大学物理习题解答

第二册　电磁学部分

天　津　大　学

目　　录

第一章　真空中的静电场

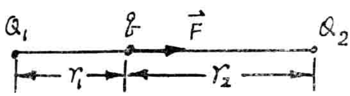
1—1　有两个点电荷 $Q_1=1\times10^{-6}$ 库伦，$Q_2=4\times10^{-6}$ 库伦，相距为7.5厘米，若在它们的连线上距 Q_1 为 2.5 厘米，距离 Q_2 为 5 厘米处放一个点电荷 $q=10^{-6}$ 库伦，求 q 所受的合力？

解：

$$F_{合}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1{}^2}-\frac{Q_2}{r_2{}^2}\right)$$

$$=9\times10^9\times10^{-6}\left[\frac{2\times10^{-6}}{(2.5\times10^{-2})^2}\right.$$

$$\left.-\frac{4\times10^{-6}}{(5\times10^{-2})^2}\right]=14.4\ (\text{牛顿})$$，其方向如图



2—1—1　题图

1—2　在真空中有两个小球，带着等量的电荷，测出在相距 5 厘米时，互相排斥的力是0.06牛顿，求每个小球所带电量是多少。并说明是同号电荷还是异号电荷。

解：　由 $F=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q\ q}{r^2}\longrightarrow q^2=\dfrac{F\cdot r^2}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$

$$q=\sqrt{\frac{F\cdot r^2}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}}=\sqrt{\frac{0.06\times(5\times10^{-2})^2}{9\times10^9}}=\sqrt{1.67\times10^{-14}}$$

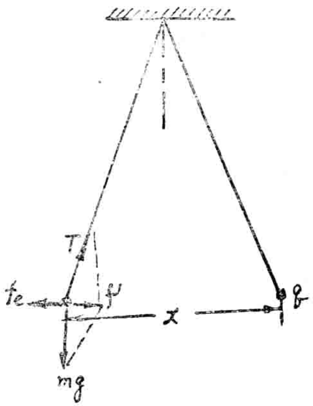
$$=1.29\times10^{-7}\text{库伦}$$

是同号电荷。

1—3　两个相同的小球，质量都是m，带等值同号的电荷q，各用长为l的丝线悬挂于一点，如图2—1—3所示。假设θ很小，可以$\sin\theta$代替$tg\theta$，试证

$$x=\left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$

式中x为两球间的距离。如果$l=1.2$米，$m=0.01$千克，$x=0.05$米，求q。



（2—1—3　题图）

证：　f'——T和mg的合力

f_e——排斥力

当$f_e=f'$时，小球处于平衡状态。

$$f'=mg\,tg\theta=mg\sin\theta=mg\frac{\frac{x}{2}}{l}=\frac{x\cdot mg}{2l}$$

$$f_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{x^2}$$

$$\frac{xmg}{2l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg} \longrightarrow x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$ （证毕）

由上式得 $q^2 = x^3 \cdot 2\pi\varepsilon_0 mg/l$

∴ $q = x\sqrt{x \cdot 2\pi\varepsilon_0 mg/l}$

$= 0.05\sqrt{0.05\times2\times3.14\times8.85\times10^{-2}\times0.01\times9.8/1.2}$

$= 2.4\times10^{-8}$ 库伦。

1—4：假设上题中每球均以 1.0×10^{-9} 库伦/秒的速率失掉电荷，试问两球彼此趋近的瞬时速率 $\frac{dx}{dt}$ 是多少？

解： 由 $x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3} = \left(\frac{l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}\frac{d}{dt}q^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}\cdot\frac{2}{3}q^{\frac{2}{3}-1}\frac{dq}{dt}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{l}{2\pi\varepsilon_0 qmg}\right)^{1/3}\cdot\frac{dq}{dt}$$

代入数据：$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{1.2}{2\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times2.4\times10^{-8}\times0.01\times9.8}\right)^{1/3}$$

