"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套教材
卫生部"十二五"规划教材配套教材
全国高等医药教材建设研究会"十二五"规划教材配套教材

全国高等学校配套教材
供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医学物理学
学习指导

第4版

主编 王 磊

人民卫生出版社
PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套教材

卫生部"十二五"规划教材配套教材
全国高等医药教材建设研究会"十二五"规划教材配套
全国高等学校配套教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医学物理学

学习指导

第4版

主　编　王　磊

编　者（以姓氏笔画为序）

王　岚（哈尔滨医科大学）
王　磊（四川大学）
王章金（华中科技大学）
吉　强（天津医科大学）
刘东华（新乡医学院）
刘新纯（辽宁医学院）
李晓春（中南大学湘雅医学院）
张延芳（广东医学院）
陈月明（安徽医科大学）
周建莉（昆明医科大学）
赵晓艳（辽宁医学院）
聂　娅（四川大学）
莫　华（广西医科大学）
郭嘉泰（长治医学院）
符维娟（复旦大学）
盖立平（大连医科大学）
盖志刚（山东大学）
童家明（青岛大学）

人民卫生出版社

图书在版编目（CIP）数据

医学物理学学习指导 / 王磊主编．—4 版．—北京：人民卫生出版社，2013

ISBN 978-7-117-17127-4

Ⅰ．①医…　Ⅱ．①王…　Ⅲ．①医用物理学－医学院校－教学参考资料　Ⅳ．① R312

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 070833 号

人卫社官网	**www.pmph.com**	**出版物查询，在线购书**
人卫医学网	**www.ipmph.com**	**医学考试辅导，医学数据库服务，医学教育资源，大众健康资讯**

医学物理学学习指导

第 4 版

主　　编：王　磊
出版发行：人民卫生出版社（中继线 010-59780011）
地　　址：北京市朝阳区潘家园南里 19 号
邮　　编：100021
E - mail：pmph @ pmph.com
购书热线：010-59787592　010-59787584　010-65264830
印　　刷：潮河印业有限公司
经　　销：新华书店
开　　本：787 × 1092　1/16　**印张：**12
字　　数：315 千字
版　　次：2002 年 5 月第 1 版　2013 年 3 月第 4 版
2013 年 10 月第 4 版第 2 次印刷（总第 18 次印刷）
标准书号：ISBN 978-7-117-17127-4/R · 17128
定　　价：25.00 元
打击盗版举报电话：010-59787491　E-mail：WQ @ pmph.com
（凡属印装质量问题请与本社市场营销中心联系退换）

前 言

本书是王磊、冀敏主编的全国高等学校五年制本科临床医学专业卫生部规划教材《医学物理学》(第8版)的配套教材。作为配套教材，也是为了开拓广大读者的思路，让学生能用较少的时间掌握较多的现代医学所需的物理知识，提高学生的自学能力、分析问题和解决问题的能力，我们根据医学物理学课程的基本要求和高等医药院校的实际，编写了《医学物理学学习指导》第4版。本版指导书是在《医学物理学学习指导与习题集》第3版基础上进行了调整，修订而成。

本书分章编写，每章均由以下部分组成:①本章内容提要；②解题指导——典型例题；③思考题和习题解答；④自我评估题。

"本章内容提要"部分，引导学生复习每章的基本内容;"解题指导——典型例题"部分，则通过典型例题的分析和解算，总结解题的方法，讨论解题技巧，但解题步骤未作统一要求，以便学生根据自己的实际进行选用;"思考题和习题解答"部分，给出每题的详细参考解答，供学生与自己所作解答对比使用;"自我评估题"部分，只给答案，未给出解算过程，供学生自我评估使用。

由于编写时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥之处，请读者批评指正。

编 者

2012年12月

目　录

对称性导致动量守恒定律；空间旋转对称性导致角动量守恒定律。

21. 冲量　$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$，表示力在时间 d$t$ 内的累积量。

22. 动量定理　合外力的冲量等于物体动量的改变，$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1$。

23. 动量守恒定律　当系统所受的合外力为零时，系统的总动量保持不变。

24. 碰撞　指两个物体在运动过程中相互靠近，或发生接触时，在相对较短时间内发生强烈相互作用的过程。

25. 弹性碰撞　在碰撞前后两物体总动能没有损失的碰撞。

26. 非弹性碰撞　两物体碰撞后，总要损失一部分动能（转变为其他形式的能量，例如放出热量等）。

27. 完全非弹性碰撞　两物体在碰撞后不分开的碰撞。

28. 刚体　物体在任何力的作用下不改变形状和大小。

29. 定轴转动　转动物体的圆心都在一条固定不动的直线上。

30. 角加速度　角速度对时间的变化率。

31. 转动惯量　刚体转动惯性的量度。$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int r^2\rho\mathrm{d}v$，$J$ 的大小与刚体的质量、形状、质量分布和转轴位置有关。

