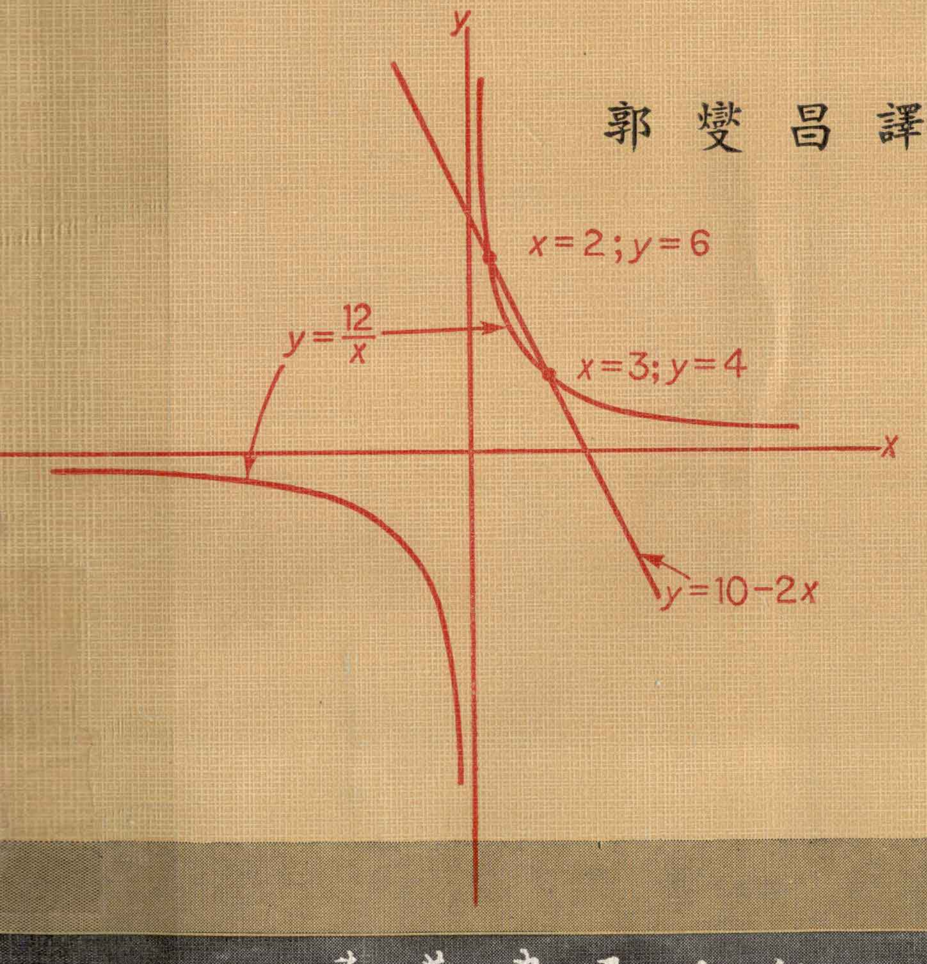
SERGE LANG

A First Course in Calculus

Second Edition

初等微積分

下冊



郭爕昌譯

東華書局印行

初等微積分

下　冊

編譯者　郭燮昌

東華書局印行

版權所有・翻印必究

中華民國五十九年一月初版
中華民國六十八年四月三版

大學用書　初等微積分（全二册）

下册　定價　新台幣六十元整

（外埠酌加運費滙費）

著者　郭　燮　昌

發行人　卓　鑫　淼

出版者　臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470　郵撥：6481

印刷者　中　臺　印　刷　廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證　局版臺業字第零柒貳伍號

（58035）

初 等 微 積 分

下 册 目 錄

第九章 積　分　法

第十章 積 分 之 性 質

第十一章 積分方法

第十二章 實例數則

第十三章 積分法的應用

第十四章　Taylor 公式

第十五章　級　　數

第十六章　複　　數

附錄 1. ϵ 與 δ

第九章

積　分　法

在本章將解出下列二問題:

(1) 已知一函數 $f(x)$，求一函數 $F(x)$ 使

$$F'(x)=f(x).$$

此爲微分法之逆,稱爲積分法.

(2) 已知一 $\geqq 0$ 之函數$f(x)$,不藉助於幾何直覺,爲曲線 $y=f(x)$ 下的面積作一定義.

