数学公共基础课程解题分析与考研辅导丛书

新编概率论与数理统计解题分析与考研辅导

XINBIAN GAILULUN YU SHULI TONGJI JIETI FENXI YU KAOYAN FUDAO

秦 衍 朱坤平 林爱红

主编

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

数学公共基础课程解题分析与考研辅导丛书

新编概率论与数理统计
解题分析与考研辅导

秦　衍　朱坤平　林爱红　主编

编委会名单

王　薇　方　民　黄文亮

俞绍文　温　涛　王　桢

王　汀　王臻臻　廖盼盼

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

新编概率论与数理统计解题分析与考研辅导/秦衍,朱坤平,林爱红主编.
—上海:华东理工大学出版社,2013.9
ISBN 978-7-5628-3622-3

Ⅰ.①新…　Ⅱ.①秦…②朱…③林…　Ⅲ.①概率论—研究生—入学考试—题解②数理统计—研究生—入学考试—题解　Ⅳ.①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 178704 号

数学公共基础课程解题分析与考研辅导丛书

新编概率论与数理统计解题分析与考研辅导

主　　编 / 秦　衍　朱坤平　林爱红
责任编辑 / 郭　艳
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 肖　车　裘幼华
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　址:上海市梅陇路 130 号,200237
电　话:(021)64250306(营销部)
(021)64252174(编辑室)
传　真:(021)64252707
网　址:press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 常熟华顺印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 16.75
字　　数 / 445 千字
版　　次 / 2013 年 9 月第 1 版
印　　次 / 2013 年 9 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-3622-3
定　　价 / 36.00 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn
官方微博 e.weibo.com/ecustpress
淘宝官网 http://shop61951206.taobao.com

前言

为了帮助广大在校学生学好“概率论与数理统计”这门课程，同时也为了帮助部分有志攻读研究生的自学者复习概率论与数理统计，掌握概率统计处理问题的思想方法，我们总结了在教学中积累的大量资料和汇集的考题，编写了这本与夏宁茂主编的《新编概率论与数理统计》配套使用的同步辅导书.

本书对原教材内容做了归纳总结，围绕原教材中的内容逐章编写，每章包括大纲要求、知识总结构图、本章基本内容、例题分析、习题全解等几个栏目. 在编写时力求突出以下特点：

1. 大处着眼，小处入手.

一方面，本书通过每章的知识结构图，从整体上展现了概率统计的主要概念、理论、方法及其关联，在宏观结构上理顺各知识点的内在的逻辑顺序和结构，帮助学生全面理解、把握知识点. 另一方面，通过每章的例题分析，我们对一些典型例题进行了细致的分析，帮助学生快速抓住问题的关键和本质，提高学生的综合分析问题和解决问题的能力.

2. 突出重点，简明扼要.

在书的每章基本内容中，我们对原教材中的基本内容和方法理论都用心进行整理，分门别类、归纳成表. 在微观上不但简单明了地表述各知识点的局部基本概念，帮助学生全面、系统地掌握原教材的基础知识，同时也便于学生复习和查找.

3. 总结到位，考研准备.

在每章的例题分析中，增加了注意要点、解题思路和分析，帮助学生总结解题经验，避免常犯的错误. 在例题选择中，我们收集了近年来的部分考研试题，使学生能在巩固基础的同时提高解题能力. 本书对教材中所有习题都作了详尽的解答，可以解决学生在学习课程中遇到的问题.

本书第 1 章到第 4 章由秦衍编写，第 5 章、第 6 章由林爱红编写，第 7 章、第 8 章由朱坤平编写. 感谢王桢为本书的编写所做的工作，感谢华东理工大学理学院鲁习文教授、李建奎教授、夏宁茂教授对我们的支持. 同时，在编写过程中得到了华东理工大学教务处的大力支持，在此也深表谢意.

由于水平有限，不足与不当之处在所难免，欢迎广大师生批评指正.

目 录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　大纲要求

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算.
2. 了解事件频率的概念，了解概率的统计定义.
3. 理解概率的古典定义和几何定义，能计算简单的古典型概率.
4. 知道概率的公理化定义，掌握概率的基本性质及概率加法定理.
5. 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法定理、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式，并会应用这些公式进行概率计算.
6. 理解事件的独立性的概念，并掌握有关事件的概率计算方法.