32. 力矩　力的大小与力的作用线和转轴之间的垂直距离的乘积，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{l}$，力矩是矢量。

33. 转动定律　$\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\alpha}$，转动物体的角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 与作用的力矩 $\boldsymbol{M}$ 成正比，与物体的转动惯量 J 成反比。

34. 角动量　$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$，刚体对定轴的角动量：$\boldsymbol{L}=J\boldsymbol{\omega}$。角动量是矢量。

35. 角动量守恒定律　封闭系统中的内力矩不改变系统的总角动量。

36. 旋进　高速旋转的刚体，其自转轴绕另一轴转动的现象。

37. 超重　物体对支持物的压力或对悬挂物的拉力大于物体所受重力的状态。

38. 失重　物体对支持物的压力或对悬挂物的拉力小于物体所受重力的状态。

39. 完全失重　物体对支持物的压力或对悬挂物的拉力完全为零的状态，或者物体向下的加速度等于重力加速度的状态。

二、解题指导——典型例题

[例 1 – 1]　一质点在半径为 $R=1\mathrm{m}$ 的圆周上按顺时针方向运动，开始时位置在 A 点，如图 1 – 1 所示。质点运动的路程与时间的关系为 $s=\pi t^2+\pi t$（s 的单位为 m，t 的单位为 s）。试求：

（1）质点从 A 点出发，绕圆运行一周所经历的路程、位移、平均速度、平均速率；

（2）质点在 1s 时的瞬时速度、瞬时速率、瞬时加速度。

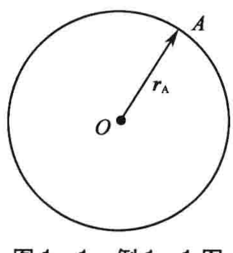

图 1 – 1　例 1 – 1 图

解：（1）质点绕行一周所经历的路程为

$$s=2\pi R=6.28(\mathrm{m})$$

质点绕行一周所经历的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B=0$$

质点绕行一周所需的时间 t 由

$$s=2\pi R=\pi t^2+\pi t$$

即

$$t^2+t-2=0$$

解得　$t=1\mathrm{s}$，$t=-2\mathrm{s}$（负值不合题意，舍去）。

质点绕行一周运动的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = 0$$

质点在一周内的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{2\pi R}{\Delta t} = \frac{2\times 3.14\times 1}{1}\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 6.28(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

（2）瞬时速率为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = (2t+1)\pi$$

当 $t=1\mathrm{s}$ 时，瞬时速率为

$$v_1 = (2t+1)\pi = (2\times 1+1)\pi = 9.4(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

此时瞬时速度为 $\boldsymbol{v}=9.4\boldsymbol{e}_t\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向沿该点的切线方向。

切向加速度的大小为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2\pi = 6.28(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

法向加速度的大小为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{9.4^2}{1}\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 88.9(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = a_t\boldsymbol{e}_t + a_n\boldsymbol{e}_n = (6.28e_t + 88.9e_n)(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{6.28^2 + 88.9^2}\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 89.0(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向与 OA 的夹角为

$$\theta = \arcsin\frac{a_t}{a} = 4.0°$$

答：（1）质点从 A 点出发，绕圆运行一周所经历的路程为6.28m、位移为0、平均速度为0、平均速率为 $6.28\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

（2）质点在 1s 时的瞬时速度为 $9.4\boldsymbol{e}_t\mathrm{m\cdot s^{-1}}$、瞬时速率为 $9.4\mathrm{m\cdot s^{-1}}$、瞬时加速度为 $(6.28\boldsymbol{e}_t+88.9\boldsymbol{e}_n)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$、其加速度的大小 $89.0\mathrm{m\cdot s^{-2}}$、其方向与 OA 的夹角为 $\theta = \arcsin\frac{a_t}{a} = 4.0°$。

本题在求解时，一定要注意路程、平均速度率、瞬时速率是标量；位移、平均速度、速度和加速度是矢量；平均速率、平均速度的大小与所取时间间隔有很大关系。

[例 1-2]　有一架飞机由 A 向东飞到 B 处，然后又向西飞回到 A 处，飞机相对空气以不变的速率 v' 飞行，空气相对地面的速率为 u，A 到 B 的距离为 l。在下列三种情况下，试求飞机飞行一个来回所需的时间。

（1）空气相对地面静止；

（2）空气的速度向东；

（3）空气的速度向北。

解：（1）由速度变换定理，则飞机相对地面往返飞行的速度大小均为 v'，飞机飞一个来回所需的时间为

$$t_1 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{l}{v'} + \frac{l}{v'} = \frac{2l}{v'}$$

