. 人类进行科学研究也有一个重要动力不是为了眼前的具体应用，而是为了探索宇宙的奥秘. 然而，宇宙的规律是相互联系的，仅仅为了满足人类好奇心揭穿宇宙奥秘而发现的规律，往往出人意料地带来了巨大的实际应用.

北京航空航天大学是一个工科优势突出的大学，非数学专业数学课程的主要目的不是为了培养专门从事数学研究的人才，而是为了让学生打下扎实的数学基础、培养良好的数学素养，以适应进行科学研究和工程技术的需要. 与之相适应的数学课程，应当尽量避免脱离实际案例空讲数学概念和理论. 因此，很多教师努力尝试结合学生专业的需要，通过具体案例引入数学概念和算法. 这个理念是对的，值得鼓励，但具体实施起来并不容易. 本来的目的是为了降低学生学习抽象数学知识的难度，从具体的工程案例引入，但是直接将工程案例搬到基础课教学中未必容易懂，这些案例本身可能就需要很多预备知识，要向学生讲清楚可能需要更多的时间，反而比原来的“抽象数学”更难懂. 具体的案例不一定比抽象的知识简单，反而有可能更繁琐. 这个问题不但现在遇到，以前曾经进行过的多次教学改革也遇到过. 每次都提倡联系实际，注重应用，反对繁琐，甚至将抽象理论作为“资产阶级”的洪水猛兽全部砍掉. 但实践的结果，废掉了抽象，抽掉了经过长期历史检验的基础知识，培养的学生既不懂理论，也不能解决实际问题. 于是一切又恢复原状，甚至比原来更抽象更繁琐，始终没有逃出这个恶性循环.

我们现在进行教学改革，不应当走极端，不要指望一打出实际案例的招牌就能够成功. 基础课堂上引入基础知识的实际案例，应当尽可能贴近普通学生的知识水平，尽量简明易懂. 不论学生进入大学以后将要学习什么样的专业，他们刚刚离开中学进入大学，知识水平还是一个中学生，既不了解大学数学也不了解大学专业，也许他们对抽象的数学知识不感兴趣，但对繁琐的专业知识未必就感兴趣，这时的实际案例最好能够贴近日常生活而不是贴近专业知识. 经过一段时间学习之后，增长了数学知识和对数学的兴趣，也增长了专业知识和对本专业的兴趣，这时再以适当的方式(例如开放讲座)引导他们探索和研究更贴近专业、需要更多的数学知识的问题，既能够为专业服务，又能够及早尝到应用数学知识解决实际问题的甜头. 要做到这一点，仅仅讲一通道理是不够的，最重要的是要总结和创造出实际案例.

既创造在基础课阶段贴近普通大众生活的入门案例，也需要创造进一步联系工程专业实际和用到更多的数学的高级案例.

北京航空航天大学的数学与系统科学学院的一批教师，既在他们编写的基础课教材《工科数学分析》教材中总结了一些入门案例，也在扩展性教材《工科数学分析系列开放式讲座》中总结了一些更高级的案例. 这些案例都发源于他们的科学研究，又经过改造进入教学实践，再经过教学实践的检验和改造进入教材，而不仅仅是从别人的教材中去照抄一些案例. 其中浅一些的进入基础课教材，深一些的进入扩展性教材. 我觉得这是进行教学改革切实可行的途径，也是科研和教学结合的值得探索的途径. 虽然他们的尝试还仅仅是开始，前面的路还很远，但至少我认为这个前进方向是正确的，值得继续走下去，因此写了这篇序.

李尚志
北京航空航天大学
2013 年 10 月

前　言

北京航空航天大学工科数学分析教学团队一直研究探索开放式教学，目的是使学生初步了解更多的数学分支和现代数学分析方法，培养学生的开放式思维和应用数学能力. 本套教材，是我们在多年教学实践基础上完成的，包括《工科数学分析教程》（上、下册）和《工科数学分析系列开放式讲座》. 写作本套书的目的是利用数学分析的知识学生能够理解问题，重在强调方法和思想，使得学生对数学理解有一定高度. 本书是该套书中的一本，本书共 11 讲，内容如下：

压缩映射原理及其应用，分段函数的应用；样条插值逼近，从数列到混沌，Hausdorff 维数，Riemann 积分与 Lebesgue 积分，常微分方程初步，从三体问题到 Smale 马蹄，小波变换应用：信号多分辨分析初步，Mathematica 软件在微积分中的应用，非线性数值优化初步，微分几何初步.

