初等代数研究

初等代数研究

季素月　朱家生　陈　鼎　编著
左铨如　审校

上海科技教育出版社

(沪)新登字116号

初等代数研究

季素月　朱家生　陈　鼎　编著

左铨如　审校

上海科技教育出版社出版发行

(上海冠生园路393号)

各地新华书店经销　常熟文化印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张12.875　字数290000

1994年12月第1版　1994年12月第1次印刷

印数1－3300

ISBN 7-5428-1019-7

O·45

定价:11.00元

序

《初等代数复习及研究》的课程，大概是向原苏联学来的。记得我自1952年从大连工学院到东北师范大学(院系调整)，就读过一本初等代数教材，译自苏联，还是油印本。关于此课印象，好像并不怎样有趣，“炒冷饭”，没有新问题提出，很难令学习者打起精神来，这也许是此课的困难所在吧！

四十年过去了，这门课在师范院校数学系站稳了脚跟，已形成一门必修课，教材也有好几种了。近读扬州师范学院编的《初等代数研究》一书，篇幅不大，却较为清新。可贵的是反映了现代数学发展的一些侧面，有些时代感。比如说，加强了不等式一章，介绍了 Jensen 公式，提到了函数的关系式定义，排列组合与母函数，斐波那契数列等等，都是早年的教本中所没有的。

我在师范大学呆了四十余年，虽未教过初等代数课，但耳濡目染，多少有些想法，趁此机会也顺便略说一二，以就教于方家。

一是“高观点”问题。初等代数要有新意，总得用高观点去看。比如，数学的发展是数学结构发展的一个范本。如果在这里讲点布尔巴基学派的结构主义观点，应该是很合适的。从组合数学的近代发展来看中学的排列、组合当然也会有新意。

二是数学模型问题。数学模型是一项基本的数学方法。初等代数的内容可以成为许多实际现象的数学模型。比如分

期付款与等比级数求和;抽样调查与排列组合;周期运动与三角函数等等,都是可以考虑的。我想,“纯”初等代数的传统如能溶入一些“应用”初等代数,对中学代数教学也会是一种好的导向。

三是“淡化形式”问题。原苏联教材的一个特征就是强调形式化,讲究严格,刨根问底,注重演绎。其实,数学和其他学科一样,不可能使每个概念都有严格的定义,有些概念往往也只是描述而已。例如,代数式、方程、坐标系等都没法给以形式化定义,但大家在理解上不会有什么困难。弗赖登塔尔曾说过,椅子、桌子都无法严格定义,但大家都懂,天下的事并非都需要严格。数学必须讲究“形式化”,但不可过分,故称之为“淡化”。

四是要有新意。初等代数里也会有一些引人入胜的问题,使人不觉其“炒冷饭”。例如复数为何无大小?初等函数的公理化定义,斐波那契数列,黄金分割与0.618法等都会吸引人,但这类问题太少,我觉得应继续努力探讨。

以上数点,在本书中已有不少体现。我衷心祝愿我国的师范教育有新的发展,包括“初等代数”课程改革的成功,也希望本书会受到读者的欢迎。

扬州是我国人才荟萃之地,扬州师范学院则是一所水平很高的高等学府。1993年11月,有幸访问扬师,拜会前辈,结识同行,知本书付印在即,遂有此序。

张奠宙

1993年冬

编者的话

一个肩负着培养21世纪人才重任的数学教师，不仅应该具有扎实的高等数学基础，还必须通晓初等数学；不仅善于运用近代或现代数学观点来分析初等数学中的基本概念与原理、基本思想与方法，还应该具有较强的分析问题和解决问题的能力。《初等几何研究》与《初等代数研究》就是为高等师范院校开设这样的必修课而撰写的专用教材。《初等几何研究》已于1992年由上海科技教育出版社出版，作为配套教材，现将《初等代数研究》奉献给广大读者。