（2）由速度变换定理，飞机相对地面由 A 向东飞到 B 的速度大小为

$$v_{AB} = v' + u$$

飞机相对地面由 B 向西飞到 A 的速度大小为

$$v_{BA} = v' - u$$

飞机飞一个来回所需的时间为

$$t_2 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{l}{v'+u} + \frac{l}{v'-u} = \frac{2l}{v'[1-(u/v')^2]} = \frac{t_1}{1-(u/v')^2}$$

（3）当空气的速度 u 向北时，飞机相对地面的飞行速度 v 及飞机相对空气的速度 v' 与 u 间，由相对运动关系有

$$v = v' + u$$

因此，飞机相对于地面的飞行速度的大小为

$$v = \sqrt{v'^2 - u^2}$$

飞机飞一个来回所需的时间为

$$t_3 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{2l}{v} = \frac{2l}{\sqrt{v'^2 - u^2}} = \frac{t_1}{\sqrt{1-(u/v')^2}}$$

答：（1）空气相对地面静止时，飞机飞行一个来回所需的时间为 $\dfrac{2l}{v'}$；（2）空气的速度向东时，飞机飞行一个来回所需的时间为 $\dfrac{t_1}{1-(u/v')^2}$；（3）空气的速度向北时，飞机飞行一个来回所需的时间为 $\dfrac{t_1}{\sqrt{1-(u/v')^2}}$。

求解相对运动问题时，应注意三个问题：一是运动物体，二是选取绝对参照系，三是选取相对参照系。

在本题中，飞机为运动物体，选取地面为绝对参照系，空气相对于地面的运动，选取与空气固定的坐标系为相对参照系。明确这三者之间的关系，即可由速度变换关系，方便求解。

[例 1－3]　如图 1－2 所示，一根均匀的轻质细绳，一端拴一质量为 m 的小球，在铅直平面内，绕定点 O 做半径为 R 的圆周运动。已知 $t=0$ 时，小球在最低点以初速度 v_0 运动，如图所示。

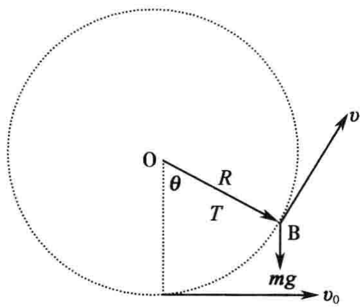

图 1－2　例 1－3 图

试求：（1）小球速率与位置的关系；

（2）小球在任一点所受绳子的张力与速率的关系。

解：（1）小球在任一点 B 的受力如图所示，取自然坐标系

切向：
$$-mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

法向：
$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \tag{2}$$

由式（1）

$$-g\sin\theta = \frac{v}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

即

$$v\mathrm{d}v = -Rg\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

对式（3）积分，并由已知条件 $\theta=0$ 时，$v = v_0$ 得

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta) \tag{4}$$

（2）由式（4）得

$$g\cos\theta = g + \frac{v^2 - v_0^2}{2R}$$

代入式（2）得

$$T = mg + \frac{m(3v^2 - v_0^2)}{2R}$$

答：（1）小球速率与位置的关系是 $v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta)$；（2）小球在任一点所受绳子的张力与速率的关系是 $T = mg + \dfrac{m(3v^2 - v_0^2)}{2R}$。

本题在于加强对牛顿运动定律瞬时性的理解。解题时为了方便，有时需做变量代换，如 $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \dfrac{dv}{d\theta} = \dfrac{v}{R} \dfrac{dv}{d\theta}$ 等。

［例 1－4］ 质点沿 x 轴正向作直线运动，其加速度与位置的关系为 $a = -mx$（m 为正常量），且已知当 $t=0$ 时，$x=0$，$v=v_0$，试问该质点在什么位置时会停止运动？

解：由直线运动中加速度的定义，并进行变量代换有

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = -mx$$

分离变量后有

$$v\,dv = -mx\,dx$$

对其积分，并代入初始条件可得

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_0^x -mx\,dx$$

$$v^2 - v_0^2 = -mx^2$$

则质点的速率与位置的关系为

$$v = \sqrt{v_0^2 - mx^2}$$

质点停止运动时满足 $v=0$，即

$$v = \sqrt{v_0^2 - mx^2} = 0$$

此时质点的位置为 $x = \dfrac{v_0}{\sqrt{m}}$

答：该质点在 $x = \dfrac{v_0}{\sqrt{m}}$ 时会停止运动。

本题属于已知加速度与位置的函数关系的运动学问题，但在处理这类问题时一般不能直接积分，需要做变量代换 $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$，分离变量后进行求解。

［例 1－5］ 如图 1－3（a）所示，一质量为 2kg 的物体以 $3.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的初速率从斜面上 A 点滑下，物体与斜面之间的摩擦力为 6.2N。物体到 B 点时，开始压缩弹簧，当弹簧被压缩了 0.2m 后，物体停止运动，然后又被弹送回去。已知斜面的倾角为 30°，AB 间距离为 5.0m，弹簧一端固定在斜面上，处于自然长度时，其另一端位于 B 点，弹簧的质量不计。试求弹簧的劲度系数和物体被弹回后所能达到的最大高度（g 取 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$）。