本书第一讲由苑佳老师撰写，第二讲和第八讲由杨小远老师撰写，第三讲和第十讲由孙玉泉老师撰写，第五讲由薛玉梅老师撰写，第四讲、第六讲、第七讲由文晓老师撰写，第九讲由李娅老师撰写，第十一讲由邢家省老师撰写，全书由杨小远和文晓老师进行增补和修改，进行了统稿整理工作.

北京航空航天大学副校长郑志明教授对本书的初稿提出了许多宝贵意见，他渊博的知识和对问题的真知灼见开阔了我们的思路和视野. 编者感谢国家教学名师李尚志老师，他的学术精神和教育思想给了我们许多启发，让我们受益匪浅. 感谢冯仁忠副教授、夏勇副教授为本书提供了许多精彩的案例. 陈流河博士为本书绘制了部分几何图形，感谢他的辛勤工作.

由于编者的水平和经验，书中的缺点和疏漏在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2013 年 10 月

目　录

第一讲

压缩映射原理及其应用

逐次逼近或迭代是求解方程(包括代数方程、微分方程、积分方程和其他方程等)的重要思想,而不同类型方程的逐次逼近法在泛函分析中归结成一个一般的原则,就是压缩映射原理(不动点定理).我们从连续函数压缩映射原理出发,结合求数列极限及求代数方程近似解等数学分析中的基本问题,让读者对迭代思想有一个初步的理解.接下来介绍压缩映射即不动点理论的发展历史,重点介绍度量空间上的压缩映射原理,即著名的 Banach 不动点定理. Banach 压缩映射原理是泛函分析中的一个重要的基本定理,有十分广泛的应用.例如,用它可以十分简单地证明隐函数存在定理、微分方程解的存在性定理、反函数定理等.

希望读者通过本章的学习,理解迭代思想,掌握压缩映射这一重要方法,以便在将来的学习中能灵活应用,解决实际问题.同时压缩映射原理的相关知识也能够对泛函分析的学习起到良好的铺垫作用.

一、压缩映射原理

首先我们从数列极限的性质开始,介绍连续函数压缩映射的概念和定理.

定理 1 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|$, $0<k<1$, $n=1,2,3,\cdots$,则 $\{x_n\}$ 极限存在,假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$,则有误差估计

$$|x_n-x^*|\leqslant\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|,\quad 0<k<1,n=1,2,3,\cdots.$$

证明 由已知条件 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|$,易知

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant k^n|x_1-x_0|,\quad 0<k<1,n=1,2,3,\cdots.$$

从而对任意的正整数 n,p,有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant(k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+\cdots+k^n)|x_1-x_0|\\&=\frac{k^n(1-k^p)}{1-k}|x_1-x_0|.\end{aligned}\tag{1}$$

所以,对 $\forall\varepsilon>0$,令 $N=\left[\log_k^{\frac{(1-k)\varepsilon}{(1-k^n)|x_1-x_0|}}\right]+1$,当 $n>N$ 时,对任意的正整数 p,都有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$. 由 Cauchy 收敛原理知,数列 $\{x_n\}$ 收敛,设其极限为 x^*,则在式(1)两边关于 $p\to\infty$ 取极限,得

$$|x_n-x^*|\leqslant\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|,\quad 0<k<1, n=1,2,3,\cdots.$$

定义 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义,方程 $f(x)=x$ 在 $[a,b]$ 上的解称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**不动点**.

定义 2 若存在一个常数 k, $0\leqslant k<1$,使得对任意的 $x,y\in[a,b]$,函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$,则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一个**压缩映射**.

其中 k 称为压缩因子,压缩映射一定是连续映射.

在实际应用中,压缩映射的判别条件可以有很多形式,比如常见的如下述定理. 证明留给读者.

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,且存在常数 λ, $0<\lambda<1$,满足 $|f'(x)|\leqslant\lambda$, $\forall x\in[a,b]$,则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的压缩映射.

下面给出连续函数的压缩映射原理.

定理 3 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的压缩映射,且 $x_0\in[a,b]$,对任意的正整数 n, $x_n\in[a,b]$ 且 $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=0,1,2,\cdots$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 c,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

证明 首先证明 $f(x)$ 存在不动点.

