

上海大学出版社

2006年上海大学博士学位论文 62



高维系统中的 翻转同宿或异宿轨分支

- 作者：水树良
- 专业：运筹学与控制论
- 导师：傅新楚



2006年上海大学博士学位论文 62



高维系统中的 翻转同宿或异宿轨分支

- 作者：水树良
- 专业：运筹学与控制论
- 导师：傅新楚

0193-533
SSL



Shanghai University Doctoral Dissertation (2006)

**Bifurcation Problems of
Homoclinic Loop or Heteroclinic Loop
with Inclination Flip or Orbit Flip
in Higher Dimensional Systems**

Candidate: Shui Shuliang

Major: Operations Research and Control Theory

Supervisor: Fu Xinchu

Shanghai University Press

• Shanghai •

图书在版编目(CIP)数据

2006 年上海大学博士学位论文. 第 2 辑/博士学位论文编辑部编. —上海:上海大学出版社,2010.6

ISBN 978-7-81118-513-3

I. 2... II. 博... III. 博士—学位论文—汇编—上海市—2006 IV. G643.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162510 号

2006 年上海大学博士学位论文

——第 2 辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人:姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890×1240 1/32 印张 278 字数 7 760 千

2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—400

ISBN 978-7-81118-513-3/G·514 定价:880.00 元(44 册)

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查,确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单:

主任: 朱德明	教授,华东师范大学数学系	200062
委员: 袁小平	教授,复旦大学数学系	200433
肖冬梅	教授,上海交通大学数学系	200420
郭兴明	教授,上海大学力学所	200444
刘曾荣	教授,上海大学数学系	200444
导师: 傅新楚	教授,上海大学数学系	200444

评阅人名单:

朱德明	教授,华东师范大学数学系	200062
李继彬	教授,昆明理工大学理学院	650000
韩茂安	教授,上海师范大学数学系	200234
肖冬梅	教授,上海交通大学数学系	200420
周盛凡	教授,上海大学数学系	200444

答辩委员会对论文的评语

水树良同学的博士论文《高维系统中的翻转同宿或异宿轨分支》，选题是属于当前分支理论的前沿。

该文首先研究了一类具有倾斜双翻转的4维系统的余维3同宿分支问题，给出了2重和3重周期轨道分支曲面和同宿轨与周期轨道共存的分支曲面，并证明了分支周期轨道的个数与倾斜翻转的强度密切相关。

其次研究一类同时具有轨道翻转和倾斜翻转的4维系统的余维3同宿轨分支问题，获得了一批类似的分支结果。最后分别研究了两类或具有轨道翻转、或具有倾斜翻转的4维系统的余维3异宿环的各种分支现象，同样揭示了分支出的周期轨道和同宿轨道的个数与倾斜翻转的强度正相关。国际上有关这方面的研究工作，理论分析只局限于余维2，而余维3的分支问题的研究都是“猜测”加“计算机数值模拟”。水树良等人的研究工作首先开展了这类余维3分支问题的理论研究，并给出了具有普适性的方法。

水树良撰写的博士论文研究目标明确，思路清晰，对所研究领域历史和现状有非常清楚的了解。答辩中能正确回答问题。从本论文可以看出，作者具有坚实的理论基础和专业知识，具有很强的科研工作能力。

答辩委员会经过认真审议一致通过水树良同学的博士论文答辩，并一致认为是一篇优秀的博士论文。建议授予水树良同学理学博士学位。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决,全票同意通过水树良同学的博士学位论文答辩,建议授予理学博士学位。