解：物体受力如图 1－3（b）所示。选择 O 点为重力势能零点，选择 B 点为弹力势能零点。物体由点 A 运动到点 O，由功能原理，有

$$-fx_A = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 - mgx_A\sin\theta$$

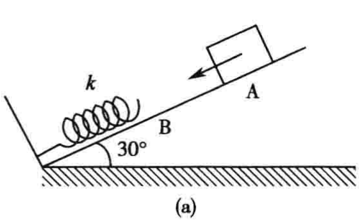

图 1-3 例 1-5 图

由此可得弹簧的劲度系数为

$$k=\frac{mv_A^2+2mgx_A\sin\theta-2fx_A}{x_B^2}=\frac{2\times3.0^2+2\times2\times10\times5.2\times\sin30°-2\times6.2\times5.2}{0.2^2}$$

$$=1.438\times10^3(\mathrm{N\cdot m^{-1}})$$

当物体被弹回时，设物体到达最大高度的坐标为 x，则物体由点 O 运动至最高点，由功能原理，得

$$-fx=mgx\sin\theta-\frac{1}{2}kx_B^2$$

解得

$$x=\frac{kx_B^2}{2(mg\sin\theta+f)}=\frac{1.4\times10^3\times0.2^2}{2\times\left(2\times10\times\frac{1}{2}+6.2\right)}=1.728(\mathrm{m})$$

物体被弹回的最大高度为

$$h_m=x\sin\theta=0.86(\mathrm{m})$$

答：弹簧的劲度系数和物体被弹回后所能达到的最大高度 $h_m=x\sin\theta=0.86\mathrm{m}$。

本题不涉及时间，故可利用动能定理或功能原理求解。物体所受的 4 个力，支持力不做功，重力和弹性力是保守力，势能零点可依题意灵活选取。

[例 1-6] 如图 1-4 所示，一轻绳跨过一轴承光滑的定滑轮，绳的两端分别悬有质量为 m_1 和 m_2 的物体 $(m_1<m_2)$。滑轮可视为均匀圆盘，质量为 m，半径为 r。绳与滑轮无相对滑动。试求物体的加速度、滑轮的角加速度和绳中的张力。

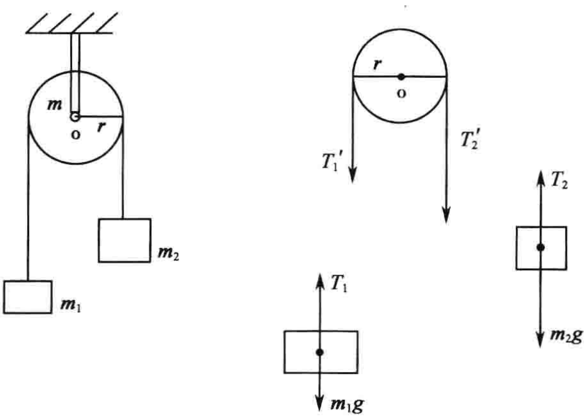

图 1-4 例 1-6 图

解：根据题意，滑轮的质量不能忽略，必须考虑滑轮绕定轴的转动。分别取滑轮、m_1 和 m_2 为研究对象，它们的受力如图所示。因 $m_2>m_1$，m_1 的加速度 a_1 方向向上，m_2 的加速度 a_2 方向

向下，且 $a_1=a_2=a$。设滑轮的角加速度为 α，对 m_1 和 m_2 应用牛顿第二定律，对滑轮应用转动定律，可列出下列方程

$$T_1-m_1g=m_1a$$

$$m_2g-T_2=m_2a$$

$$T'_2r-T'_1r=J\alpha$$

由于绳和滑轮无相对滑动，故轮边缘上质点的切向加速度和 m_1、m_2 的加速度大小相等。它们与角加速度 α 的关系是

$$a=r\alpha$$

又 $T'_1=T_1$，$T'_2=T_2$，$J=\frac{1}{2}mr^2$，将四个方程联立求解，得

$$a=\frac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m};\ \alpha=\frac{(m_2-m_1)g}{\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}m\right)r}$$

$$T_1=\frac{m_1\left(2m_2+\frac{1}{2}m\right)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m};\ T_2=\frac{m_2\left(2m_1+\frac{1}{2}m\right)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m}$$

答：物体的加速度 $\frac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m}$，滑轮的角加速度 $\frac{(m_2-m_1)g}{\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}m\right)r}$ 和绳中的张力

$$T_1=\frac{m_1\left(2m_2+\frac{1}{2}m\right)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m},\ T_2=\frac{m_2\left(2m_1+\frac{1}{2}m\right)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m}。$$