事實上,在本章中,所述概念卽在解這兩個問題. 當已知特殊數據之計算方法,留待下章中再作討論.

處理問題 (2) 時，將用到 Archimedes 觀念,卽由很多個水平函數求一函數 f 的近似值,而由很多小矩形之和求 f 下之面積.

若對純理論不感與趣則稍具理論性的第 5,6 節可略去. 面積的幾何解釋已足可闡明定積分，而將積分比爲各小矩形面積和之極限的說法亦可滿足物理的應用. 基本定理的公理化可使詳論這幾節時大爲方便.

9.1 不定積分

設 $f(x)$ 爲定義於一區間上之函數,若 $F(x)$ 爲定義於同一區間上

之函數且

$$F'(x)=f(x)$$

則稱 F 爲 f 之不定積分 (indefinite integral). 若 $G(x)$ 爲 f 之另一不定積分,則亦得 $G'(x)=f(x)$. 故差 $F-G$ 之導數爲 0:

$$(F-G)'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

由第五章 §4. 之定理 3 知,必存在一數 C,使對區間上之所有 x,

$$F(x)=G(x)+C.$$

例 1. $\sin x$ 爲 $\cos x$ 之不定積分, $\sin x+5$ 亦爲 $\cos x$ 之不定積分.

例 2. $\log x$ 爲 $1/x$ 之不定積分. $\log x+10$ 或 $\log x-\pi$ 亦爲其不定積分.

下章中將述求不定積分的方法.在此,僅需察及只要有一個微分之公式,則對積分也有一對應公式.

函數 f 之不定積分通常寫爲

$$\int f \quad 或 \quad \int f(x)\,dx.$$

在第二種寫法中, dx 本身並無意義. $\int f(x)\,dx$ 整個一式才具意義. 在下章學到代入法時, 可知這種寫法的實用價值.

現利用各已知之導數,表列一些不定積分於下:

設 n 爲一整數, $n\neq-1$. 則有

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

若 $n=-1$, 則

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\log x.$$

(僅在區間 $x>0$ 內,此式爲眞.)

在區間 $x>0$ 內,也有

$$\int x^c\,dx=\frac{x^{c+1}}{c+1}$$

其中 c 爲任何 $\neq -1$ 之數.

下列各不定積分,對所有 x 皆成立.

$$\int \cos x\,dx=\sin x \qquad \int \sin x\,dx=-\cos x$$

$$\int e^x\,dx=e^x \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x$$

若 $-1<x<1$, 有

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x.$$

在實際應用中,通常不再說明函數定義之範圍,但在處理任一特定問題時,必須牢記此點.例如,若寫

$$\int x^{-1/3}dx=\frac{3}{2}\cdot x^{2/3},$$

對所有 $x>0$ 及 $x<0$ 皆成立.但 0 不能在函數的任何定義區間中,故當 $x<0$ 時,可有

$$\int x^{-1/3}dx=\frac{3}{2}\cdot x^{2/3}+5.$$

及當 $x>0$ 時,可有

$$\int x^{-1/3}dx=\frac{3}{2}\cdot x^{2/3}-2.$$

此後皆設不定積分爲定義於各區間上.故論函數 $1/x$ 時須分別考慮 $x>0$ 及 $x<0$ 兩種情形.當 $x>0$ 時,前已指出 $\log x$ 爲一不定積分,而 $x<0$ 時亦可得一不定積分,事實上,若 $x<0$,

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x).$$

當 $x<0$ 時，$-x$ 爲正，故 $\log(-x)$ 有意義，由連鎖律可證知，$\log(-x)$ 之導數等於 $1/x$.

若 $x<0$，任何其他不定積分爲

$$\log(-x)+C,$$

其中 C 爲一常數.

有時，將此二種情形述爲

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|+C.$$

由於以上所規定者，此式不具任何意義，因函數並非定義於區間上（因 0 不能屬於它）.在任何情形下，此式皆可能爲誤，實際上，對 $x<0$ 有

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|+C_1,$$

而對 $x>0$ 有

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|+C_2.$$

但兩常數不必須相等，因此不能寫爲

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|+C.$$

現特重申，規定各積分皆定義於區間上.當處理對數時，則設$x>0$.

