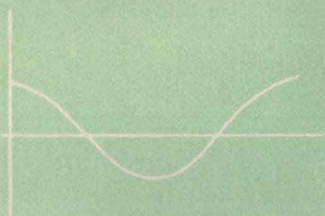
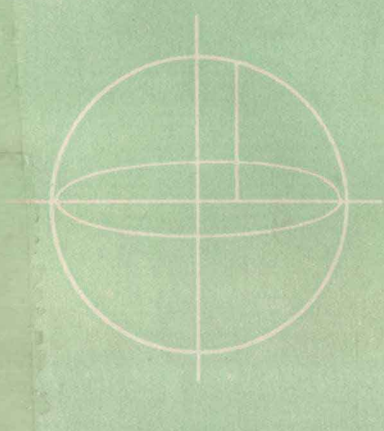
中学数学题解





常德地区教学辅导站编印

编 者 的 话

为了帮助高中学生在中学阶段打好数学基础，以适应实现“四个现代化”的需要，我根据1979年全国高考复习大纲的要求，将平日在教学中积累的资料，并参照部分省、市的有关题解和竞赛试题（历届的高考试题除外）选编成这本习题解答，供高中毕业生复习迎考，以及中学数学教师选题之用。

选编时，我力图将题归类，按类写出指导意见。由于时间仓促，只对部分题目写出了解题指导，加上自己水平有限，在某些题目的解法上，出现的缺点和错误一定不少，欢迎读者在使用的过程中，提出宝贵意见。

本书的完成，承蒙鲁俊、贺家勇、张百川、杨永锡等同志的热情帮助，以及临澧县教学辅导站、湖南省临澧县印刷厂的大力支持，在此一并致谢。

夏应祥

一九七九年三月

目　　录

第一部分 代　　数

一、实数与代数式的恒等变换

1　变数 x 和函数 $f(x)$ 所对应的规则由下列式子给定：

(1)　$f(x)=|2x-3|+|5x+2|$，

(2)　$f(x)=|4x-7|-|2x+5|$，

试不用绝对值的符号，写出上述对应规则的表达式。

解　(1)当 $x<-\frac{2}{5}$ 时，

$f(x)=-(2x-3)-(5x+2)=1-7x$。

当 $-\frac{2}{5}\leqslant x<\frac{3}{2}$ 时，

$f(x)=-(2x-3)+(5x+2)=3x+5$。

当 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，

$f(x)=(2x-3)+(5x+2)=7x-1$.

(2)同样分区间进行讨论，结果是

$-2x+12$，　$-6x+2$，　$2x-12$.

2　求 $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1$ 的算术平方根。

解　$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1$

$=(n^2+5n+4)(n^2+5n+6)+1$

$=(n^2+5n)^2+10(n^2+5n)+25=(n^2+5n+5)^2$，

根据算术平方根的定义，n^2+5n+5 是

$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1$ 的算术平方根。

3　化简：

$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2-10x+25}$。

解　原式$=\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-5)^2}$，

当$x\leqslant-3$时，

原式$=-(x+3)-(x-2)-(x-5)=4-3x$；

当$-3<x\leqslant2$时，

原式$=(x+3)-(x-2)-(x-5)=10-x$；

当$2<x\leqslant5$时，

原式$=(x+3)+(x-2)-(x-5)=x+6$；

当$x>5$时，

原式$=(x+3)+(x-2)+(x-5)=3x-4$。

4　化简下式：

(1)$\sqrt{28-10\sqrt{3}}$，(2) $\sqrt{6-\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$，

(3)$\sqrt[4]{\sqrt{97-56\sqrt{3}}}$，

(4)$\sqrt{2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}$。

（a，b为正数）

解　(1)原式$=\sqrt{5^2-2\times5\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}=5-\sqrt{3}$。

(2)原式$=\sqrt{6-\sqrt{3^2-2\times3\sqrt{8}+(\sqrt{8})^2}}$

$=\sqrt{6-\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}}=\sqrt{6-(3-\sqrt{8})}$

$=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$。

(3)原式$=\sqrt[4]{\sqrt{(7-\sqrt{48})^2}}=\sqrt[4]{7-\sqrt{48}}$

$=\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})。$$

(4)

$$\text{原式}=\sqrt{a^2+2a\sqrt{a^2-b^2}+(\sqrt{a^2-b^2})^2}$$
$$-\sqrt{b^2-2b\sqrt{a^2-b^2}+(\sqrt{a^2-b^2})^2}$$
$$=\sqrt{(a+\sqrt{a^2-b^2})^2}-\sqrt{(b-\sqrt{a^2-b^2})^2}$$
$$=a+\sqrt{a^2-b^2}-(\sqrt{a^2-b^2}-b)\quad(b<\sqrt{a^2-b^2})$$
$$=a+b。$$