任取 $x_0\in[a,b]$,则由迭代序列 $x_{n+1}=f(x_n)$ 确定的序列 $\{x_n\}\subset[a,b]$ 是 Cauchy 列. 事实上,由 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的压缩映射可知

$$|x_{m+1}-x_m|=|f(x_m)-f(x_{m-1})|\leqslant k|x_m-x_{m-1}|.$$

再由定理 1 可知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列,从而假设存在 $c\in[a,b]$,使得 $x_n\to c(n\to\infty)$.

又显然 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,所以

$$c=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f(x_{n-1})=f(\lim_{n\to\infty}x_{n-1})=f(c),$$

即 c 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不动点.

下面证明不动点的唯一性. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两个不动点 c_1,c_2,那么由 $f(c_1)=c_1$, $f(c_2)=c_2$,可得

$$|c_1-c_2|=|f(c_1)-f(c_2)|\leqslant k|c_1-c_2|<|c_1-c_2|,$$

矛盾,从而 $c_1=c_2$,唯一性得证.

连续函数压缩映射原理可以用于求数列极限.

例 1 已知 $a_1=\sqrt{3}$, $a_n=\sqrt{3+a_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$,试证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求其值.

证明 令 $f(x)=\sqrt{3+x}$, $x\in[0,3]$,则 $f[0,3]\in[0,3]$,且

$$|f(x)-f(y)|=|\sqrt{3+x}-\sqrt{3+y}|$$
$$=\frac{|x-y|}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3+y}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}|x-y|,\quad x\in[0,3].$$

所以 f 是压缩映射，由定理 3 可知数列 a_n 极限存在. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则在 $a_n=\sqrt{3+a_{n-1}}$ 两边关于 $n\to\infty$ 取极限，可得 $a=\sqrt{3+a}$，解得 $a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

例 2 设常数 $c>1$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 构造函数 $f(x)=\frac{c(1+x)}{c+x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续可导，且 $f'(x)=\frac{c(c-1)}{(c+x)^2}$. 由 $c>1$，可知 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)\leqslant\frac{c(c-1)}{c^2}<1$，所以由定理 2，$f$ 是压缩映射. 从而由定理 3 可得数列 x_n 极限存在，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由于压缩映射一定连续，$x_{n+1}=f(x_n)$ 两边关于 $n\to\infty$ 取极限可得 $a=\frac{c(1+a)}{c+a}$，解得 $a=\sqrt{c}$.

随着现代电子计算机技术的发展，我们在解方程(包括常微分方程、偏微分方程、积分方程、差分方程、代数方程等)的过程中，大量使用的是逐次逼近的迭代法. 几乎可以这样说：对一个方程，只要我们找到一个迭代公式，就算解出了这个方程(当然我们还要考虑迭代公式的收敛性、解的稳定性和收敛速度等问题). 但是，在逐次迭代中，我们必须保证迭代过程中得到的是个收敛序列，否则就是毫无意义的了.

我们来总结一下求解的方法：取初始点 x_0，构造迭代序列：$x_{n+1}=Tx_n$，$n=0,1,2,\cdots$，若迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛，则极限点 x^* 为 $x=Tx$ 的不动点. 这种用逐次代入构造近似解的方法称为迭代法. 而迭代法解方程的实质就是寻求变换(映射、映照)的不动点.

例如，求非线性方程 $f(x)=0$ 的根. 一般精确的求根公式不存在，因此需要求精确解的近似值，即数值解. 我们可以将方程改写为 $x=\varphi(x)$，则求 $f(x)=0$ 的根就变成求 $\varphi(x)$ 的不动点，选择一个 x_0，代入迭代序列 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$，$n=0,1,2,\cdots$，如果 φ 是压缩映射，则根据定理，迭代序列存在极限. 而在实际计算中，不可能迭代无穷次，常需要估计经过多少次迭代后可以逼近不动点，即估计收敛速度的问题. 定理 1 中 $|x_n-x^*|\leqslant\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|$ 可以估计收敛速度. 不动点迭代的过程如图 1 所示：方程 $x=$

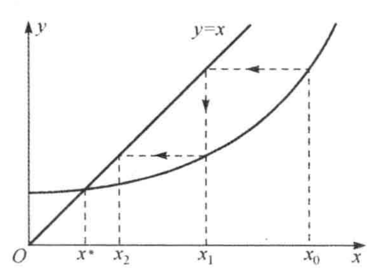

图 1

$\varphi(x)$求根的问题就是确定曲线 $y=\varphi(x)$ 和直线 $y=x$ 的交点. 迭代过程就是沿图示箭头所示方向不断寻找的过程.