1.2　知识总结构图

- 随机事件与概率
  - 随机事件
    - 概念
      - 随机现象
      - 随机试验
      - 样本点
      - 样本空间
      - 随机事件
    - 特殊事件
      - 必然事件Ω
      - 不可能事件$\varnothing$
      - 基本事件
    - 关系和运算
      - 子事件$A\subset B$
      - 相等$A=B$
      - 和事件$A\cup B$
      - 积事件$A\cap B$
      - 差事件$A-B$
      - 互不相容 $A\cap B=\varnothing$
      - 对立事件 $\bar{A}=\Omega-A$
      - 划分
      - 运算规律
        - $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$
        - $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
        - $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
        - $\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n$
        - $\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n$
  - 概率
  - 独立性

- 随机事件与概率
  - 随机事件
  - 概率
    - 概率的统计定义
      - 频率 — $f_n(A)=\dfrac{A\text{ 出现的次数 }m}{\text{总的试验次数 }n}$
      - 频率的稳定值
    - 概率的几何定义 — $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}$
    - 概率的古典定义 — $P(A)=\dfrac{A\text{ 包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}=\dfrac{A\text{ 的有利事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}$
    - 概率的公理化定义
      - 实值集合函数 $P(A)$ 满足:
      - (1) 非负性:$P(A)\geqslant 0$.
      - (2) 规范性:$P(\Omega)=1$.
      - (3) 可列可加性:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容,则有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$
    - 条件概率 — $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$
    - 性质
      - $P(\varnothing)=0$
      - $0\leqslant P(A)\leqslant 1$
      - 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_i$ 互不相容,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$
      - $P(\bar{A})=1-P(A)$
      - $P(A-B)=P(A)-P(AB)$
      - 如果 $B\subset A$,则 $P(B)\leqslant P(A)$
    - 计算公式
      - 加法公式 — $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
      - 乘法公式 — $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$
      - 全概率公式 — $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$
      - 贝叶斯公式 — $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}$
  - 独立性
    - 事件的独立
      - 两两独立
      - 相互独立
      - 独立事件的和(积)的计算公式
        - $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$
        - $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\cdots(1-P(A_n))$
    - 试验的独立

1.3 本章基本内容

1.3.1 随机事件及其运算

表 1-1 基本概念

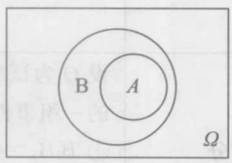
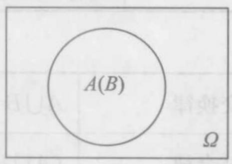
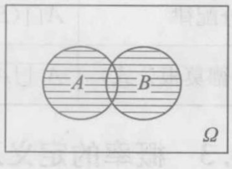
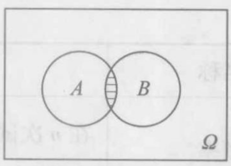
名称	定义	说明
随机现象	在一定条件下,事情结果可能有多种,且预先不一定知道何种结果将会发生的不确定现象	

续 表

名称	定义	说明
随机试验	试验的可能结果有多种，且能事先明确试验的所有可能结果，在试验之前不能确定何种结果将会发生的试验	一般要求满足：①相同条件下可重复试验；②试验的结果是可观察的；③每次的试验结果是事先不可预知的
样本点	随机现象的每种基本结果，记为 ω	
样本空间	由随机现象的所有的结果(样本点)全体构成，记为 Ω	
随机事件	由某些样本点 ω 构成的集合，即 Ω 的子集，记为 A，B，…	随机事件除了语言表示或集合 A,B 表示外，从第 2 章起将用随机变量来表示
事件 A 发生	A 是一个事件，当且仅当试验中出现的样本点 $\omega \in A$	
必然事件	所有样本点构成的集合，用 Ω 表示	试验中一定发生的事件
不可能事件	不包括任何样本点的空集，用 $\varnothing$ 表示	试验中一定不发生的事件
基本事件	由一个样本点组成的单点集	