5　化简下式：

(1) $\dfrac{27+3\sqrt{2}-(9+\sqrt{2})\sqrt[4]{2}}{9-3\sqrt[4]{2}}$；

(2) $\dfrac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$；

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{5}}$。

解(1)原式 $=\dfrac{[3(9+\sqrt{2})-(9+\sqrt{2})\sqrt[4]{2}](3+\sqrt[4]{2})}{3(3-\sqrt[4]{2})(3+\sqrt[4]{2})}$

$$=\frac{(9+\sqrt{2})(3-\sqrt[4]{2})(3+\sqrt[4]{2})}{3(9-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(9+\sqrt{2})(9-\sqrt{2})}{3(9-\sqrt{2})}=\frac{9+\sqrt{2}}{3}。$$

(2)原式 $=\dfrac{3\times2\sqrt{2}-2\times2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3\times3\sqrt{2}-2\times3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$

$$=\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{2}{3}。$$

(3)原式 $=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt[3]{5})(\sqrt{3}+\sqrt[3]{5})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}}{3-\sqrt[3]{25}}$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt[3]{5})(3^2+3\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{25}^2}{3^3-(\sqrt[3]{25})^3}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt[3]{5})(9+3\sqrt[3]{25}+5\sqrt[3]{5})。$$

6 求证 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$。

证 左边 $=\sqrt[3]{2^3+3\times2^2\sqrt{2}+3\times2(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3}$

$+\sqrt[3]{2^3-3\times2^2\sqrt{2}+3\times2(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3}$

$=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}$

$=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$。

∴ 等式成立。

7 计算：

(1) $\left\{\frac{1}{4}\times\left[(0.027)^{\frac{2}{3}}+15\times(0.0016)^{\frac{3}{4}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\circ}\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}$；

(2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+4^{lg0.01}-9^{lg0.1}+55^{log_5 1}-(-0.\dot{3}\dot{6}3)^{-2}$

解(1)原式 $=\left\{\frac{1}{4}\times\left[(0.3)^{3\cdot\frac{2}{3}}+15\times(0.2)^{4\cdot\frac{3}{4}}+1\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=\left\{\frac{1}{4}\left[0.09+15\times0.008+1\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=\left\{\frac{1}{4}\times1.21\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=\left\{\left(\frac{1.1}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1.1}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{1.1}=\frac{20}{11}=1\frac{9}{11}$。

(2)原式 $=\left(\frac{4}{3}\right)^2+4^{-2}-9^{-1}+55^{\circ}-\left(-\frac{363-3}{990}\right)^{-2}$

$=\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{9}+1-\left(\frac{11}{4}\right)^2$

$$=\left(\frac{16}{9}-\frac{1}{9}\right)+1+\left(\frac{1}{16}-\frac{121}{16}\right)=-4\frac{5}{6}.$$

8 计算：$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots\cdots+\frac{9}{10!}$的近似值，精确到$\frac{1}{10^{10}}$。

解 由于这个数列的通项为$\frac{n-1}{n!}$ $(n=3,4,\cdots\cdots 10)$，

而 $\frac{n-1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$，

故所求的和可写为：

$$\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{9!}-\frac{1}{10!}\right)$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{10!}$$

答：所求的近似值约为0.4999997244。

9 试证$\sqrt{2}$是无理数。

证 用归谬法：如果$\sqrt{2}$是有理数，就能用一个既约分数来表示，令$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$（这里m、n是自然数，且m、n互质）。

则$2=\frac{n^2}{m^2}$，即$n^2=2m^2$，由此可推出n^2定为偶数。

从而n一定是偶数；再令$n=2k$。那么$m^2=2k^2$。同理可知m也是偶数。

上述推证结果m、n均为偶数，显然和$\frac{n}{m}$是既约分数相矛盾。据此可知$\sqrt{2}$不能用普通分数来表示，另外，显然$\sqrt{2}$不能用整数来表示，因而$\sqrt{2}$是无理数。

（如何证$\sqrt{3}$是无理数呢？）

10 求证：$\sin 10°$，$\cos 10°$都是无理数。

证 (1)由公式$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$，得

$3\sin 10°-4\sin^3 10°=\frac{1}{2}$，

即$8\sin^3 10^\circ - 6\sin 10^\circ + 1 = 0$， （令 $\sin 10^\circ = y$）

此方程可能有的有理数根只可能是：

± 1， $\pm\frac{1}{2}$， $\pm\frac{1}{4}$， $\pm\frac{1}{8}$。用综合除法试除，上述有理数都不是该方程的根，因而该方程没有有理数根，即$\sin 10^\circ$是无理数。