答辩委员会主任：朱德明

2006 年 5 月 15 日

摘 要

本毕业论文,主要研究高维系统中具倾斜翻转或轨道翻转的同宿环或异宿环的分支问题.利用由文献[74]首先引入的在同(异)宿轨附近建立的局部坐标系,构造 Poincaré 映射,导出分支方程,进而研究四维向量空间中的同(异)宿轨分支.给出了 1-周期轨的存在条件与个数、区域,1-周期轨、1-同宿环及异宿环的共存性,且获得了 2 重 1-周期轨和 3 重 1-周期轨的分支曲面.对于倾斜翻转的同(异)宿轨,本文指出从此类同(异)宿轨分支出的 1-周期轨的个数依赖于倾斜翻转的强度.第二章的第一节研究四维系统中的沿同宿轨的稳定流形与不稳定流形均为倾斜翻转的同宿环的余维 3 非共振分支.对于这种类型的分支,得到如下结果:如果沿原同宿环 Γ_{hom} 的两个不变流形都不是强倾斜翻转的,那么扰动系统在 Γ_{hom} 附近可以并且至多可以存在一个周期轨;如果沿 Γ_{hom} 的两个不变流形只有一个强倾斜翻转的,那么扰动系统在 Γ_{hom} 附近可以并且至多可以存在两个周期轨;如果沿 Γ_{hom} 的两个不变流形都是强倾斜翻转的,那么扰动系统在 Γ_{hom} 附近可以并且至多可以存在三个周期轨.而且,当同宿轨和周期轨共存时也有这样的规律.即,在扰动系统存在一同宿轨 Γ_{μ} 的前提下,如果沿 Γ_{hom} 的两个不变流形都不是强倾斜翻转的,那么扰动系统在 Γ_{hom} 附近没有周期轨;如果沿 Γ_{hom} 的两个不变流形只有一个强倾斜翻转的,那么扰动系统在 Γ_{hom} 附近可以并且至多可以存在一个周期轨;如

果沿 Γ_{hom} 的两个不变流形都是强倾斜翻转的,那么扰动系统在 Γ_{hom} 附近可以并且至多可以存在两个周期轨. 第二节研究四维系统的具有一轨道翻转和一倾斜翻转的同宿环的余维 3 非共振分支,得到的结果是:只有强倾斜翻转的情形下才能扰动出三个周期轨. 第三章的第一节研究四维系统的具有一轨道翻转的异宿环的余维 3 非共振分支,证明在一些情形下,不共存性和唯一性仍成立;而在另一些情形下,保持的异宿环能与周期轨共存(此时的异宿轨不是轨道翻转的),能产生三个周期轨及更复杂的分支现象. 第二节研究四维系统的具有一倾斜翻转的异宿环的余维 3 非共振分支,证明对于非强倾斜翻转的情形,其分支类型与通有的粗异宿环一样,也是最多可以分支出两个周期轨,而强倾斜翻转的情形可以分支出三个周期轨.

关键词 分支问题,高维系统,同宿环,异宿环,1-周期轨,2重1-周期轨,3重1-周期轨,倾斜翻转,轨道翻转,共振,余维

Abstract

In this thesis we consider the bifurcation problems of homoclinic loop or heteroclinic loops with inclination flip or orbit flips in higher dimensional systems. By using a local coordinate system established in a neighborhood of the homoclinic loop or heteroclinic loop (This was first introduced in paper [74]), we construct the Poincaré map and induce the bifurcation equation. Our aim is to analyse the bifurcation behaviour of a four dimensional system by solving this bifurcation equation. The existence, nonexistence, uniqueness and coexistence of the 1 - periodic orbit, the 1 - homoclinic loop and heteroclinic loop are studied. The existence of the two-fold periodic orbit and three-fold periodic orbit are also obtained. For the homoclinic loop or heteroclinic loop with one inclination flip or two inclination flips, we show that the number of periodic orbits bifurcated from this kind of homoclinic loop or heteroclinic loop depends heavily on their strength of the inclination flip. In section 2.1 we study codimension 3 non-resonant bifurcations of homoclinic orbits with two inclination flips in 4 dimensional systems. For this case, we obtain that if two invariant manifolds along the original homoclinic orbit Γ_{hom} are not strong inclination flip then the perturbed system can