因为本书是为数学教师、特别是为未来的数学教师(高等师范院校学生)而写的，所以我们在第一到第七章中，用现代数学的语言系统地阐述了初等代数的基础理论，其中也包括了数、式、函数、方程、不等式、数列、排列组合等传统内容，以提供一个数学教师应具备的代数知识结构，期望能有助于提高教师的初等数学素养和研究问题的立足点。然而，观点的提高必须落实于解题思想的分析和方法技巧的训练。为此，我们注意到密切联系中学教学实际，配置了与中学代数问题、中学生数学竞赛题相吻合的例题与习题，并在内容、形式上略作提高。在例题分析过程中，着重揭示问题中蕴含的数学思想，以及解决此类问题的通性通法，以提高教师解决问题的水平。

第八章初等数论选讲部分，精选了与中学数学关系密切的数论基础知识和基本方法，可作为中学第二课堂或数学竞赛培训的素材；第九章简要地介绍了布尔代数的基本概念、性

质和应用，以拓广教师的知识面，进一步加强代数结构的观念和意识。

每章末精心安排了适量的习题，以供练习与教学选用。为方便读者，书末附有习题答案和提示。书中所列的若干“注记”，则是对正文的补充与说明，有助于读者进一步了解该内容的来龙去脉，以及它在数学中的地位和作用。

书中带*号的章节可视具体情况而取舍，也可作为选修的内容。

本书的编写，曾得到扬州师范学院数学系领导的关怀和支持，得到许多同行专家的热情指导和帮助，在此表示衷心的谢意。

初等代数是个古老的学科，怎样使之适应数学教学现代化的形势，适应中学数学教学改革的需要，正是我们需要进一步研讨的问题，在此我们作了一点尝试，仅为“抛砖引玉”。有待于专家和同行的斧正。

作　者

1993年春于扬州

目　　录

第一章　数

§1.1　概　　述

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科。数，作为最基本的数学概念，也是研究数学和解决各种实际问题的重要工具。

在中小学数学课程中，学生从认识自然数开始，逐步学习分数、小数、有理数、无理数、实数、复数等。因此，数的运算和扩充是中学代数的重要组成部分。

在现行中小学数学教材中，数的扩充过程如下：

$$N_0 \longrightarrow Q_0^+ \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow C$$

（N_0：非负整数集；Q_0^+：非负有理数集）

在数学中，前两次扩充都是从测量某种量的实际需要来说明扩充的必要性的。例如，为了精确表示各种可分割的量，引进了正分数；为了表示不可公度*的量，引进了无理数。若从数学学科本身发展的需要来看，扩充的必要性常从两方面来说明：

(1) 某一运算的逆运算在原有数集中不能完全实施；

(2) 某一方程在原有数集中无解。

一般说来，这两个方面是相互等价而又互为补充的。

---

* 对于线段 AB、CD，如果存在线段 MN，使 $AB=mMN$，$CD=nMN$（m，n 为自然数），则称 AB、CD 有公度；如果这样的线段 MN 不存在，就说线段 AB、CD 无公度，或不可公度。

例如，在非负整数集 N_0 中，减法运算不是总能实施，这意味着方程 $a+x=b$、当 $a>b$ 时在 N_0 内无解；又如方程 $x^2-2=0$ 在有理数集 Q 内无解的事实表明，乘方运算的一个逆运算——开方、在有理数范围内不能完全实施。

数的扩充方法一般有两种。一种是在已建立的数系 A 中添加一类新数的集合 $\bar{A}$，构成扩集 B，即 $B=A\cup\bar{A}$。例如初一代数课本中，在非负有理数集 Q_0^+ 基础上补充负有理数集 Q^-，构成有理数集 $Q=Q_0^+\cup Q^-$。另一种方法是先用旧数集 A 中的数为材料构成一个新数集 B，然后指出新数集 B 中某一真子集与 A 相等(严格讲，是 B 的某个真子集与 A 同构)，复数系的建立就是采用这一种方法。

从数集 A 扩充为数集 B，不论采用哪一种方法，都必须遵循下列原则：

(1) $A\subset B$，即集 A 是集 B 的真子集；

(2) 集 A 中已定义的元素之间的基本关系和运算，在集 B 中也有相应的定义，并且集 B 中的定义，对于 B 的子集 A 中的元素来说，与原来 A 中的定义一致；

