高等学校教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　傅　媛
副主编　王玉霞　曾京京
主　审　彭斯俊

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　傅　媛
副主编　王玉霞　曾京京
主　审　彭斯俊

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/傅媛主编. —武汉:武汉大学出版社,2013.2(2013.11重印)
ISBN 978-7-307-10546-1

Ⅰ.线… Ⅱ.傅… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 039168 号

责任编辑:郭 芳　　责任校对:孙 丽　　装帧设计:吴 极

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:whu_publish@163.com 网址:www.stmpress.cn)
印刷:武汉兴德林工贸有限公司
开本:787×960 1/16 印张:11.75 字数:230 千字
版次:2013 年 2 月第 1 版 2013 年 11 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-307-10546-1 定价:20.00 元

前　　言

“线性代数”是高等院校各学科专业学生必修的一门重要的基础课程，其核心内容包括矩阵理论及向量空间理论，随着计算机科学日新月异地发展，许多非线性问题线性化及大型线性问题的可计算性正逐步加快实现，因此线性代数在理论和应用中的地位更趋重要.

我们根据最新的“线性代数”课程教学的基本要求，结合实际教学经验，落实教育部“卓越工程师教育培养计划”，为培养和造就创新能力强、适应经济社会发展需要的高质量的各类工程技术人才，在授课讲义的基础上编写了这本适用于不同教学要求的院校和专业的《线性代数》教材.

本书介绍了“线性代数”课程教学的基本内容和计算方法. 为了便于读者自学，轻松入门，我们以理论与实例相结合的方式，从具体到抽象的编写手法，力求做到语言精练、准确，内容通俗易懂. 书中每节配备了适量的例题和习题，每章配备了难度较高的总习题(供要求较高读者选做)，力求例题和习题新颖、典型，具有代表性和实用性，便于读者理解和掌握基本概念. 书末附有习题的较详细的参考答案或解题提示.

本书在武汉理工大学数学系朱金寿教授的指导下进行编写，他为本书的顺利编撰付出了大量心血，在此对他表示诚挚的感谢.

本书由武汉理工大学彭斯俊教授主审，参加审阅的还有朱长林教授，他们认真审阅了全部书稿并提出了不少宝贵意见和建议，对本书的编写作出了很大的贡献，在此特向他们表示衷心的感谢.

编者所在学校各级领导及数学教研室的老师们对本书的编撰等方面给予了极大支持，武汉大学出版社对本书的编审、出版给予了热情的帮助和支持，在此一并致谢.

由于时间仓促，水平有限，本书难免有不妥之处，恳请各位同行和广大读者在使用后提出意见，以便我们改进和完善.

编　者

2012 年 12 月

目　　录

1 行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念，它在数学的许多分支及其他学科中都有着广泛的应用. 本章我们主要讨论以下三个问题：

(1) 行列式的定义和性质；

(2) 行列式的计算方法；

(3) 克莱姆法则.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶、三阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题引出的，我们就从解线性方程组开始. 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

其中，$x_j\,(j=1,2)$为变量(或未知量)，$a_{ij}\,(i,j=1,2)$为变量的系数，$b_i\,(i=1,2)$为常数. 用高斯消元法，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得到方程组(1-1)的唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

为了便于记忆解的公式，我们引入记号

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ - \qquad\quad + \end{array} \tag{1-3}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称式(1-3)为**二阶行列式**，它含有两行两列(横排为**行**，竖排为**列**)，a_{ij} 称为行列式的**元素**，a_{ij} 的第一个下标 i 表示 a_{ij} 所在的行，称为**行标**，第二个下标 j 表示 a_{ij} 所在的列，称为**列标**$(i,j=1,2)$.

若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

则方程组(1-1)的解可简记为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1-4}$$

其中,$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$是由方程组(1-1)的系数按原来的顺序所得的行列式,称为方程组的**系数行列式**,$D_j(j=1,2)$是把系数行列式 D 的第 j 列元素分别用方程组右端的常数项代替所得的二阶行列式.

类似地,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-5}$$

记三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-6}$$

若系数行列式 $D\neq0$,则方程组(1-5)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1-7}$$

其中,$D_j(j=1,2,3)$是将系数行列式 D 的第 j 列换成方程组右端的常数项所成的三阶行列式.

上述解的公式(1-4)和公式(1-7)表明了方程组的解与其系数及常数项的关系,便于记忆与使用.