1.3.2 事件的关系和运算

表 1-2 关系与运算

名称	定义	图例与说明
子事件	如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称 A 被包含于 B，或称 B 包含了 A，记为 $A \subset B$	 $\varnothing \subset A \subset \Omega$
事件的相等	若 $A \subset B$，$B \subset A$ 同时成立，此时 A 与 B 称为相等，记作 $A=B$	
和事件	“A 与 B 中至少有一事件发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A \cup B$ 或 $A+B$	
积事件	“A 与 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A \cap B$ 或 AB	

续 表

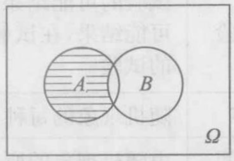
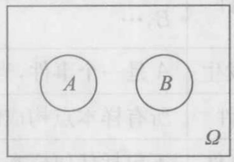
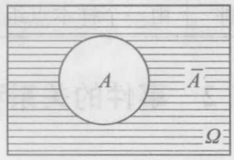
名称	定义	图例与说明
差事件	事件“A 发生而 B 不发生”称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$	 $A-B=A-AB=A(\Omega-B)$
互不相容（互斥）	如果事件 A、B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则 A、B 称为互不相容	
对立事件（逆事件）	事件 A 不发生，即事件 $\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$	 一般有 $\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$，事件 A 与事件 B 互为对立事件当且仅当：① $AB=\varnothing$；② $A+B=\Omega$
划分	设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件，若 ① $B_iB_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$； ② $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$， 则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分	

表 1-3 运算律

交换律	$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
对偶律（德莫根公式）	$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n},\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$

1.3.3 概率的定义及性质

表 1-4 概率的定义

名称	定义
频率	在 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 m，则称 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率

续　表

名称	定义
概率的统计定义	在相同条件下重复做 n 次试验，若 n 次试验中事件 A 发生的次数为 m，当试验次数 n 很大时，如果频率 $f_n(A)$ 稳定在某一数值 p 附近，则数值 p 称为随机事件 A 发生的概率，记作 $P(A)=p$. 简单地说，"概率是频率的稳定值"
概率的几何定义	如果样本空间 Ω 是某几何区域，该区域的"测度"(一维时指"长度"，二维时指"面积"等)为 $S_\Omega(S_\Omega<\infty)$，假设任意一点落入测度相等的子区域(形状可以不同)是等可能的. 以事件 A 表示 Ω 的某个子区域，S_A 为子区域 A 的测度，则事件 A 发生的概率定义为 $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}$
概率的古典定义	如果样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，其中 n 是有限数(有限性)，且 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 发生的机会相等(等概性)，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$，定义随机事件 A 的概率为 $$P(A)=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\Omega\text{中样本点总数}}=\frac{A\text{的有利事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}=\frac{k}{n}$$
概率的公理化定义	设 Ω 为一个样本空间，A 为其中的任一随机事件，实值集合函数 $P(A)$ 称为 Ω 上事件 A 的概率，如果它满足以下三个公理： 公理1(非负性)　$P(A)\geqslant 0$; 公理2(规范性)　$P(\Omega)=1$; 公理3(可列可加性)　对于可列无穷个互不相容的随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有 $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

表1-5　概率的性质

不可能事件的概率	$P(\varnothing)=0$	
非负性	$0\leqslant P(A)\leqslant 1$	
有限可加性	如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$	对于任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$
对立事件的概率	$P(\bar{A})=1-P(A)$	
减法公式	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$	如果 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$
单调性	如果 $B\subset A$，则 $P(B)\leqslant P(A)$	
加法定理	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$	$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

1.3.4　条件概率

表1-6　条件概率

定义	设 A,B 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中的两个事件，$P(B)>0$，则 $P(A\|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 称为在事件 B 发生条件下，事件 A 发生的条件概率

续 表

性质	(1) 满足概率的三条公理: 公理1(非负性) $P(A\|B)\geqslant 0$; 公理2(规范性) $P(\Omega\|B)=1$; 公理3(可列可加性) 对于可列个互不相容的随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid B)$ (2) 满足概率的其他性质(见表1-5)