当滑轮的质量不能忽略的这类问题时，对滑轮的转动应用问题可以直接运用转动定律。

[例1-7]　如图1-5所示，质量为 M、长为 l 的均匀细直棒，可绕棒的一端且垂直于棒的水平轴O无摩擦地转动，棒原来静止在平衡位置上。现有一质量为 m 的弹性小球飞来，正好在棒的下端与棒垂直相撞。相撞后，使棒从平衡位置摆动到 $\theta=30°$ 的最高处，如图所示。

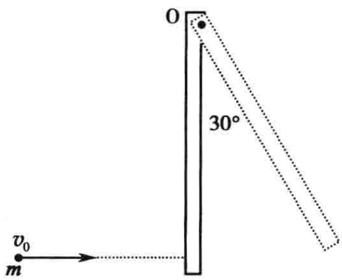

图1-5　例1-7图

(1) 设碰撞为完全弹性碰撞，计算小球碰前速度 v_0 的大小；

(2) 相撞时，小球受到多大的冲量。

解：小球碰前的速度为 v_0，棒经小球碰撞后得到的角速度为 ω，碰后小球的速度变为 v。按题意，小球和棒做完全弹性碰撞，所以，碰撞过程遵从角动量守恒定律和机械能守恒定律，可列方程如下：

$$mv_0l=J\omega+mvl \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

由于相撞后，棒从竖直位置上摆到最大角度 $\theta=30°$，按机械能守恒定律可列式：

$$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{l}{2}Mg(1-\cos30°) \tag{3}$$

由式(3)得

$$\omega=\left[\frac{Mgl}{J}(1-\cos30°)\right]^{½}=\left[\frac{3g}{l}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^{½}$$

由式（1）得

$$v = v_0 - \frac{J\omega}{ml}$$

由式（2）得

$$v^2 = v_0^2 - \frac{J}{m}\omega^2$$

所以

$$\left(v_0 - \frac{J\omega}{ml}\right)^2 = v_0^2 - \frac{J}{m}\omega^2$$

求得

$$v_0 = \frac{l\omega}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right) = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}\right)\omega = \frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{12}\frac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$$

相碰时小球受到的冲量为

$$\int F\mathrm{d}t = \Delta mv = mv - mv_0$$

由式（1）求得

$$\int F\mathrm{d}t = mv - mv_0 = -\frac{J\omega}{l} = -\frac{1}{3}Ml\omega = -\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}M}{6}\sqrt{gl}$$

答：（1）完全弹性碰撞时，小球碰前的速度为 $\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{12}\frac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$；（2）相撞时，小球受到的冲量为 $-\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}M}{6}\sqrt{gl}$。

在求解问题时，为了计算的方便，可以先假设某一个物理量的方向，当结果正时，说明方向和假设方向一致，为负时，表明小球所受冲量的方向与小球碰前的速度方向相反。

[例1－8]　如图 1－6 所示，质量分别为 m_1、m_2 的两木块与劲度系数为 k 的弹簧相连，静止地放在光滑地面上，质量为 m 的子弹以水平初速 v_0 射入木块 m_1，设子弹射入过程的时间极短，试求

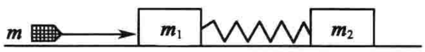

图1－6　例1－8图

（1）弹簧的最大压缩长度；

（2）木块 m_2 相对地面的最大速度和最小速度。

解：在 m 和 m_2 相碰过程中动量守恒。碰撞后，由（$m+m_1$），m_2 弹簧组成的系统机械能守恒、动量守恒。系统的总机械能和总动量就是碰撞后（$m+m_1$）的初始动能和初始动量。

最大压缩时，（$m+m_1$）与 m_2 的速度相同，相应的弹性势能与动能之和等于总机械能，相应的动量等于总动量，可以求得最大压缩比。

系统的弹性势能为零时，m_2 与（$m+m_1$）具有最大动能，即 m_2 具有最大或最小速度，相应的总机械能和总动量仍不变，由此可以求得最大速度和最小速度。

选择质心参照系，利用质心参照系中，碰撞后的机械能守恒及总动量为零来求解。在质心系中，最大压缩相应为零，而 m_2 具有最大、最小速度时弹性势能为零。

取地面为参照系，m 与 m_1 碰撞前、后动量守恒

$$mv_0 = (m + m_1)v_{10} \tag{1}$$

取（$m+m_1$）与 m_2 组成的物体系，碰撞后物体系的机械能守恒、动量守恒，总机械能为碰撞后（$m+m_1$）的初始动能，为 $\frac{1}{2}(m+m_1)v_{10}^2$，总动量为 $mv_0 = (m+m_1)v_{10}$。

当弹簧达到最大压缩长度 x 时，$(m+m_1)$ 与 m_2 的速度相同，设 v，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}(m+m_1)v_{10}^2 = \frac{1}{2}(m+m_1+m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{2}$$