習 題 9.1

求下列各函數之不定積分：

1. $\sin 2x$ 2. $\cos 3x$ 3. $\dfrac{1}{x+1}$ 4. $\dfrac{1}{x+2}$

(在最後二題中,指明求得不定積分所在之區間.)

9.2 連續函數

設 f 爲一函數,若對所有使函數有意義之 x,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$$

則稱 f 爲**連續** (continuous).

當取極限值時, h 之值須使 $f(x+h)$ 有意義才可.例如,若 f 定義於區間

$$a\leqq x\leqq b$$

(設 $a<b$), 若

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h)=f(a),$$

則稱 f 在 a 爲連續.因若 $h<0$, 函數在 $a+h$ 可能無意義, 所以不能取 $h<0$.

就幾何觀點言之,若圖形沒有中斷之處, 則稱函數爲連續, 所有可微分函數皆爲連續.前已說明此點,因若

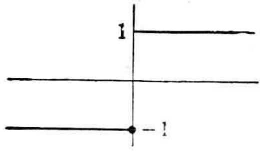
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

有一極限,則

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x)=\lim_{h\to 0} h\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

下二圖爲不連續函數之圖形.



右上圖中,其函數爲

若 $x\leqq 0$, $f(x)=-1$

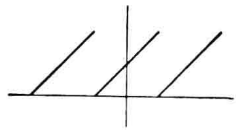
若 $x>0$, $f(x)=1$.

可知對所有 $h>0$,

$$f(0+h)=f(h)=1.$$

故 $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h)=1,$$

不等於 $f(0)$.



右邊下圖中的情形也一樣,

其圖形有中斷處.(看第三章 §2 之例 5.)

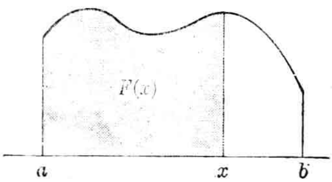
9.3 面 積

設有 $a<b$ 二數,並設 $f(x)$ 爲定義於區間 $a\leqq x\leqq b$ 上之連續函數.現欲求一函數 $F(x)$, 在此區間上可微分,且

$$F'(x)=f(x).$$

在本節中,將藉助於有關面積的幾何直覺.設對區間內所有 x, $f(x)\geqq 0$, 並定義函數 $F(x)$ 爲曲線下,a 與 x 間面積之數量.

下圖說明此事.



因之有 $F(a)=0$. a 與 a 之間的面積爲 0.

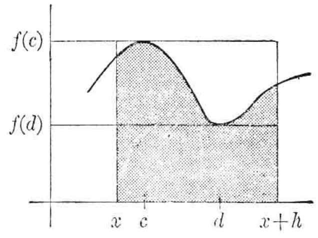
定理 1. 函數 $F(x)$ 爲可微分,其導數爲 $f(x)$.

【證】因 F 爲用幾何觀念定義之函數,亦必須由幾何方法證之.

牛頓商爲
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

先設 x 不等於端點 b, 並設僅論 $h>0$ 之值.

則 $F(x+h)-F(x)$ 爲 x 與 $x+h$ 間之面積.其放大圖形如下:



設 c 在閉區間 $[x,x+h]$ 內爲函數 f 在此小區間(small interval) 內有極大之一點. 設 d 在同一閉區間內爲函數 f 在此小區間內有極小之一點. 因之,對所有滿足

$$x\leqq t\leqq x+h$$

之 t, $f(d)\leqq f(t)\leqq f(c)$.

(現必須用另一字母, t, 因 x 已用過.)

曲線下, x 與 $x+h$ 間面積比上圖中之小矩形(亦即底爲 h, 高爲 $f(d)$ 之矩形) 面積爲大.

曲線下, x 與 $x+h$ 間面積比上圖中之大矩形 (亦即底爲 h, 高爲 $f(c)$ 之矩形)面積爲小.