$\times1.0\times10^{-9} = 1.4\times10^{-3}$ 米/秒

1—5 在某一时刻，从 ${}_{92}U^{238}$ 的放射性衰变中跑出来的 α 粒子的中心离 ${}_{90}Tn^{234}$ 的中心为 9×10^{-15} 米，求此时作用

在∝粒子上的力和加速度。

解： ${}_{92}U^{238}$——${}_{90}T_n{}^{234}+{}_{2}H_e{}^{4}$

T_n带电为 $90e$，∝粒子(${}_{2}H_e{}^{4}$)带电为 $2e$

$$f=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}=9\times10^4\frac{180e^2}{(9\times10^{-15})^2}=511\text{牛顿}$$

$$a=\frac{f}{m}=\frac{511}{6.68\times10^{-27}}=7.66\times10^{28}\text{米/秒}^2$$

1—6　有两个小球，中心相距3厘米，各带等量的负电，若两球之斥力为 10^{-19} 牛顿，问每球上有多少过多的电子？

解： $f=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \dfrac{q^2}{r^2}\rightarrow q^2=\dfrac{f\cdot r^2}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$

$$=\frac{10^{-19}\times(3\times10^{-2})^2}{9\times10^9}=10^{-32}$$

∴　　$q=10^{-16}$ (库伦)

每球所带的电子数 $=\dfrac{q}{e}=\dfrac{10^{-16}}{1.6\times10^{-19}}=6.25\times10^3$个。

$=625$个

1—7　有两小球，都带正电，已知两球上之电荷之和为 4×10^{-8}库伦，又知当两球中心相距0.1米，斥力为27×10^{-5}牛顿，求每一小球上所带的电量。

解： $f=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\bullet\dfrac{q_1q_2}{r^2}\rightarrow q_1q_2=\dfrac{f\,r^2}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}}=\dfrac{27\times10^{-5}\times0.1^2}{9\times10^9}$

$=3\times10^{-16}$ (库)

∴ $q_1 q_2 = 3\times 10^{-16}$……①

$q_1 + q_2 = 4\times 10^{-8}$……②

由②得 $q_1 = 4\times 10^{-8} - q_2$ 代入①得 $(4\times 10^{-8} - q_2)q_2 = 3\times 10^{-16}$

即 $q_2{}^2 - 4\,10^{-8} q_2 - 3\times 10^{-16} = 0$

$$\therefore \quad q_2 = \frac{4\times 10^{-8} \pm \sqrt{16\times 10^{-16} - 12\times 10^{-16}}}{2}$$

$$= 2\times 10^{-8} \pm 1\times 10^{-8}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{取} q_2 = 3\times 10^{-8}\text{库} & q_1 = 1\times 10^{-8}\text{库} \\ q_2 = 1\times 10^{-8}\text{库} & q_1 = 3\times 10^{-8}\text{库} \end{array}\right\} \text{均满足方程①。}$$

1—8 有两质点，质量同为m，所带电量同为q，各用等长l的丝线悬于同一点，（如图2—1—34所示）。证明在平衡时丝线与垂直线所夹的角θ符合

$$16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin\theta = q^2\cos\theta$$

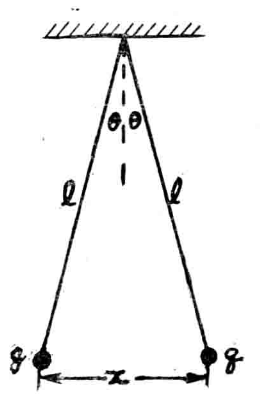


图2—1—34
（第3题和第8题图）

证明： $mg\,tg\,\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}$……①

而 $\frac{\frac{x}{2}}{l} = sin\theta$

$$\frac{x}{2} = l\ sin\theta$$

$\therefore$ $x = 2l\,sin\,\theta$ 代入①得

$$mgtg\,\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q^2}{4l^2 sin^2\theta}$$