由动量守恒得

$$mv_0 = (m+m_1+m_2)v \tag{3}$$

式（1）、（2）、（3）联立，可得

$$x = mv_0\sqrt{\frac{m_2}{(m+m_1)(m+m_1+m_2)k}}$$

弹性势能为零时，设 $(m+m_1)$ 和 m_2 的速度分别为 v_1 和 v_2，则 v_2 将是 m_2 的最大或最小速度。

$$\frac{1}{2}(m+m_1+m_2)v_{10}^2 = \frac{1}{2}(m+m_1)v_1^2 + \frac{1}{2}m_2x_2^2 \tag{4}$$

由动量守恒

$$mv_0 = (m+m_1)v_1 + m_2v_2 \tag{5}$$

式（1）、（4）、（5）联立，可得

最小速度为 $v_2 = 0$

最大速度为 $v_2 = \dfrac{2mv_0}{m+m_1+m_2}$

答：（1）弹簧的最大压缩长度为 $x = mv_0\sqrt{\dfrac{m_2}{(m+m_1)(m+m_1+m_2)k}}$；（2）木块 m_2 相对地面的最大速度为 $\dfrac{2mv_0}{m+m_1+m_2}$，最小速度为0。

在碰撞前后，系统的动量、机械能均守恒。

[例1-9]　如图1-7所示，一根质量为 m，长为 $2l$ 的均匀细棒，可以在竖直平面内绕通过其中心的光滑水平轴 OO′转动。开始时细棒静止在水平位置，如图所示。一质量为 m_1 的小球，以速度 u 垂直落到棒的端点，小球与棒做完全弹性碰撞。试求碰撞后，小球的回跳速率 v 以及棒的角速率 ω 各为多少。

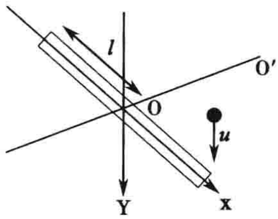

图1-7　例1-9图

解：将棒和小球视为一研究系统。系统所受的外力有：小球的重力 m_1g，棒的重力 mg。碰撞力矩远大于小球所受重力矩，所以小球重力对轴力矩可忽略。

根据以上分析，可以认为系统满足角动量守恒条件。因为碰撞前棒处于静止状态，所以碰前系统的角动量大小为 m_1ul，碰后，小球以速率 v 回跳，其角动量大小为 m_1v_1l；棒获角速度 ω，棒的角动量是 $\frac{1}{12}m(2l)^2\omega^2 = \frac{1}{3}ml^2\omega^2$。所以，碰后系统的角动量是 $lm_1v + \frac{1}{3}ml^2\omega^2$。由于角动量守恒，故有

$$lm_1u = lm_1v + \frac{1}{3}ml^2\omega \tag{1}$$

取碰前小球运动的方向为正，即 $u>0$ 那么，碰后小球回跳，v 与 u 的方向相反，故 $v<0$。又因为是完全弹性碰撞，碰撞前后系统的动能守恒，即

$$\frac{1}{2}m_1u^2 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 \tag{2}$$

将式（1）和式（2）联立，解得

$$v = \frac{3m_1 - m}{3m_1 + m}u$$

$$\omega = \frac{6m_1 u}{(3m_1 + m)l}$$

答：碰撞后，小球的回跳速率为 $\frac{3m_1 - m}{3m_1 + m}u$，棒的角速率为 $\frac{6m_1 u}{(3m_1 + m)l}$。小球与刚体相碰，系统的动量不守恒，而系统的角动量守恒。

［例 1-10］　如图 1-8 所示，在水平桌面上有一孔，绳子的一部分放在桌面下，另一部分经孔下垂。设不可伸长，均匀柔软，全长为 l，下垂长度为 x_0，从静止开始下落。设摩擦可忽略。试求下落过程中，绳子速度随下落长度变化的规律。

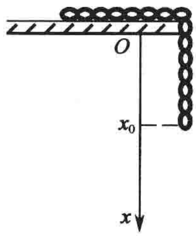

图 1-8　例 1-10 图

解：解法一　取绳与地球组成的物体系。取 x 坐标竖直向下，原点 O 在桌面上，规定该处的重力势能 $E_p = 0$。设绳子的线密度为 λ，总质量为 $m = \lambda l$。当绳下端在 x_0 处开始下落时，动能为零，重力势能为

$$-\int_0^{x_0} mg \cdot dx = -\int_0^{x_0} \lambda xg dx = -\frac{\lambda}{2}gx_0^2$$

当绳下端落到任意处 x 时，$E_k = \frac{1}{2}mv^2$，$E_p = -\lambda x \cdot \frac{x}{2}g = -\frac{\lambda}{2}gx^2$

下落过程中，物体系机械能守恒，故

$$-\frac{\lambda}{2}gx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\lambda}{2}gx^2$$