exists at most one 1 - periodic orbit near Γ_{hom} , if only one of the invariant manifolds is strong inclination flip then the perturbed system can exists at most two 1 - periodic orbits near Γ_{hom} , if two invariant manifolds are strong inclination flip then the perturbed system can exists at most three 1 - periodic orbits near Γ_{hom} . And, there is similar character when the perturbed system have a homoclinic orbit and some 1 - periodic orbits at the same time. That is, premising the perturbed system has a homoclinic orbit Γ_{μ} , if two invariant manifolds are not strong inclination flip then the perturbed system have no any 1 - periodic orbit near Γ_{hom} , if only one of the invariant manifolds is strong inclination flip then the perturbed system can have at most one 1 - periodic orbit near Γ_{hom} , if all of two invariant manifolds are strong inclination flip then the perturbed system can have at most two 1 - periodic orbits near Γ_{hom} . In section 2. 2 we study codimension 3 non-resonant bifurcations of homoclinic loop with orbit flips and inclination flips in 4 dimensional systems. We show that the perturbed system can have three 1 - periodic orbits if only if a homoclinic orbit is strong inclination flip. In section 3.1 we study codimension 3 non-resonant bifurcations of heteroclinic loop with orbit flips in 4 dimensional systems. For the rough non-resonant heteroclinic loop with an orbit flip, on the one hand, the non-coexistence and the uniqueness is still valid in some cases, on the other hand, the persisted heteroclinic loop can be coexistent with an 1 - periodic orbit, three 1 - periodic orbits can be produced simultaneously from

the original loop, and much more complicated bifurcation phenomenon can occur in other cases. In section 3.2 we study codimension 3 non-resonant bifurcations of heteroclinic loop with inclination flips in 4 dimensional systems. The bifurcation phenomena is similar to bifurcations of a generic and rough heteroclinic loop with two saddle points, and the perturbed system can have at most two 1 - periodic orbits. The perturbed system can have three 1 - periodic orbits if the heteroclinic orbit is strong inclination flip.

Key words bifurcations, higher dimensional systems, homoclinic loop, heteroclinic loop, 1 - periodic orbit, two-fold 1 - periodic orbit, three-fold 1 - periodic orbit, inclination flip, orbit flip, resonant, codimension

目 录

第一章 前言	1
1.1 学科综述	1
1.2 主要结果	6
第二章 翻转同宿环分支	9
2.1 具两倾斜翻转的同宿环分支	9
2.1.1 假设与规范形	9
2.1.2 预备引理和 Poincaré 映射	13
2.1.3 同宿轨和周期轨的存在性	17
2.1.4 同宿轨和周期轨的共存性	27
2.2 具一轨道翻转和一倾斜翻转的同宿环分支	30
2.2.1 假设与引理	30
2.2.2 Poincaré 映射与分支方程	33
2.2.3 结果与证明	34
第三章 翻转异宿环分支	43
3.1 具一轨道翻转的异宿环分支	43
3.1.1 假设与规范形	43
3.1.2 局部坐标系和分支方程	47
3.1.3 结果与证明	54
3.2 具一倾斜翻转的异宿环分支	69
3.2.1 基本假设	69
3.2.2 局部坐标系和分支方程	71
3.2.3 同宿环异宿环的存在性	76