$\therefore$ $16\pi\varepsilon_0 mgl^2 sin^3\theta = q^2 cos\,\theta$ 。（证毕）。

1—9 一个电子在电场中受力的大小和方向与该点的电场强度的大小和方向是否相同？

答：不同。

1—10 在真空中有一个点电荷Q，离它0.05米远的A点的电场强度是6×10^5牛/库，场强的方向指向Q，问Q是正电荷还是负电荷？数值为多少？

答：Q是负电荷。

由 $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$得

$$Q = \frac{E\cdot r^2}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} = \frac{6\times10^5\times0.05^2}{9\times10^9} = 1.67\times10^{-7}\text{库。}$$

1—11 在正方形的四个角顶上各放一个正电荷Q，求对角线交点处的电场强度。

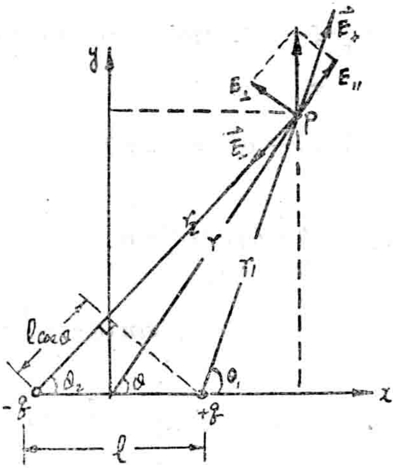
答：$E = 0$

1—12 如图，求电偶极子在P点的电场强度（$r \gg l$）。分别把场强表示为$E(r\cdot\theta)$ $E(x,y)$

解：（方法一）：

a）：把场强表示为$E(r,\theta)$：

如图示： $E_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1{}^2}$， $E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_2{}^2}$



2—1—12　题图

P 点的总场强 $\vec{E}=\vec{E}_{+}+\vec{E}_{-}$

① $\vec{E}$ 在位置矢径 $\vec{r}$ 方向上的分量

$$E_{11}=E_{+}\cos(\theta_1-\theta)-E_{-}\cos(\theta-\theta_2)$$

∵ $r\gg l$ 所以式中

$$\cos(\theta_1-\theta)=\cos(\theta-\theta_2)\approx\cos 0^\circ=1$$

∴ $$E_{11}=E_{+}-E_{-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(r_2+r_1)(r_2-r_1)}{r_2{}^2\cdot r_1{}^2}$$

∵ $r_1r_2\approx r^2$，$r_2+r_1\approx 2r$，$r_2-r_1\approx l\cos\theta$

∴ $$E_{11}=\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cos\theta}{r^3}$$

② $\vec{E}$ 在垂直于位置矢径 $\vec{r}$ 方向上的分量

$$E_T=E_{+}\sin(\theta_1-\theta)+E_{-}\sin(\theta-\theta_2)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2{}^2 r_1{}^2}[r_2{}^2 \sin(\theta_1 - \theta) + r_1{}^2 \sin(\theta - \theta_2)]$$

∵ $\theta_1 - \theta \approx \theta - \theta_2$

且 $r_1 \sin(\theta_1 - \theta) \approx \frac{l}{2}\sin\theta,$

$$r_2 \sin(\theta - \theta_2) \approx \frac{l}{2}\sin\theta$$

∴ $r_2{}^2 \sin(\theta_1 - \theta) + r_1{}^2 \sin(\theta - \theta_2) \approx r_2 \cdot \frac{l}{2}\sin\theta$

$$+ r_1 \frac{l}{2}\sin\theta = \frac{l}{2}(r_1 + r_2)\sin\theta \approx \frac{l}{2} \cdot 2r\sin\theta = rl\sin\theta$$

∴ $E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2{}^2 \cdot r_1{}^2} rl\sin\theta \approx \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta$

即 $E_{\perp} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta$

③ $E = \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{11}^2} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{(2\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$

$$= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

b）把场强表示为 $E(x,y)$

$$E_x = E_{11}\cos\theta - E_{\perp}\cos(90° - \theta)$$

$$= \frac{2P}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos^2\theta}{r^3} - \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r_3}\sin^2\theta$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(2x^2 - y^2)$$

$$=\frac{P(2x^2-y^2)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y=E_{11}\sin\theta+E_{\perp}\sin(90^\circ-\theta)=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

$$(2\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos\theta\cdot\sin\theta)$$

$$=\frac{3Pxy}{4\pi\varepsilon_0 r^5}=\frac{3Pxy}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$\sqrt{4x^4-4x^2y^2+y^4+9x^2y^2}$$

$$=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}\sqrt{4x^4+5x^2y^2+y^4}$$

$$=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}\sqrt{(x^2+y^2)(4x^2+y^2)}$$