所以 v 与 x 的变化规律为

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)}$$

解法二　当绳下端在任意位置 x 处时，在竖直方向绳受力 $F = \lambda xg = \frac{m}{l}xg$，由牛顿第二定律

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{m}{l}gx$$

利用 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$，把上式改写成

$$vdv = \frac{g}{l}xdx$$

积分得

$$v^2 = \frac{g}{l}x^2 + C$$

当 $x = x_0$ 时，$v = 0$，故可得

$$C = -\frac{g}{l}x_0^2$$

代入得

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)}$$

答：绳子速度随下落长度变化的规律为 $v = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)}$。以绳子和地球为物体系，系统所受的唯一的外力为桌面所施加的支持力，在绳子运动过程中，支持力不做功，故系统的机械能守

恒。据此可直接解出速度与绳下端位置间的关系，也可根据牛顿第二定律通过积分运算直接求解。

三、思考题和习题解答

1-1　回答下列问题

(1) 位移和路程有何区别?

(2) 速度和速率有何区别?

(3) 瞬时速度和平均速度的区别和联系是什么?

(4) 物体能否有一个不变的速率而仍有一变化的速度?

(5) 速度为零的时刻，加速度是否一定为零？加速度为零的时刻，速度是否一定为零?

(6) 当物体具有大小、方向不变的加速度时，物体的速度方向能否有改变?

答：

(1) 两者概念不同。由初始位置引向终点位置的有向线段，称为位移。路程是质点沿轨迹运动所经路径的长度。前者为矢量，后者为标量。

(2) 速度是位移对时间的一阶导数，速率是路程对时间的一阶导数。前者为矢量，后者为标量。

(3) 当 $\Delta t \to 0$ 时，平均速度的极限叫做质点在 t 时刻的瞬时速度。

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

(4) 可以。速度为一矢量，无论大小（速率）和方向哪一个变化，速度都不为恒量。匀速率圆周运动，速率不变，但运动方向在变，故速度在变。

(5) 不一定，因为加速度是速度对时间的一阶导数，速度为零的时刻，加速度可以不为零，如自由落体运动，初速为零，加速度为重力加速度 g。

(6) 可以，如斜抛运动，物体的加速度始终为 g，但物体的运动速度不同时刻不一样。

1-2　回答下列问题

(1) 物体受到几个力的作用，是否一定产生加速度?

(2) 物体速度很大，所受到的合外力是否也很大?

(3) 物体的运动方向和合外力方向是否一定相同?

(4) 物体运动的速率不变，所受合外力是否为零?

答：(1) 不一定，物体虽受几个力作用，但这几个力的合力为零，则该物体的加速度为零。

(2) 不一定，物体的速度与物体所受合外力没有关系，如一个做高速匀速运动的物体，速度很大，但所受的合外力为零。

(3) 不一定，物体的加速度方向与合外力方向一致，运动方向与合外力方向没有关系，如一物体做匀速率圆周运动，物体所受的合外力方向指向圆心，但运动方向沿圆的轨迹的切线方向。

(4) 不一定，如匀速率圆周运动，速率不变，但合外力不为零。

1-3　炮弹以一定的仰角射出，它的轨迹是一条抛物线。设当它到达最高点时，不料发生爆炸，分裂成质量相等的两块碎片，其中一块在爆炸的影响下沿着原来的轨迹返回到出发点。问：

(1) 另一块碎片将沿怎样的方向飞出去？能否达到预定的地点?

(2) 到达地面时两者的速率是否相同?

(3) 两者能否同时到达地面?

答：(1) 另一块将继续沿抛物线运动。不能达到预定的地点，因水平方向的分速度比爆炸前大，故着落点较预定的地点远。

(2) 不相同。

(3) 能同时到达地面。

1-4　根据动量原理可知：力在时间过程中的累积效应，引起动量的改变。根据功能原理可知：力的空间累积引起动能的改变。

(1) 如果物体受合外力作用了一段时间（即受到合外力的冲量作用），动量发生了改变，那么，是否一定会引起物体动能的改变？

(2) 如果物体受合外力作用，并且在力作用的方向上有了位移（即合外力对物体做了功），使物体的动能发生了变化，是否一定会引起物体动量的改变？

答：(1) 不一定，如合外力与物体的运动方向始终相互垂直，合外力的冲量不为零，但不对物体做功，所以动能保持不变，如做匀速率圆周运动的物体就是这样。

(2) 一定，因物体所受合外力不为零，且力对物体做功的同时，一定就有时间的积累，则引起物体动量的改变。

1-5　用来分离不同种类的分子的超级离心机的转速是 60×10^4rev/min，在这种离心机的转子内，离轴 10cm 远的一个大分子的向心加速度是重力加速度的几倍？