表1-7 乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式

乘法定理	两个事件	若 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B\|A)$
	n 个事件	若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则 $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=P(A_1)P(A_2\|A_1)P(A_3\|A_1A_2)\cdots P(A_n\|A_1A_2\cdots A_{n-1})$
全概率公式	设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分,若 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任一事件 A,有 $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$	
贝叶斯公式	设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分,若 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,$P(A)>0$,则 $P(B_i \mid A)=\dfrac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$	

1.3.5 独立性

表1-8 独立性

名称		定义	性质
事件的两两独立		对于 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若其中任意两个事件满足: $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$, 则称这 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立	
事件的相互独立	两个事件	若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称随机事件 A 与 B 相互独立	若事件 A 与 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立
	有限个事件	对于 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件都满足: $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$, 则称这 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立	若 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则将其中任何 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个事件换成相应的对立事件,形成的 n 个新的事件仍相互独立
试验的相互独立	两个随机试验	如果一个随机试验的任一结果与另一个随机试验的任一结果相互独立,则称这两个随机试验相互独立	
	有限个随机试验	如果 n 个随机试验(对应)的任意 n 个结果相互独立,则称这 n 个随机试验相互独立	

表1-9 n个相互独立事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和(积)的概率计算

积事件的概率	$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$
和事件的概率	$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$ $=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\cdots(1-P(A_n))$

1.4 例题分析

在概率论中通常要讨论的是随机事件的概率，因此我们需要研究这些事件之间的关系和运算，以便能够将用语言描述的复杂事件表示为某些事件的集合运算，进而利用概率的性质来计算事件的概率.学会用一组符号表述所讨论的事件是非常重要的.读者不但要知道事件的并、交、差等定义及其运算规律，而且还要学会将复杂事件用简单事件的并、交、差等运算来表示.

例1-1 设A,B,C表示三个随机事件，试将下列事件用A,B,C表示出来：

(1) A,B,C都发生；

(2) A,B,C都不发生；

(3) A,B,C不都发生；

(4) A,B,C中至少有一件事件发生；

(5) A,B,C中最多有一事件发生.

分析：可以从事件的关系及其运算的定义入手，构建上述事件的表达式.

解：(1) A,B,C都发生即同时发生，根据交事件的定义知A,B,C都发生的集合表示为ABC.

(2) 先分别考虑A,B,C不发生，即$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$，然后再用交事件得到$A,B,C$都不发生的集合表示为$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(3) A,B,C不都发生的对立事件为"A,B,C都发生"，故得到$\overline{ABC}$.

(4) 根据和(并)事件的定义知，A,B,C中至少有一件事件发生为$A\cup B\cup C$.

(5) 即"A,B,C中恰有一个发生"与"A,B,C都不发生"的和事件.按照A,B,C发生的次序，"A,B,C中恰有一个发生"依次有三个事件$A\overline{B}\overline{C}$、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{A}\overline{B}C$，这三个事件的和事件就是$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；"$A,B,C$都不发生"为$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，故"$A,B,C$中最多有一事件发生"为$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}=\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{B}\overline{C}=\overline{AB\cup AC\cup BC}$.

例1-2 (2004·数学三)在电炉上安装了4个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有2个温控器显示的温度不低于临界温度t_0，电炉就断电，以E表示事件"电炉断电"，而$T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$为4个温控器显示的按递增顺序排列温度值，则事件$E$等于(   ).

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　(B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　(C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　(D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

分析：本题的考点是两个事件相等的定义.四个选项中的$\{T_{(i)}\geqslant t_0\}$表示至少有$5-i$个温控器不低于临界温度t_0，注意到"只要有2个温控器显示的温度不低于临界温度t_0，电炉就断电"，于是有$E\subset\{T_{(i)}\geqslant t_0\}$，$i=1,2,3$，同时有$E\supset\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$，得到$E=\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$，故答案为(C).

答案：(C).

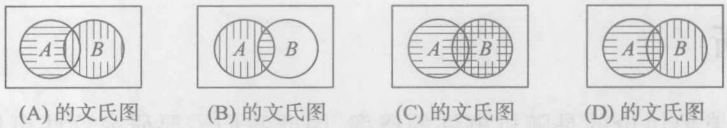
例1-3 A,B是两个随机事件，则下列关系正确的是(   ).