【例 1.1】 求解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3=1. \\ x_1-3x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

解 由式(1-6)得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)\times(-1)+(-1)\times2\times1+1\times2\times(-3)$$

$$-1\times2\times(-3)-(-1)\times2\times(-1)-1\times(-1)\times1=-2\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&-1&2\\-2&-3&-1\end{vmatrix}=-2,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&-2&-1\end{vmatrix}=-2,\quad D_3=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&-1&1\\1&-3&-2\end{vmatrix}=0$$

由式(1-7)得此方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=0$$

【例 1.2】 解方程

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0.$$

解 方程中的三阶行列式

$$D=3x^2+4x+18-9x-12-2x^2=x^2-5x+6$$

由 $x^2-5x+6=0$,得 $x_1=2,x_2=3$.

显然,三阶行列式的展开式有 6 项,其中每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号,其运算的规律性可用**"对角线法则"**来表述,既直观又快捷. 但对于高于三阶的行列式,对角线法则就不再适用了. 为方便求解多于三元的线性方程组,我们把二、三阶行列式进一步推广. 为此,我们先讨论排列及其性质.

1.1.2 排列及其逆序

定义 1 由自然数 1,2,…,n 按一定次序排成一排,称为一个 ***n* 级排列**(简称**排列**),记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如,1234 及 2431 都是 4 级排列,34215 是一个 5 级排列. 类似于排列 1234,按从小到大的顺序排成的排列称为**自然排列**.

定义 2 在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,若一个较大的数排在一个较小的数的前面,则称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**,记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

【例 1.3】 计算排列 32514 的逆序数.

解 3 排在首位,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有 1 个,逆序数为 1;

5 最大,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有 3 个,逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有 1 个,逆序数为 1.

于是,这个排列的逆序数为 $N(32514)=0+1+0+3+1=5$.

易知,排列 32514 是一个奇排列. 如果把其中任意两个元素互换位置,而其他元素不动,不难算出所得到的新排列是一个偶排列,这种作新排列的方法称为一次**对换**.

例如，将奇排列 32514 的前两个元素互换，得到的新排列 23514 是一个偶排列. 一般地有：

定理 一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变.

证 略.

推论 任一 n 级排列都可经过一定次数的对换变为自然排列 $12\cdots n$，并且所作对换次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

这是因为自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0，是偶排列，而一次对换改变排列的奇偶性，当原排列是奇（偶）排列时，必须作奇（偶）次对换才能变为自然排列. 故所作对换次数的奇偶性与原排列的奇偶性相同.

1.1.3 n 阶行列式的定义

定义 3 由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，左右两边各加一条竖线组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**. 它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，共$n!$ 项. 各项的符号是：当该项各元素的行标按自然顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列，则取正号；若是奇排列，则取负号. 因此行列式的**一般项**（或称**通项**）可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时，就得到 n 阶行列式的所有项，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-8}$$

式(1-8)等号右端称为**行列式的展开式**. 行列式有时简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$ 或 D.

注意 一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号混淆.

【例 1.4】 判断 $a_{12}a_{21}a_{43}a_{33}$ 和 $a_{32}a_{14}a_{43}a_{21}$ 是否是四阶行列式中的一项. 若是，试确定其符号.

解 因为 $a_{12}a_{21}a_{43}a_{33}$ 有两个元素都取自第三列，所以它不是四阶行列式的一般项；而 $a_{32}a_{14}a_{43}a_{21}$ 的行标排列是 3142，表示取自不同行，列标排列是 2431，表示取自不同列，所以它是四阶行列式的一项. 把该项的行标按自然顺序排列得 $a_{14}a_{21}$

$a_{32}a_{43}$，其列标排列的逆序数为 $N(4123)=0+1+1+1=3$，故该项带负号.

应当指出，n 阶行列式的一般项 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$，经过 m 次对换可变为自然排列 $12\cdots n$，同时，相应的行标由自然排列 $12\cdots n$ 也经过了 m 次的对换，记变为排列 $i_1i_2\cdots i_n$，即

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

由前面的推论得，对换次数 m 与 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 有相同的奇偶性，而 m 也与 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性，从而 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性，所以

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

由此可知，n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1-9}$$

下面根据定义计算两类最简单(含零较多)也很重要的行列式.

【例 1.5】 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1-10}$$

其中，**主对角线**(行列式中从左上角到右下角的对角线)下方未写出的元素全部为 0.

证 我们只需求出 D 的展开式中非零项的代数和即可. 非零项的 n 个因子在第一列中只能取 a_{11}，则第二列只能取 a_{22}，第三列只能取 a_{33}，…，第 n 列只能取 a_{nn}. 于是，此行列式除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外，其余各项均为 0. 又因为它的行标及列标均构成自然排列，其逆序数为 0，所以冠以正号. 于是行列式 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，即上三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

类似地，**下三角行列式**也等于主对角线上各元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-11}$$

显然，**对角行列式**(主对角线上的元素记为 λ_i，其余元素全为 0)

$$L=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{1-12}$$

习题 1.1

1. 计算二阶行列式$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$.