解：向心加速度的大小

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

因为

$$v = 2\pi Rn$$

$$a_n = \frac{4\pi^2R^2n^2}{R} = 4\pi^2Rn^2$$

向心加速度 a_n 是重力加速度 g 的倍数关系为

$$x = \frac{a_n}{g} = \frac{4\pi^2Rn^2}{g} = \frac{4\times3.14^2\times0.1\times(60\times10^4/60)^2}{9.8} \approx 4\times10^7 \text{ 倍}$$

1-6　桌上有一块质量 $M=1$kg 的木板，板上放着一个质量 $m=2$kg 的物体，物体和板之间的静摩擦系数 $\mu_s=0.3$，板和桌面之间的滑动摩擦系数为 $\mu_k=0.25$，现以水平力 F 拉木板，物体与板一起以加速度 $a=1\text{m/s}^2$ 运动，试求：

(1) 物体和板的相互作用力以及板和桌面的相互作用力；

(2) 若要使板从物体下抽出，需要外力 F 是多少。

解：(1) 物体和板的相互作用力，就是物体所受的合外力，即

$$f = ma = 2\times1 = 2(\text{N})$$

板和桌面间的相互作用力，即它们间的滑动摩擦力

$$f_{滑} = (m+M)g\mu_k = (1+2)\times9.8\times0.25 = 7.35(\text{N})$$

(2) 要使板刚好能从物体下抽出，即板的加速度为物体所受最大静摩擦力时所产生的加速度

$$f_{\max} = ma_0$$

$$a_0 = \frac{f_{\max}}{m} = \frac{mg\mu_s}{m} = g\mu_s = 9.8\times0.3 = 2.94(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

依牛顿第二定律，$F - f_{滑} = (m+M)a_0$

$$F = (m+M)a_0 + f_{滑} = 3\times2.94 + (1+2)\times9.8\times0.25 = 8.82 + 7.35 = 16.17(\text{N})$$

要使板从物体下抽出，外力 F 至少要有 16.17N。

1-7　一步枪在射击时，子弹在枪膛内受的推力为 $F=400-\frac{4}{3}\times10^5 t$，已知击发前子弹速度 $v_0=0$，子弹出枪口时速度 $v=300\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。求子弹的质量等于多少？

解：子弹受的力有：重力 mg，枪膛对子弹支持力 N，水平爆炸力 F，前两个力相抵消。取水平向右为 x 轴正向

依动量定理有
$$\int_0^t F\mathrm{d}t = mv-0$$

由题义有 $F=0$ 时，t 满足
$$0=400-\frac{4}{3}\times10^5 t$$
$$t=300/10^5=3\times10^{-3}(\mathrm{s})$$

将 t 代入 $\int_0^{3\times10^{-3}}(400-\frac{4}{3}\times10^5 t)\mathrm{d}t = mv$　可得
$$m=\frac{400\times3\times10^{-3}-\frac{2}{3}\times10^5\times9\times10^{-6}}{300}=2\times10^{-3}(\mathrm{kg})$$

即子弹的质量为 2×10^{-3} 千克。

1-8　质量为 1kg 的球以 $25\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率垂直地落到地板上，以 $10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的初速率跳回。

（1）试问在球与地板接触时间内作用在球上的冲量多大？

（2）设接触时间为 0.02s，问作用在地板上的平均力多大？

解：（1）球在与地面碰撞时，受到重力和地面的作用力的作用。取垂直向下的方向为 x 轴的正向。

依动量定理
$$\int_0^t F_{合}\,\mathrm{d}t = mv_2-mv_1=I$$
$$I=m(v_2-v_1)=1\times(-10-25)=-35(\mathrm{N\cdot s})$$

（2）依动量定理
$$(mg-\overline{F})\Delta t = mv_2-mv_1$$
$$\overline{F}=\frac{mg\Delta t+mv_1-mv_2}{\Delta t}=mg+\frac{mv_1-mv_2}{\Delta t}$$
$$=1\times9.8+\frac{35}{0.02}=9.8+1750=1759.8(\mathrm{N})$$

注：在计算碰撞问题中，通常可以忽略重力产生的冲量。即
$$\overline{F'}=\frac{mv_1-mv_2}{\Delta t}=1750(\mathrm{N})$$

这样造成的误差为
$$\frac{\overline{F}-\overline{F'}}{\overline{F}}=\frac{9.8}{1759.8}\approx0.6\%$$

1-9　一质量为 m 的中子与一质量为 M 的原子核作弹性碰撞，如中子的初始动能为 E_0，试证明在碰撞过程中中子动能损失的最大值为 $4mME_0/(M+m)^2$。

证明：经分析中子与原子核正碰时，中子动能损失最大，则由动量守恒和动能守恒定律列方程，有
$$mv_1=mv'_1+Mv'_2 \tag{1}$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv'^2_1+\frac{1}{2}Mv'^2_2 \tag{2}$$

由式（1）得