(A) $(A-B)+B=A$　(B) $AB+(A-B)=A$

(C) $(A+B)-B=A$　(D) $(AB+A)-B=A$

分析：事件(集合)运算与代数运算有较大的区别.在事件运算中和、差运算不能简单地正负抵

消,事件的结合律和交换律只有在纯粹的并或纯粹的交运算中成立,不能随便去掉运算中的括号.解决这类问题的关键在于正确理解事件运算的定义和性质,分析时可以借助于文氏图.注意到本题的四个选项的等式右边都是A,故分别给出四个选项左边的文氏图.例1-3图中横线表示选项左边的第一个事件,竖线表示选项左边的第二个事件,可见选项(A)的左边的运算结果为$A+B$,选项(C)为$A-B$,选项(D)也是$A-B$,而选项(B)的左边实际上等于$AB+A\bar{B}=A$,故答案为(B).



例 1-3 图

答案:(B).

如果所讨论的某个概率问题的样本空间Ω为几何区域("测度"为S_Ω),且样本点落在某个子区域A(形状可以不同)仅与该区域的"测度"S_A成正比,则事件A发生的几何概率定义为$P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}$.

例 1-4 两艘轮船都要停靠同一泊位,它们可能在一昼夜的任意时间到达,设两船停靠泊位的时间分别为1小时和2小时,求一艘轮船停靠泊位时需要等待空出码头的概率.

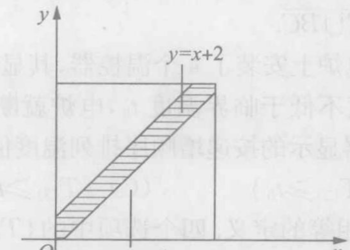
分析:设甲、乙两艘轮船到达泊位的时刻分别为x,y.我们将在xy平面上讨论一艘轮船停靠泊位时需要等待空出码头的概率.

解:设甲、乙两艘轮船到达泊位的时刻分别为x,y时刻(单位:小时),则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24\}.$$

由于两船停靠泊位的时间分别为1小时和2小时,若以事件A表示"一艘轮船停靠泊位时需要等待空出码头",于是有$A=\{(x,y)\mid 0\leqslant x-y\leqslant 1,0\leqslant y-x\leqslant 2\}$,即例1-4图中的阴影部分,得到一艘轮船停靠泊位时需要等待空出码头的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{24^2-\frac{1}{2}(22^2+23^2)}{24^2}\approx 0.121.$$

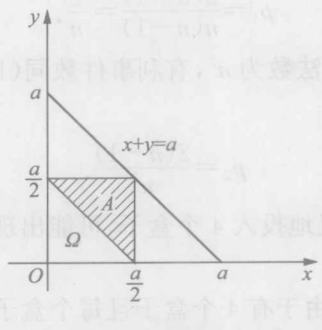


例 1-4 图

例 1-5 将长为a的细棒折成三段,求这三段能构成三角形的概率.

分析:设三段长为x、y、z,它们满足$x+y+z=a$,$x>0$,$y>0$,$z>0$.上述条件可简写为$x>0$,$y>0$,$x+y<a$(由于$z=a-x-y>0$).所以,样本空间(例1-5图)为

$$\Omega=\{(x,y)\mid x>0,y>0,x+y<a\}.$$



例1-5图

注意到三段棒长要构成一个三角形，必须满足 $x+z>y,y+z>x,x+z>y$，由于 $z=a-x-y$，上述条件等价于 $x+y>\frac{a}{2},x<\frac{a}{2},y<\frac{a}{2}$. 在例1-5图中给出满足这三个条件的区域 A.

解：如例1-5图所示，Ω 对应的区域是一个直角边长为 a 的等腰直角三角形，故面积为 $S_\Omega=\frac{a^2}{2}$；又事件 A 表示“三段长能构成三角形”，其对应的区域为图中的阴影部分，面积为 $S_A=\frac{a^2}{8}$. 因此，所求的概率为 $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{a^2/8}{a^2/2}=\frac{1}{4}$.