3.2.4 非强倾斜翻转情形	77
3.2.5 强倾斜翻转情形	78

第四章 关于今后工作的展望	83
---------------------	----

参考文献	84
------------	----

致谢	92
----------	----

0	1.2 1.2
---------	---------

0	第二章 支分环同构
---------	-----------

0	2.1 具同构斜环的同构环
---------	---------------

0	2.1.1 具同构斜环的同构环
---------	-----------------

13	2.1.2 具同构斜环的同构环
----------	-----------------

17	2.1.3 具同构斜环的同构环
----------	-----------------

27	2.1.4 具同构斜环的同构环
----------	-----------------

30	2.2 具一一对应同构斜环的同构环
----------	-------------------

30	2.2.1 具一一对应同构斜环的同构环
----------	---------------------

33	2.2.2 Poincaré 双分支
----------	--------------------

34	2.2.3 结果与证明
----------	-------------

43	第三章 支分环同构
----------	-----------

43	3.1 具一一对应同构斜环的同构环
----------	-------------------

43	3.1.1 具一一对应同构斜环的同构环
----------	---------------------

47	3.1.2 具一一对应同构斜环的同构环
----------	---------------------

54	3.1.3 具一一对应同构斜环的同构环
----------	---------------------

60	3.2 具一一对应同构斜环的同构环
----------	-------------------

60	3.2.1 基本假设
----------	------------

71	3.2.2 具一一对应同构斜环的同构环
----------	---------------------

77	3.2.3 具一一对应同构斜环的同构环
----------	---------------------

第一章 前言

1.1 学科综述

所谓分支(bifurcation, 中文亦称分岔、分叉、分歧等), 是指依赖于参数的某一研究对象当参数在一特定值附近作微小变化时, 它的某些性质所发生的本质变化. 数学上研究分支现象的理论——分支理论主要研究三类问题: 由常微分方程(或方向场)所定义的连续动力系统的分支; 由映射所定义的离散动力系统的分支及函数方程的零解随参数变化而产生的分支. 前两类称为**动态分支**(dynamic bifurcation), 第三类称为**静态分支**(static bifurcation). 它们既有区别又相互联系. 动态分支理论主要研究动力系统的轨道族的拓扑结构随参数变化所出现的变化及规律. 下面我们要研究的同宿环、异宿环分支就是属于动态分支.

分支理论起源于 Poincaré 时代(19 世纪末), 不过到了 20 世纪五六十年代, 由于实际问题应用的推动和数学理论本身的发展, 有关这方面的研究才有了长足的进展. 随着在结构稳定系统的研究中所取得的突破性进展, 对结构不稳定系统的研究便越来越受到更多的关注.

动力系统分支理论内容非常丰富, 目前已有不少专著涉及分支理论. 如文献[1-3, 6, 7, 10, 13, 15, 16, 24, 39, 40, 45, 46, 48, 49, 55, 67-70].

定义 1.1.1 向量场的相轨线称为奇点(或闭轨)的同宿轨(homoclinic orbit), 如果这轨线不是奇点(或闭轨)本身, 而且它的 α 极限集与 ω 极限集都等于这奇点(或闭轨). 相轨线称为**异宿轨**

(heteroclinic orbit), 如果它的 α 极限集与 ω 极限集是不同的奇点或闭轨.

同宿轨在许多领域都有重要的应用, 如, 生物数学、化学、流体力学、电子学及概率论等^[9, 37, 38]. 同宿轨或异宿轨的存在性和横截性问题, 在混沌 (Chaos) 和反应扩散方程的行波解 (travelling wave solution) 等问题的研究中占有重要地位. 如, 文献[4]论述可逆四维系统中同宿于一鞍-中心型奇点的同宿环的保存性问题. 文献[79, 80, 91]研究具有较高退化程度的奇异轨道在自治扰动下保存的条件. 文献[67]对高维 Hamilton 系统给出了判定法向双曲不变集在小扰动下其同宿轨保持的用一组 Melnikov 型向量函数来刻画的充分条件. 在三阶常微分系统的一条同宿于鞍-焦点的轨道的邻域内, 系统具有极其复杂的混沌性态——Silnikov 现象^[63, 64, 68], 并且得到了广泛的应用^[68]. 文献[77]研究了奇点非双曲时的 Silnikov 现象 (因其奇点不再双曲, 故称其为弱吸引性的 Silnikov 现象), 证明了相应的 Poincaré 映射具有马蹄构造, 并且, 伴随着广义 Hopf 分支, 将产生同宿轨道、异宿轨道以及更复杂的混沌现象. 文献[78]进一步研究弱吸引性的 Silnikov 现象, 证明了在同宿分支值的邻域内, 存在着可数无穷多个鞍结点分支值, 倍周期分支值和 2-脉冲同宿分支值.

定义 1.1.2 发生在奇点 (或闭轨) 的小邻域内, 并且与它的双曲性破坏相联系的分支称为局部分支. 发生在有限个同宿轨或异宿轨的小邻域内的分支称为半局部分支. 所有其余的分支称为全局分支.

定义 1.1.3 特征值 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 称为共振的, 如果存在自然数 $s (1 \leq s \leq n)$ 和整数组 $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, 其中 $m_i \geq 0$

并且 $|m| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$ 使得

$$\lambda_s = (m, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i.$$

正整数 $|m|$ 称作共振的阶.