通过下面的例子我们体会一下迭代思想.

例 3 求方程 $f(x)=4x^2-\sin x-1=0$ 在$[0,1]$内的一个根.

解 原方程可化为 $x=\frac{1}{2}\sqrt{\sin x+1}$,令函数 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\sin x+1}$,因为 $x\in[0,1]$时,$\varphi(x)\in[0,1]$,且对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|&=\frac{1}{2}\left|\sqrt{\sin x_1+1}-\sqrt{\sin x_2+1}\right|\\&=\frac{1}{2}\frac{|\sin x_1-\sin x_2|}{\sqrt{\sin x_1+1}+\sqrt{\sin x_2+1}}\leqslant\frac{1}{4}|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

所以 φ 为$[0,1]$上的压缩映射. 由定理 3 ,迭代过程 $x_{k+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\sin x_k+1}$对任意的 $x_0\in[0,1]$均收敛. 取初值 $x_0=0.5$,迭代结果见表 1. 我们可以看出,如果取十位有效数字,x_{13},x_{14}相同,可以认为 0.6303648857 即是不动点,也是方程根的近似值.

表 1 例 3 的迭代结果

k	x_k	k	x_k
0	0.5	8	0.6303648248
1	0.6081581905	9	0.6303648759
2	0.6267688676	10	0.6303648841
3	0.6297878300	11	0.6303648854
4	0.6302724223	12	0.6303648856
5	0.6303500735	13	0.6303648857
6	0.6303625129	14	0.6303648857
7	0.6303645056		

我们知道,不同的算子方程,会对应不同的迭代法. 当非线性方程 $f(x)=0$ 不太容易改写成迭代格式时,如果 $f(x)$在其根 x^* 附近可微,选 x_0 为初始点,函数 $f(x)$在点 x_0 处的局部线性化表达式为

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

从而得到非线性方程 $f(x)=0$ 的近似方程

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0.$$

设 $f'(x_0)\neq 0$，则其解为

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

如图 2 所示，x_1 比 x_0 更接近于 x^*. 该方法的几何意义是：用曲线上某点 (x_0,y_0) 的切线代替曲线，以该切线与 x 轴的交点 $(x_1,0)$ 作为曲线与 x 轴的交点 $(x^*,0)$ 的近似，所以牛顿迭代法又称为切线法.

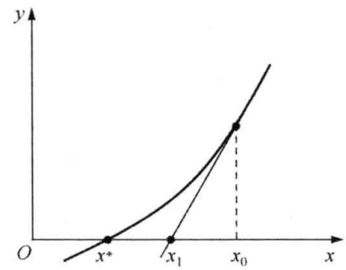

图 2　牛顿迭代法的几何意义

进一步，由 $f(x)\approx f(x_1)+f'(x_1)\cdot(x-x_1)$ 解得

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)};$$

依此类推，我们得到迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

这就是著名的牛顿迭代公式. 牛顿迭代法是求非线性方程（非线性方程组）数值解的一种重要方法，其最大优点是收敛速度快，但是与压缩映射原理迭代（也叫简单迭代）不同的是，牛顿迭代只有当初始值 x_0 接近方程根的精确值时收敛速度较快，否则迭代往往不收敛，而简单迭代法与初值的选取无关. 下面的例子可以说明这点.

例 4　用牛顿迭代法解方程 $f(x)=x^3-x-3=0$.

分析　利用 MATLAB 求多项式零点命令，可计算得三次方程的三个根见表 2.

表 2　三次方程的三个根

r_1	r_2	r_3
1.6717	−0.8358 − 1.0469i	−0.8358 + 1.0469i

显然，方程有一个实根 r_1.

解　对于 $f(x)=x^3-x-3$，首先求导数 $f'(x)=3x-1$.

取 $x_0=0$ 和 $x_0=1$ 分别代入牛顿迭代序列 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n{}^3-x_n-3}{3x_n-1}$，$n=0,1,2,\cdots$，迭代结果见表 3.