在古典概型的计算中，随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}=\frac{k}{n}.$$

其中关于样本点个数的计数问题有很大的技巧性，例如常讨论的问题：从 n 个元素中抽取 r 个元素($1\leqslant r\leqslant n$)有多少种抽法？这就需要按每次抽取后是否放回和所抽到的 r 个元素是否要考虑不同次序而分成以下四种情况：

样本点的计数	计序	不计序
放回	n^r	C_{n+r-1}^r
不放回	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$	C_n^r

此外还要根据具体问题利用加法原理、乘法原理、排列、组合等方法来计数. 另外记住几个有用的模型很有必要，例如摸球问题、超几何分布等.

例1-6 一个匣子里装有 $1,2,\cdots,n$ 的标签今随机地依次选取两张标签，假如

(1) 标签的选取是不放回的；(2) 标签的选取是有放回的.

求两张标签上的数字为相邻整数的概率.

分析：在样本空间的样本点总数过程中，若标签的选取是不放回的，可采用排列数计数；若标签的选取是有放回的，则采用 n^r 计数. 由于两张标签上的数字为相邻整数，因此可设两张标签分别为 i 和 $i+1$，考虑到 i 可取的方法数有 $n-1$，再考虑两张标签可对调顺序，因此两张标签上的数字为相邻整数的方法数为 $2(n-1)$.

解：(1) 若选取是不放回的，则总方法数为 $n(n-1)$，而两张标签上的数字为相邻整数的方法数为 $2(n-1)$，故两张标签上的数字为相邻整数的概率为

$$p_1=\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}.$$

(2) 若选取是有放回的,则总方法数为 n^2,有利事件数同(1),故两张标签上的数字为相邻整数的概率为

$$p_2=\frac{2(n-1)}{n^2}.$$

例 1-7 把 4 个不同的球随机地投入 4 个盒子,可能出现 0、1、2、3 个空盒,分别求出空盒数为 0、1、2、3 的概率.

分析:对这样的古典概型问题,由于有 4 个盒子且每个盒子放入的球是不同,因此样本空间的样本点总数可以按照有次序的、有放回的方式计数.再根据空盒子个数,计数所求事件的样本点个数.

解:设事件 A_i 表示有 i 个空盒子,$i=0,1,2,3$. 注意到每个球都可以投入 4 个盒子中的任意一个,且球是不同的,故样本空间的样本点总数为 4^4. 对于事件 A_0,没有空盒子意味着每个盒子里有且只有一个球,由排列数得到事件 A_0 的样本点个数为 $4!$,故没有空盒子的概率为

$$P(A_0)=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}.$$

事件 A_1 即有 1 个空盒子,这意味着有 1 个盒子中有 2 个球,2 个盒子中有 1 个球,先讨论盒子的选取方法有 $C_4^1C_3^2$,再计算球的计数为 $C_4^2\cdot 2!$,得到事件 A_1 的样本点个数为 $C_4^1C_3^2\cdot C_4^2\cdot 2!$,故有 1 个空盒子的概率为

$$P(A_1)=\frac{C_4^1C_3^2\cdot C_4^2\cdot 2!}{4^4}=\frac{9}{16}.$$

讨论事件 A_2,有 2 个空盒子意味着可能有 1 个盒子中有 3 个球和 1 个盒子中有 1 个球,也可能有 2 个盒子中各有 2 个球,由于 1 个盒子中有 3 个球和 1 个盒子中有 1 个球的方法有 $C_4^1C_3^1C_4^3$,在 2 个盒子中各有 2 个球的方法有 $C_4^2C_4^2$,得到事件 A_2 的样本点个数为 $C_4^1C_3^1C_4^3+C_4^2C_4^2$,故有 2 个空盒子的概率为

$$P(A_2)=\frac{C_4^1C_3^1C_4^3+C_4^2C_4^2}{4^4}=\frac{21}{64}.$$

事件 A_3 即有 3 个空盒子,这意味着所有的球都放在同一个盒子里,只要讨论盒子的选取即可,得到事件 A_3 的样本点个数为 C_4^1,故有 3 个空盒子的概率为

$$P(A_1)=\frac{C_4^1}{4^4}=\frac{1}{64}.$$

利用概率的性质进行概率的运算是常见的题目.解题的关键是要理解基本概念,掌握运算公式.我们需要记住一些概率性质,例如对立事件的概率 $P(A)=1-P(\overline{A})$;概率的加法公式为 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;概率的减法公式为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 等.