（方法二）：先求电位，再求场强

$$V_P=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

$$=\frac{q(r_1-r_2)}{4\pi\varepsilon_0 r_2\cdot r_1}$$

∵　　$r_1\gg l$，$r_2\gg l$

∴　　可近似认为$r_1r_2=r^2$

$$\left.\begin{array}{l} \\ r_1-r_2=l\cos\theta\end{array}\right\}\text{代入上式}$$

$$V_P = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

求场强：

1）用极坐标： $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{P\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{P\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2 + \left(\frac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2}$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

2）用直角坐标： $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$$V_P = \frac{Px}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\right]$$

$$= \frac{P(2x^2-y^2)}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3Pxy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{P^2(2x^2-y^2)^2 + 9P^2x^2y^2}}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y)^{5/2}}$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}}\sqrt{4x^4+5x^2y^2+y^4}$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}} \sqrt{(x^2+y^2)(4x^2+y^2)}\ 。$$

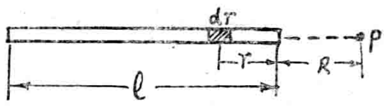
*1—13　长 l = 15 厘米的直导线 AB（图 2—1—36）上均匀地分布着线密度 $\lambda = 5\times10^{-6}$ 库/米 的电荷，求

（1）在导线的沿长线上与导线一端 B 相距 R = 5 厘米处 P 点的场强。

（2）在导线的垂直平分线上与导线中点相距 R = 5 厘米处 Q 点的场强。

解:

（1）取电荷元 $dq = \lambda dr$　dq 在 P 点产生的场强



2—1—13　题图（1）

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(R+r)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dr}{(R+r)^2}$$

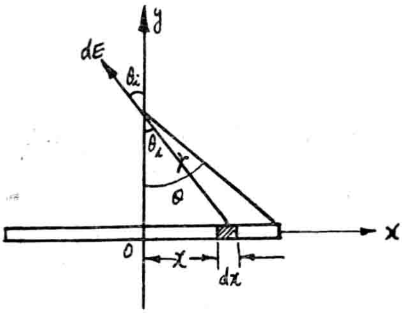
$$E_P = \int dE = \int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{(R+r)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\left[-\frac{1}{R+r}\right]_0^l = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{l}{R(R+l)}$$

代入数据：

$$E_P = 9\times10^9 \frac{5\times10^{-6}\times0.15}{0.05(0.05+0.15)}$$

$$= 6.75\times10^6 \text{牛顿/库}$$



2—1—13　题图(2)

(2) 由于导线对垂直平分线对称，各 dq 在 Q 点的场的水平分量相抵消，只剩下垂直方向的分量。

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$dE_y=k\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta_i$$

∵　　$x=R\,tg\theta_i\quad dx=R\sec^2\theta_i d\theta_i$

$r^2=R^2+x^2=R^2+R^2tg^2\theta_i=R^2(1+tg^2\theta_i)=R^2\sec^2\theta_i$

∴　　$$dE_y=k\frac{\lambda R\sec^2\theta_i}{R^2\sec^2\theta_i}\cos\theta_i d\theta_i=k\frac{\lambda}{R}\cos\theta_i d\theta_i$$

$$E_y=\int dE_y=k\frac{\lambda}{R}\int_0^{\theta}\cos\theta_i d\theta_i=k\lambda\cdot\frac{\sin\theta}{R}$$