表 3　不同初值的迭代结果

x_0	0	1
x_1	−3.0000	2.5000
x_2	−1.9615	1.9296
x_3	−1.1472	1.7079
x_4	−0.0066	1.6726
x_5	−3.0004	1.6717
x_6	−1.9618	1.6717
…	…	…

对于初值 $x_0=0$，数列中的第四项又回到初始点附近，算法将陷入死循环. 而迭代初值取 $x_0=1$，可以使牛顿迭代法得到收敛(图 3).

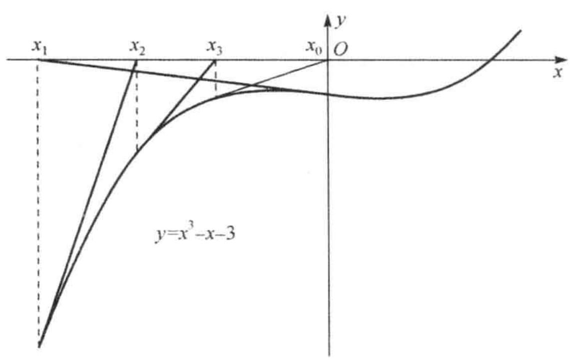

图 3　牛顿迭代法初值不收敛示意图

牛顿是微积分创立者之一，微积分理论本质上是立足于对世界的这种认识：很多物理规律在微观上是线性的. 近几百年来，大到行星轨道计算，小到机械部件设计，这种局部线性化方法取得了辉煌成功. 牛顿迭代法正是将局部线性化的方法用于求解方程，该方法广泛用于计算机编程中.

如果把导数 $f'(x)$ 用其他的近似来代替，可得到别的迭代方法如牛顿下山法、弦截法、抛物线法等，但其本质都是不动点迭代.

在实际问题中，利用迭代法求解主要考虑三个方面：收敛速度、迭代步数以及迭代序列对初值的敏感性问题. 读者可以更深入地学习和探究.

由定理 1 和定理 3，我们还可以得到下面的定理.

定理 4　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的压缩映射，且 $f([a,b])\subset[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点.

定理 3 和定理 4 即为连续函数的压缩映射原理. 结合数学分析的知识，定理 4 其实可以由连续函数介值定理直接推得. 而连续函数压缩映射原理其实是 Banach 压缩映射原理的特殊情形.

1909 年，荷兰数学家布劳威尔(Brouwer，1881～1966)创立了不动点理论，在此基础上产生了用迭代法求不动点的迭代思想. 美国数学家莱夫谢茨(Lefschetz，1884～1972)证明了以他的名字命名的不动点定理，是布劳威尔不动点定理的推广. 波兰数学家巴拿赫(Banach，1892～1945)于 1922 年提出的压缩映射原理发展了迭代思想，并给出了 Banach 不动点定理. Banach 压缩映射原理有着极其广泛的应用，像代数方程、微分方程、积分方程、隐函数理论等问题中的许多存在性与唯一性问题都可以归结为此定理的推论.

首先我们先介绍完备度量空间的定义.

定义 3(度量空间) 设 S 是任意集合，若 S 中任意两点 x,y 的距离(度量) $\rho(x,y)$ 满足以下条件：

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$.

则称点集 S 按此距离 ρ 成为度量空间.

定义 4 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 S 中的点列，$x_*\in S$，若 $\rho(x_n,x_*)\to 0$，则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_*，记作 $x_n\to x_*$.

定义 5 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 S 中的点列，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时，都有 $\rho(x_m,x_n)\to 0$，则称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 点列.

定义 6 若度量空间 S 中任意 Cauchy 点列都收敛，则称 S 为完备的度量空间.

定义 7(压缩映射) 设 $T:S\to S$ 是 S 中的映射，若存在常数 λ，$0\leqslant\lambda<1$，使得对任意的 $x,y\in S$，成立 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\lambda\rho(x,y)$，则称 T 是 S 中的压缩映射.

压缩映射的几何意义是：一个点集经过压缩映射后，象中的两点间距离缩短了，至多等于原象距离的 λ 倍.

定理 5 设 S 是完备的度量空间，距离为 ρ，T 是 S 中的压缩映射，则 T 在 S 中存在唯一的不动点，即存在唯一的 $x\in S$，满足 $Tx=x$.