例 1-8 (2009・数学三)设事件 A 和事件 B 互不相容,则( ).

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$ (B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$ (D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

分析:本题涉及事件的互不相容、独立等概念.利用表 1-3 的对偶律以及表 1-5 对立事件的概率知 $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)$,一般 $P(A\cup B)$ 不为 0,故排除(A);(B)意味着事件 A 和事件 B 相互独立,但是从条件事件 A 和事件 B 互不相容,即 $P(AB)=0$,我们无法确定 $P(A)$ 或 $P(B)$ 是否有一个为 0,故排除(B);事件 A 和事件 B 互不相容,也无法得到(C),将其排除;根据对偶律以及对

立事件的概率知 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(AB)=1$，故答案为(D).

答案：(D).

例 1-9　设 A、B、C 为三个事件，且 $P(A)=a$，$P(B)=2a$，$P(C)=3a$，$P(AB)=P(AC)=P(BC)=b$，证明：$a\leqslant\frac{1}{4}$，$b\leqslant\frac{1}{4}$.

分析：本题利用概率的非负性、规范性、加法公式、单调性等概率性质来证明. 注意到 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=3a-b$，$P(A\cup C)=4a-b$，$P(B\cup C)=5a-b$，又由于 $ABC\subset AB$，得到 $P(ABC)\leqslant P(AB)=b$，故 $P(A\cup B\cup C)=6a-3b+P(ABC)\leqslant 6a-2b$，要使前面所有的概率都不大于 1，只要求 $5a-b\leqslant 1$ 即可. 同样由于 $AB\subset A$，得到 $b=P(AB)\leqslant P(A)=a$，类似地有 $b=P(AB)\leqslant P(B)=2a$，$b=P(AC)\leqslant P(C)=3a$，归纳为 $b\leqslant a$，于是有 $4a\leqslant 5a-b\leqslant 1$，得到所要的结论.

证明：因为 $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=5a-b\leqslant 1$ 和 $b=P(AB)\leqslant P(A)=a$，所以 $4a\leqslant 5a-b\leqslant 1$，得到 $b\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$.

例 1-10　一袋中装有 $n-1$ 只黑球和 1 只白球，每次从袋中随机地取出一球，并换入一只黑球，问第 k 次取到黑球的概率是多少？

分析：本题直接计算是困难的. 注意到只有一只白球，且以后放入的都是黑球，因此考虑它的对立事件"第 k 次取到白球"的概率，即前 $k-1$ 次取出黑球，且换入黑球，这样就可以利用古典概率计算了.

解：设事件 A 表示第 k 次取到黑球，则

$$P(\bar{A})=\frac{(n-1)^{k-1}\times 1}{n^k}.$$

于是第 k 次取到黑球的概率为

$$P(A)=1-\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}.$$

在条件概率定义概率 $P(A|B)$ 时，必先要求 $P(B)\neq 0$. 可以利用数学展开式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 计算，也可以直接观察 B 的样本中 A 所占样本的个数，它与 B 的样本个数之比即为概率 $P(A|B)$，要根据所讨论的问题具体分析.

例 1-11　一袋中装有 a 个黑球，b 个白球，先后两次从袋中各取一球(不放回).

(1) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；

(2) 已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率；

(3) 已知取出的两个球中有一个是黑球，求另一个也是黑球的概率.

分析：问题(1)可以直接观察第二次取球时，白、黑球个数来计算；问题(2)利用数学展开式 $P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}$ 计算，其中的 $P(A_1A_2)$、$P(A_2)$ 可利用古典概率的方法计算；问题(3)中"取出的两个球中有一个是黑球"就是"取出的两个球中至少有一个是黑球"，记为 $A_1\cup A_2$. 在取出的两个球中有一个是黑球条件下，另一个也是黑球，即两个都是黑球，可利用数学展开式 $P(A_1A_2|A_1\cup A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1\cup A_2)}$ 计算，可用加法定理计算 $P(A_1\cup A_2)$.

解：设事件 A_i 表示"第 i 次取到的是黑球"，$i=1,2$，则

(1) $P(A_2|A_1)=\frac{a-1}{a+b-1}$；