(2)由公式$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$， 得

$$4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$8\cos^3 10^\circ - 6\cos 10^\circ = \sqrt{3}。$$

若$\cos 10^\circ$是有理数，那么$8\cos^3 10^\circ - 6\cos 10^\circ$也应是有理数，这与上式矛盾，因而$\cos 10^\circ$不可能是有理数，只能是无理数。

11 证明形如$a^4 + 4$的数（a是整数，$a \neq 1$）是一个合数。

证 $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2$

$= (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$，

当$a = 1$时，$a^2 + 2a + 2 = 5$，$a^2 - 2a + 2 = 1$。

$\therefore$ $a^4 + 4 = 5$是一个质数。

当$a \neq 1$时，$a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$

$\therefore$是合数。

12 证明：假使n是整数，且$n \geqslant 2$，

那么$N = n(n^2 - 1)(n^2 - 5n + 26)$可以被120整除。

证 当$n = 2$时，$N = 2 \times 3 \times 20 = 120$，显然能被120整除；

当$n = 3$时，$N = 3 \times 8 \times 20 = 480$，显然能被120整除；

当$n > 3$时，

$N = (n-1)n(n+1) \times [(n-2)(n-3) + 20]$

$= (n-1)n(n+1)(n-2)(n-3) + 20(n-1)n(n+1)$，

可见第一项是五个连续整数的乘积，这就是说，它可以

被 2、3、4 和5整除，第二项等于20和三个连续整数的乘积，这就是说，它可以被$20\times2\times3=120$整除。既然每一个加数都能被120整除，所以和也能被120整除。

13 证明三个连续整数的立方的和能被9整除。

证 设三个连续整数为$n-1$，n，$n+1$，

则$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=2n(n^2+3)+n^3$

$=3n^3+6n=3n(n^2+2)$。

当$n=3k$（k为整数）时，$3n=9k$显然能被9整除。

当$n=3k-1$，或$n=3k+1$（k为整数）时，

$n^2+2=(3k\pm1)^2+2=9k^2\pm6k+1+2$

$=9k^2\pm6k+3=3(3k^2\pm2k+1)$，

$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=9(3k\pm1)(3k^2\pm2k+1)$显然能被9整除。

∴三个连续整数的立方的和能被9整除。

14 已知一个三位数各个数位上数字的和能被3整除，证明这个三位数也能被3整除。

证 设已知三位数为$100a+10b+c$，

那么$100a+10b+c=99a+9b+(a+b+c)$

$=9(11a+b)+(a+b+c)$，

∵$9(11a+b)$能被3整除，

又题设$a+b+c$也能被3整除，

因此$100a+10b+c$能被3整除。

15 证明当n为奇数时，$n(n^2-1)$能被24整除。

证 $n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$，

可见$n(n^2-1)$是三个连续整数之积，它必能被3整除，

当n为奇数时，设$n=2k-1$ （k为整数），

则$n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$

$$=(2k-2)(2k-1)2k$$
$$=4(k-1)k(2k-1)。$$

因为$k-1$与k为两个连续整数，

$\therefore (k-1)k$必能被2整除，

故$4(k-1)k(2k-1)$能被8整除，

即$n(n^2-1)$能被8整除。而3与8互质，

$\therefore n(n^2-1)$必能被$3\times8=24$整除。

16 求证：对于任意整 数n，$f(n)=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$都是整数，并且用3除时余2。

证 (1) $f(n)=n^3+n^2+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-1$

$$=n^2(n+1)+\frac{n}{2}(n+1)-1,$$

$\because n$为整数，则$n^2(n+1)$也为整数；

又n与$n+1$是连续整数，故$\frac{n}{2}(n+1)$必为整数。

故$f(n)$必为整数。

(2) 分析：若$f(n)$用3除时余2，则有

$$f(n)=3Q(n)+2,$$

即 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1=3Q(n)+2,$

$\therefore$ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}=3Q(n)+3=3[Q(n)+1]。$

可见要证$f(n)$用3除时余2，只须证明

$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}$能被3整除就行了。

$\because$ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n-1)}{2},$$

这里$n(n+1)(n+2)$和$(n-1)n(n+1)$都是三个连续整数之积，且都能被6整除，

$n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$能被6整除，

$\frac{n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)}{2}$能被3整除，

$\therefore n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}$能被3整除，因此$f(n)$用3除时余2。