证明 (1) 首先证明 T 存在不动点.

在完备度量空间 X 中任意取定一个元素 x_0，以递推形式 $x_{n+1}=Tx_n$ 确定的序列 $\{x_n\}\subset X$ 是 Cauchy 列. 事实上，由

$$
\begin{aligned}
\rho(x_{m+1},x_m)&=\rho(Tx_m,Tx_{m-1})\leqslant\lambda\rho(x_m,x_{m-1})\\
&=\lambda\rho(Tx_{m-1},Tx_{m-2})\leqslant\lambda^2\rho(x_{m-1},x_{m-2})\\
&\leqslant\cdots\leqslant\lambda^m\rho(x_1,x_0).
\end{aligned}
$$

任取自然数 n,m 不妨设 $m<n$，那么

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_m,x_{m+1})+\cdots+\rho(x_{n-1},x_n)\leqslant(\lambda^m+\lambda^{m-1}+\cdots+\lambda^{n-1})\rho(x_1,x_0)$$
$$\leqslant\lambda^m\left(\frac{1-\lambda^{n-m}}{1-\lambda}\right)\rho(x_1,x_0)\leqslant\frac{\lambda^m}{1-\lambda}\rho(x_1,x_0).$$

从而知$\{x_n\}$是 Cauchy 列,故存在 $x\in X$,使 $x_n\to x$. 又因为
$$\rho(x,Tx)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,Tx)=\rho(x,x_n)+\lambda\rho(x_{n-1},x)\to 0(n\to\infty),$$
故 $\rho(x,Tx)=0$,即 $Tx=x$,所以 x 是 T 的不动点.

(2) 证明不动点的唯一性.

设有两个不动点 x,x_0,那么由 $Tx=x$ 及 $Tx_0=x_0$,有
$$\rho(x,x_0)=\rho(Tx,Tx_0)\leqslant\lambda\rho(x,x_0).$$
设 $x\neq x_0$,则 $\rho(x,x_0)>0$ 得到矛盾,从而 $x=x_0$,唯一性证毕.

定义中的 $0<\lambda<1$ 不能减弱为 $0<\lambda\leqslant 1$,即使 S 完备. 例如,X 为 $\mathbf{R}$ 中的闭子空间$[0,+\infty)$,T:$Tx=x+\dfrac{1}{x+1}$,T 满足压缩映射的条件,但是 T 在 X 中不存在不动点.

关于 Banach 不动点定理我们给出几点说明:

(1) 定理的证明过程就是求不动点的方法,称为构造性的证明;

(2) 定理的条件是结论成立的充分非必要条件;

(3) 迭代的收敛性和极限点及算子 T 有关,而与初始点 x_0 无关. 但初始点的选取对迭代速度有影响,初始点离极限点越近,其收敛速度越快;

(4) 误差估计式为
$$\rho(x_n,x^*)\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(Tx_0,x_0)=\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(x_1,x_0).$$

此外,定理 5 可做些适当的拓展推广.

定理 6 设 T 是完备距离空间 X 到其自身的映射,如果存在常数 θ:$0\leqslant\theta<1$ 以及自然数 n_0 使得
$$\rho(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\leqslant\theta\rho(x,y)(x,y\in X),\tag{1}$$
那么 T 在 X 中存在唯一的不动点.

证明 由不等式(1),T^{n_0} 满足定理 5 的条件,故 T^{n_0} 存在唯一的不动点 x_0. 现在证明 x_0 也是映射 T 唯一的不动点. 事实上
$$T^{n_0}(Tx_0)=T^{n_0+1}(x_0)=T(T^{n_0}x_0)=Tx_0,$$
可知,Tx_0 是映射 T^{n_0} 的不动点. 由 T^{n_0} 不动点的唯一性,可得 $Tx_0=x_0$,故 x_0 是映射 T 的不动点. 若 T 另有不动点 x_1,则由
$$T^{n_0}x_1=T^{n_0-1}Tx_1=T^{n_0-1}x_1=\cdots=Tx_1=x_1$$
知 x_1 也是 T^{n_0} 的不动点. 仍由唯一性,可得 $x_1=x_0$.

连续函数空间 $C[a,b]$是我们最常见到的一个 Banach 空间,我们可以在上面