2. 三阶行列式$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$的充分必要条件是什么?

3. 求下列排列的逆序数:

(1) $2n(2n-2)\cdots642$;

(2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

4. 在六阶行列式$|a_{ij}|$中,求下列各项的符号.

(1) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$;

(2) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$.

5. 计算行列式$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$中$x^4$,$x^3$的系数.

6. 计算行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$.

1.2 行列式的性质

二阶行列式和三阶行列式可直接用定义计算,但当行列式的阶数较大时,直接用定义计算的计算量会很大. 为此,我们从定义推导出行列式的一些性质,以便简化行列式的计算.

1.2.1 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T} 或 D',即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然,D 也是 D^{T} 的转置行列式,即$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1 任意行列式与其转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 设 $D=\det(a_{ij})$,$D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$,由转置行列式的定义,有

$$a_{ij}=b_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则依行列式的定义有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D \end{aligned}$$

由此性质可知,行列式中行与列具有相同地位,所以行列式对行成立的性质对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号. 即若

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

则 $D=-D_1$.

证　设行列式 $D_1=\det(b_{ij})$ 是将行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的第 k 行和第 s 行互换得到的，即当 $i\neq k,s$ 时，$b_{ij}=a_{ij}$；当 $i=k$ 或 s 时，$b_{kj}=a_{sj}$，$b_{sj}=a_{kj}$，于是

$$\begin{aligned}D_1&=\sum(-1)^{N(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{kj_k}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{nj_n}\\&=\sum(-1)^{N(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_k}\cdots a_{kj_s}\cdots a_{nj_n}\\&=-\sum(-1)^{N(j_1\cdots j_s\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_s}\cdots a_{sj_k}\cdots a_{nj_n}\\&=-D\end{aligned}$$

其中第三步用了对换改变排列奇偶性的结论.

用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_j 表示第 j 列，互换第 i,j 行记为 $r_i\leftrightarrow r_j$，互换第 i,j 列记为 $c_i\leftrightarrow c_j$.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行(列)的每个元素，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

证　由行列式的定义，有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}&=\sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\&=k\sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\&=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

推论 1　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行(列)乘以数 k，记为 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$)；第 i 行(列)提出公因数 k，记为 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

推论 2 若行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则此行列式为 0.

推论 3 若行列式的某行(列)的元素全为 0,则此行列式为 0.

【例 1.6】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{vmatrix}.$$

解 行列式中,第二行、第三行和第三列分别有公因数 2,3,5,所以,由性质 3 可得

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \end{vmatrix} = 2\times 3\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 5\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -180$$

性质 4 若行列式的某行(列)的元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此性质可以推广到某行(列)的各元素为有限项之和的情形.

推论 若行列式的某一行(列)的元素皆为 m 个数的和,则此行列式等于 m 个行列式之和.

注意 一般来说,$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

利用性质 4 及性质 3 的推论,可得:

性质 5 行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \tag{1-13}$$

这是因为:式(1-13)右端的行列式等于两个行列式的和,其中一个行列式就是式(1-13)左端的行列式,而另一个行列式为零(第 i 行与第 j 行对应成比例).

以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,记作 r_i+kr_j;以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,记作 c_i+kc_j.

以上未证明的性质及推论留给读者自己证明.

【例 1.7】 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix}=0.$$

证 $D\xlongequal[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ a_3-a_1 & a_3-a_1 & a_3-a_1 \end{vmatrix}$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

注意 此例告诉我们,行列式的性质在计算行列式时可以连续使用,但要注意各个运算的先后次序一般不能颠倒,因为后一次的运算是作用在前一次运算的结果上的.

1.2.2 行列式性质应用

以上介绍了行列式的运算性质,利用这些性质可以简化行列式的计算,特别是用 r_i+kr_j 或 c_i+kc_j 可以把行列式中许多元素化为 0,使其成为上(下)三角行列式,从而算得行列式的值。化行列式为上三角行列式的步骤为:

(1) 利用行列式的性质,将第一列的第一个元素变为 1,然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行,使第一列除第一个元素外其余元素全为 0;

(2) 再用同样的方法处理去掉第一行和第一列后余下的低一阶行列式;

(3) 如此继续下去,直至使它成为上三角行列式,这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

可以证明:任何行列式总能利用行列式的性质化为上(下)三角行列式.

【例 1.8】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

分析:这个行列式的特点是每行(列)元素之和均为 6,先把后三列都加到第一列上去,再提出第一列的公因数 6,最后将后三行都加上第一行的(-1)倍,得到上三角行列式.