17　一个自然数与3的和是5的倍数，与3的差是6的倍数，问这个自然数的最小值是多少？

解　设这个自然数为x，依题意有

$$\begin{cases}x=5m-3,\\x=6n+3;\end{cases}$$

$\therefore\quad 5m-3=6n+3,$

$\therefore\quad m=\frac{6n+6}{5}=\frac{6(n+1)}{5}$。

令　$n+1=5t$（t为正整数），那么

$$\begin{cases}n=5t-1,\\m=6t。\end{cases}$$

取t的最小值　$t=1$，则$\begin{cases}n=4,\\m=6。\end{cases}$

$\therefore\quad x=5m-3=5\times6-3=27,$

故所求的自然数的最小值为27。

求能被7除余4又能被5除余1的自然数中最小的一个（读者自行解决，答案11）。

18　一个三位数的个位数字是3，若把3移到开头，所得的

按原顺序组成的新数比原数的三倍多1，求原数。

略解　设原数为$100a+10b+3$，依题意得

$100\times3+10a+b=3(100a+10b+3)+1$，

$290a+29b=290$，

$a=1-\frac{b}{10}$。

此时，b只可能为0，　故$a=1$，　所求三位数为103。

19　设有六位数$1abcde$，乘以3后，变为$abcde1$，求这个数。

解　设$abcde=x$，

则$1abcde=100000+x$。

而$abcde1=10x+1$，

故　可得方程　$3(100000+x)=10x+1$

即$7x=299999$，　$x=42857$。

∴这个六位数为142857。

20　求同时满足下列各条件的四位数（要求说明理由）。

（1）四个数字的和是某个奇数的平方；

（2）其中某两位相邻数值的和为15；

（3）它的四倍还是一个四位数；

（4）它是一个偶数；

（5）各位数字互不相等。

解　设合乎条件的四位数是：$1000a+100b+10c+d$，

由（1）、（2），得$\begin{cases}a+b+c+d=(2n-1)^2\text{（}n\text{为自然数），}\\4^2\leqslant a+b+c+d<6^2\text{。}\end{cases}$

∴　$a+b+c+d=5^2$。

由（3）　得　$4000a+400b+40c+4d$还是一个四位数，

则有　$4000a\leqslant9000$，∴　$a\leqslant2\frac{1}{4}$，

∴　$a=1$，或$a=2$。

当$a=2$时，$4000\times2+400b<10000$，　　$\therefore\ b<5$，

b只可能为4、3、2、1、0，此时$a+b+c+d$不满足（1）和（2），因而$a=2$是不可能的。

当$a=1$时，$4000\times1+400b<10000$，$\therefore\ b<15$，

b只能为9、8、7、6、5、4、3、2、1、0。

取$b=9$，由于$a+b+c+d=25$，故$c+d=15$。

若$c=8$，$d=7$，这与条件（4）不合。

若$c=7$，$d=8$，满足条件，此时四位数为1978。

当b取比9小的整数时，却不满足上述条件，

故同时满足上述条件的四位数是1978。

21　一个四位数$abcd$的9倍，仍是一个四位数$dcba$，求原来的四位数。

解法1　按题意可以写成竖式

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ \times)\qquad 9 \\ \hline d\ c\ b\ a \end{array}$$

这里，乘积是四位数，可见$a\times9$不进位，故$a=1$。乘积中的$d=9$，而且$b\times9$不进位。因此上式可变为：

$$\begin{array}{r} 1\ b\ c\ 9 \\ \times)\qquad 9 \\ \hline 9\ c\ b\ 1 \end{array}$$

由于$b\times9$不进位，可见$b=0$或1。若$b=1$，则乘积中$c=9$，而且$c\times9$不进位这是不可能的，因此只有$b=0$，此时$c\times9+8$的个位数字是$b=0$，可见$c=8$。于是$abcd=1089$。

验证　$1089\times9=9801$。

解法2　设所求的四位数为$10^3a+10^2b+10c+d$。

依题意，得　$9\times10^3a+9\times10^2b+9\times10c+9d$。

$$=10^3d+10^2c+10b+a\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由于9×10^3a不进位，则有$9000a<10000$，