(3) 在 A 中无解的某类方程，在集 B 中有解；

(4) B 是满足上述三个原则的 A 的所有扩充中的最小扩充。

在以后各节中，我们将依次讨论数的每一次扩充。在研究新数集的形成时，也要确定新数集中加法与乘法运算的定义、顺序关系的定义等。这样，通过数的理论体系的建立，进一步掌握近代数学观点和方法，同时也为“居高临下”地分析、处理中学教材中有关数的内容打下良好基础。

注记 1 设 S 是个非空集合，如果存在一个法则“$\cdot$”，使对 S 的任意两个元素都有 S 中唯一确定的元素与之对应，则称“$\cdot$”是 S 的一个二元

代数运算，S 对运算“$\circ$”构成一个代数结构，记为 $(S, \circ)$。

在$(S, \circ)$中，如果运算“$\circ$”满足下列条件：

(1) (结合律) $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$, a、b、$c\in S$;

(2) 存在单位元 I，使 $I\circ a=a\circ I$, $\forall a\in S$;

(3) 对 S 中任一元素 a，存在逆元 a^{-1}，使

$$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=I.$$

则称$(S, \circ)$为群，用G表示之．如果“$\circ$”还满足

(4) (交换律) $a\circ b=b\circ a$, a, $b\in S$.

则称G为交换群。

在$(S, \circ)$中，如果“$\circ$”仅满足结合律，但未必有单位元或逆元，则称 S 为半群。

如果$(S, +)$是交换群，$(S, \circ)$是半群，且满足“$\circ$”对“$+$”的分配律，即

(5) $a\circ(b+c)=a\circ b+a\circ c$, a、b、$c\in S$.

则称代数结构$(S, +, \circ)$是个“环”．在环$(S, +, \circ)$中，如果运算“$\circ$”满足交换律，并且单位元与非零元素的逆元存在，则称 $(S, +, \circ)$ 是个“域”。

注记 2 如果集合 S 的元素之间有一个关系“$<$”满足

(1) 反自反性：$a\not< a$, $\forall a\in S$;

(2) 传递性：若 $a<b$, $b<c$, 则 $a<c$;

(3) 全序性：对 S 中任两个元素 a、b，下列三种情况有且仅有一种成立：

$$a<b,\ a=b,\ b<a,$$

则称 S 是全序集，记为$(S, <)$。

§1.2 自 然 数

自然数是人类最早认识的数，它有两个作用：一是计数，二是排序。因此，相应的自然数理论有自然数的基数理论和

序数理论两种，本节主要介绍自然数的序数理论。

19 世纪中叶，在数学公理化思潮影响下，皮亚诺 (G. Peano) 在 1889 年建立了自然数的序数理论。这种理论以两个不加定义的概念“集合”、“后继”为基础，通过一组公理来刻划自然数关于顺序的基本性质。

定义 1 非空集合N中的元素叫做自然数，如果N的元素之间有一个基本关系“后继” (b 后继于 a，记为 $b=a'$) 并满足下列公理：

(1) $1\in N$，1不是N中任何元素的后继元素；

(2) 对N中任何元素 a，有唯一的 $a'\in N$；

(3) 对N中任何元素 a，如果 $a\neq 1$，则 a 必后继于N中某一元素 b；

(4) (归纳公理) 如果 $M\subseteq N$，且

① $1\in M$；

② 若 $a\in M$，则 $a'\in M$。

那么，$M=N$。

这个系统称为皮亚诺公理系统。

显然，我们日常所用的自然数满足上述定义。反之，如果把N中的 1 放在最前面，后面紧跟它的后继数，以此类推，可把N中元素排成一列：$1, 1', (1')', \cdots$。如果选用适当的符号，如记 $1'=2$, $2'=3$, $\cdots$，便是我们所熟悉的自然数列：$1, 2, 3, 4, \cdots$。

在皮亚诺公理基础上，可以定义自然数的加法、乘法运算。

定义 2 自然数的加法是指这样的对应：对于每一对自然数 a、b，有且仅有一个自然数(记为 $a+b$) 与之对应，且具有下列性质：