由此可得

$$h \cdot f(d) \leqq F(x+h)-F(x) \leqq h \cdot f(c),$$

除以正數 h，則得

$$f(d) \leqq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqq f(c).$$

因 c,d 在 x 與 $x+h$ 之間，當 h 趨於 0 時，$f(c)$ 及 $f(d)$ 皆趨於 $f(x)$，故 F 之牛頓商在皆趨於 $f(x)$ 的兩數之間，因此亦必趨於 $f(x)$。故當 $h>0$ 時，定理 1 得證。

本定理之證明與求 $\log x$ 之導數相似，唯一不同之處，本定理之證明取其一極大及一極小之處，而不能指出其值如何，而函數 $1/x$ 則可以做到。此外，並無不同之處。

若 $x \neq a$，看 h 取負值之情形。其證明與上所述完全相似，並可得 F 之牛頓商在 $f(c)$ 與 $f(d)$ 之間，由讀者自行練習。

設可知道導數爲 $f(x)$ 之一函數 $G(x)$。則必存在一常數 C 使

$$F(x)=G(x)+C.$$

令 $x=a$，可得

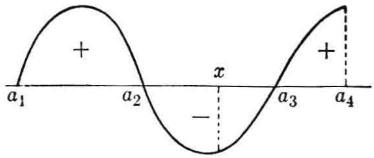
$$0=F(a)=G(a)+C.$$

故 $C=-G(a)$。因此，若令 $x=b$ 可得

$$F(b)=G(b)-G(a).$$

故曲線下，a 與 b 之間的面積爲 $G(b)-G(a)$。這在實用上非常有用，因通常可測知函數 $G(x)$。

若討論一連續函數 f 而其值在〔a,b〕上可能爲負時，仍可由面積之觀念求得函數 $F(x)$。但在函數爲負的部分須取 F 爲曲線下面積之負值。下圖可爲說明，在圖中，$F(x)$ 爲 a_1 與 a_2 間之面積減以 a_2 與 x 間之面積（x 爲圖中所示之點）。則同前法可得 $F'(x)=f(x)$。



故由幾何直覺,我們已求得其導數爲 $f(x)$ 之函數 $F(x)$.

例 1. 求曲線 $y=x^2$ 下, $x=1$ 與 $x=2$ 間的面積.

設 $f(x)=x^2$, 若 $G(x)=x^3/3$ 則 $G'(x)=f(x)$. 故曲線下在 1 與 2 間的面積爲

$$G(2)-G(1)=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}.$$

例 2. 求函數 $\sin x$ 的一弓形下之面積.

現欲求曲線下,0 與 π 間的面積. 設 $G(x)=-\cos x$, 則 $G'(x)=\sin x$. 故面積爲

$$\begin{aligned}G(\pi)-G(0)&=-\cos\pi-(-\cos 0)\\&=-(-1)-(-1)=2.\end{aligned}$$

注意此結果,正弦曲線由 0 至 π 之弓形, 看來爲一無理曲線, 其面積却爲整數 2.

習 題 9.3

求下列各曲線在各界限內之面積.

1. $y=x^3$, 在 $x=1$ 與 $x=5$ 之間.
2. $y=x$, 在 $x=0$ 與 $x=2$ 之間.
3. $y=\cos x$, 一個弓形.

4. $y=1/x$, 在 $x=1$ 與 $x=2$ 之間.

5. $y=1/x$, 在 $x=1$ 與 $x=3$ 之間.

6. $y=x^4$, 在 $x=-1$ 與 $x=1$ 之間.

7. $y=e^x$, 在 $x=0$ 與 $x=1$ 之間.

9.4 基本定理

上節中所證面積之導數等於函數 f 亦可由普通方法證明.事實上,若能如此,則可應用於更多方面,無論在理論方面(例如在 §6 中),及實際應用方面,如第十二章中曲線長度及所作的功.因之現先論述普遍的基礎,由此可證明定理 1.

定理 2. 設 a,d 二數 $a<d$. 設 f 爲定義於區間 $[a,d]$ 上之連續函數, 並設此區間内每二數 $b\leqq c$ 皆可與另一數 $I_b^c(f)$ 相關聯. 滿足下列二性質:

性質 1. 若 M,m 爲二數, 對於區間 $[b,c]$ 内所有 x,

$$m\leqq f(x)\leqq M$$

則有 $m(c-b)\leqq I_b^c(f)\leqq M(c-b)$.

性質 2. $I_a^b(f)+I_b^c(f)=I_a^c(f)$.

則函數 $x\mapsto I_a^x(f)$ 在區間 $[a,d]$ 上爲可微分, 且其導數爲 $f(x)$. 而上述之關係式爲唯一決定的.

【證】牛頓商爲

$$\frac{I_a^{x+h}(f)-I_a^x(f)}{h}$$