而　　$$\sin\theta=\frac{l/2}{\sqrt{R^2+\frac{l^2}{4}}}$$

$$\therefore \qquad E_y = k\lambda \frac{l/2}{R\sqrt{R^2+\frac{l^2}{4}}}$$

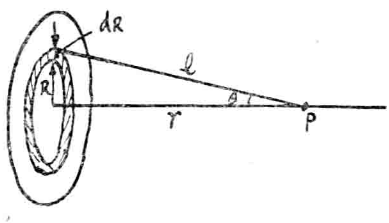
$$E_\theta = 2E_y = k\frac{\lambda l}{R\sqrt{R^2+\frac{l^2}{4}}}$$

$$= 9\times10^9 \frac{5\times10^{-6}\times15\times10^{-2}}{0.05\sqrt{0.05^2+(7.5\times10^{-2})^2}}$$

$$= 1.5\times10^5 \text{牛/库}$$

1—14：半径为 a 的由电荷组成的薄圆片，均匀带电，电荷面密度为 σ，试求在圆片轴线上距圆片为 r 处的场强。

解：取圆环如图，其上所带电荷为 $dg=\sigma\cdot2\pi R\cdot dR$，该电荷在 P 点产生的场强（仅有沿轴线方向的分量，所以乘以 $\cos\theta$）



2—1—14题图

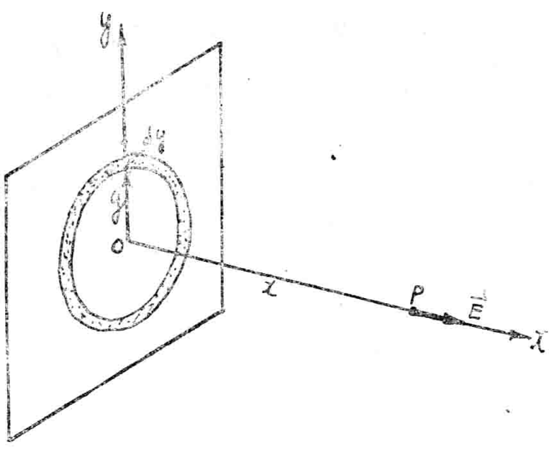
$$\therefore \qquad dE_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(\sigma\cdot2\pi RdR)\cdot r}{(R^2+r^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\ \frac{\sigma Rrdr}{(R^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E_P = \int dE_P = \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}dR$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}\right]_0^a=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}\right]$$

当 $a\to\infty$ 时，$E_P=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$（无限大平板的电场）。

1—15 利用§2—1—5（二）中[例题2]的结果，用积分法求无限大平面电荷板外任一点的电场强度。



2—1—15题图

解：如上图，在无限大平面上取一细圆环，其面积为 $2\pi y dy$，则此圆环所带电荷 $dq=\sigma\cdot 2\pi y\cdot dy$，此电荷在 P 点产生的场强 $dE_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\cdot\sigma 2\pi y dy}{(y^2+x^2)^{3/2}}$，把无限大平面分成许多圆环，把所有圆环在 P 点产生的场迭加即可得到总场强 E。

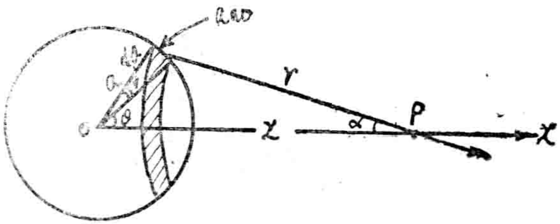
$$\therefore \qquad E=\int dE=\int_0^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\cdot\sigma 2\pi y dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{2ydy}{(y^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{d(y^2+x^2)}{(y^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-2\sigma x}{4\varepsilon_0}(y^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\infty} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

1—16　有一导体球壳均匀带电，试用积分法求壳外一点与壳内一点之场强。已知球壳之半径为 a，试画出 $E(r)$ 的图形，r 为任一点到球心的距离。注意场强在通过球壳表面时的不连续性。

解：（1）P 点在球外时：



2—1—16题图（1）

取狭环带为电荷元，其上带电 $dq = \sigma\cdot ds = \sigma\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot ad\theta$，它在 P 点产生的场

$$dE_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{r^2}\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot ad\theta}{r^2}\cos\alpha$$

由余弦定理$a^2 = x^2 + r^2 - 2rx\cos\alpha$