$\therefore\quad a<\frac{10}{9}$，　　因而　$a=1$。

又$9000\times1+900b$也不进位，

则$9000\times1+900b<10000$，　$900b<1000$，

$\therefore\quad b<\frac{10}{9}$，　　$\therefore\quad b=1$，或$b=0$。

当$b=0$时，

由(1)得　$9000+90c+9d=1000d+100c+1$，

$991d+10c=8999$，

$$\therefore\quad d=\frac{8999-10c}{991}=\frac{8999-80+80-10c}{991}$$

$$=\frac{8919}{991}+\frac{80-10c}{991}=9+\frac{10(8-c)}{991}\quad。$$

由于d是小于或等于9的正整数，只有$8-c=0$，

$\therefore\quad c=8$。　$d=9$，

此时所求的四位数为1089。

当$b=1$时，

由(1)得　$9000+900+90c+9d=1000d+100c+10+1$，

$991d+10c=9889$，

$$\therefore\quad d=\frac{9889-10c}{991}=\frac{9889-970+970-10c}{991}$$

$$=\frac{8919}{991}+\frac{970-10c}{991}=9+\frac{10(97-c)}{991}\quad。$$

当$c=97$时，$d=9$，这与题意不合。因而$b\neq1$，

故所求的四位数为1089。

22　一个两位数与把此两位数的个位数字与十位数字交换位置后所得两位数的和是一个整数的完全平方，求所有这样的两位数，并求出这些两位数之和。

解 设原来的两位数是$10a+b$。

根据条件得 $10a+b+10b+a=k^2$，（k是整数）

即 $11(a+b)=k^2$。

$\because$ 11是质数， $\therefore$ $a+b=11$。

又$\because$ a，b 分别代表十位，个位上的数字，且其和为11，

$\therefore$ a只能取2、3、4、5、6、7、8、9。

对应的b只能取9、8、7、6、5、4、3、2。

把对应的a，b的值组成的两位数是：

29，38，47，56，65，74，83，92。

这些两位数的和 $S=\dfrac{(29+92)\times 8}{2}=484$。

23 设$a_3a_2a_1$是三位数，$a_3>a_1$，由$a_3a_2a_1$减去$a_1a_2a_3$这三位数，所得的差是三位数$b_3b_2b_1$，$b_3\geqslant 1$。

试证明 $b_3b_2b_1+b_1b_2b_3=1089$。

证 $\because$ $a_3>a_1$，又$a_3a_2a_1-a_1a_2a_3=b_3b_2b_1$，

$\therefore$ $a_1+10-a_3=b_1$……………(1)

$a_3-1-a_1=b_3$……………(2)

由(1)+(2)得 $b_1+b_3=9$。

又由于$10+a_2-1-a_2=b_2$， $\therefore$ $b_2=9$。

$\therefore$ $b_3b_2b_1+b_1b_2b_3$

$=100b_3+10b_2+b_1+100b_1+10b_2+b_3$

$=100(b_1+b_3)+10(b_2+b_2)+(b_1+b_3)$

$=100\times 9+10\times 2\times 9+9$

$=900+180+9$

$=1089$。

24 不利用对数，证明2^{150}这个数的位数不小于46。

解 $\because$ $2^{10}=1024>1000=10^3$，

$\therefore 2^{150}=(2^{10})^{15}>(10^3)^{15}=10^{45}$，

而10^{45}是一个46位数， $\therefore$ 2^{150}的位数不少于46。

25 试求2^{150}这个数的个位上是个什么数字。

解法1 $\because$个位数字相同的正整数的正整数指数幂，只要指数相同，则幂的个位数字也必定相同。

而$2^{150}=(2^{10})^{15}=1024^{15}$，

$4^{15}=(4^5)^3=1024^3$，

$\therefore 2^{150}$的个位数字$=4^{15}$的个位数字$=4^3$的个位数字，而$4^3=64$， $\therefore 2^{150}$的个位数字是4。

解法2 $\because$ 4的奇次幂的个位数字皆为4，

而$2^{150}=(2^2)^{75}=4^{75}$，

$\therefore 2^{150}$的个位数字必定是4。

26 已知x、y、z、u、v都是不超过4的非负整数，

而且$625x+125y+25z+5u+v=1978$，

求x、y、z、u、v。

解 由题设有$5(125x+25y+5z+u)=1978-v$，

$\because$ x、y、z、u均为非负整数，

故 $1978-v$能被5整除。

而$0\leqslant v\leqslant 4$， $\therefore$ $v=3$。

从而可得 $125x+25y+5z+u=395$，

$5(25x+5y+z)=395-u$，

同理可推得 $u=0$。

从而，得 $25x+5y+z=79$，

同理可推得 $z=4$， $y=0$， $x=3$。

故所求为 $x=3$， $y=0$， $z=4$， $u=0$， $v=3$。

27 分解因式：$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$。

解法1 原式$=b^2c+bc^2+c^2a-ca^2-ab(a+b)$