

Voronoi图及其应用

杨承磊 吕琳 杨义军 孟祥旭 著



NLIC2970940442



清华大学出版社

Voronoi图及其应用

杨承磊 吕琳 杨义军 孟祥旭 著



NLIC2970940442

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书在介绍 Voronoi 图相关概念和性质的基础上, 侧重介绍 Voronoi 图的构造和应用方面的算法。本书主要内容包括离散点集的 Voronoi 图与 Delaunay 三角部分、多边形的 Voronoi 图、约束 Delaunay 三角部分以及重心 Voronoi 图的基本概念、性质、构造算法, 及其在多边形剖分、几何搜索、多边形求交、可见性计算、路径规划、碰撞检测、骨架计算、文字特征提取、半色调图像生成以及信息可视化等方面的应用。

本书可以供从事相关研究的高校教师、科研人员参考, 也可作为高等院校计算机相关专业研究生的教材和参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

Voronoi 图及其应用/杨承磊等著. —北京: 清华大学出版社, 2013
ISBN 978-7-302-32993-0

I. ①V… II. ①杨… III. ①空间测量 IV. ①P236

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 148236 号

责任编辑: 付弘宇

封面设计: 傅瑞学

责任校对: 焦丽丽

责任印制: 宋 林

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 刷 者: 北京鑫丰华彩印有限公司

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 160mm×230mm 印 张: 11

字 数: 167 千字

版 次: 2013 年 10 月第 1 版

印 次: 2013 年 10 月第 1 次印刷

印 数: 1~500

定 价: 30.00 元

产品编号: 053611-01

作者简介

杨承磊，男，于 1995、1998、2004 年先后获得山东大学计算机应用专业理学学士学位、计算机软件与理论专业工学硕士和博士学位。目前为山东大学计算机科学与技术学院教授。2007 年 1~7 月在香港大学计算机科学系开展合作研究，2010 年 6 月至 2011 年 6 月在哈佛大学做访问学者。



研究主要围绕工业 CAD、文化与自然遗产保护、数字娱乐与远程教育等应用领域，重点开展离散计算几何、人机交互与虚拟现实等方面的理论与项目研发工作。先后主持国家自然科学基金 3 项、国家支撑计划课题 1 项和省部级项目 4 项，并作为学术骨干参与完成了国家 973 计划、863 计划等 10 多项国家级、省部级科研课题，作为骨干成员参与研发出“集成化计算机辅助图案设计与制版系统”等系统软件，获得国家科技进步奖二等奖 1 项、教育部科技进步奖二等奖 1 项以及山东省科技进步奖三等奖 1 项。目前在 CAD、C&G、The Visual Computer、中国科学、软件学报、计算机学报等国内外主要学术刊物与会议上发表论文 50 余篇。与他人合著《Voronoi 图及其应用》、《计算几何及应用》、《人机交互基础教程（第 2 版）（普通高等教育“十一五”国家级规划教材）》等专著和教材。

前 言

Voronoi 图是一种重要的几何结构，也是计算几何领域重要的研究内容之一。Voronoi 图既是一种行之有效的空间剖分和聚类方法，又具有骨架的特性。它按照站点 (sites) 集合中元素的最近邻属性将空间划分成许多单元区域。在不同应用背景下，根据生成空间、测量距离以及站点等定义条件的不同，又产生了不同类型的 Voronoi 图。这些都使得 Voronoi 图在机器人、CAD、模式识别、虚拟现实、地理信息系统、数据挖掘、生物计算以及无线传感网络等领域得到广泛应用，也是解决碰撞检测、路径规划、可见性计算、骨架计算以及凸包计算等计算几何领域中其他问题的有效工具。

本书在介绍 Voronoi 图的概念、性质以及一些经典构造算法的基础上，侧重介绍我们近十年的相关研究成果。本书主要内容包括离散点集的 Voronoi 图与 Delaunay 三角剖分、多边形的 Voronoi 图、约束 Delaunay 三角剖分以及重心 Voronoi 图的基本概念、性质、构造算法，及其在几何搜索、多边形求交、可见性计算、路径规划、碰撞检测、骨架计算、字符特征提取、骨架匹配与模型分割、半色调图像生成以及信息可视化等方面的应用。

本书在注重介绍 Voronoi 图相关基础理论的同时，尽量提供一些简洁、实用和易编程的算法，目的是力求让读者易读、易懂，在学习了本书以后，能解决在各种应用领域中遇到的相关问题。

本书成果与写作过程得到了国家自然科学基金委项目 (69873028, 60703028, 61070093, 61272243, 61202147) 的持续资助。我们在此表示衷心的感谢。

本书由杨承磊、吕琳、杨义军以及孟祥旭合著而成，杨承磊、孟祥旭统稿和审定。由于时间仓促，编者水平有限，书中欠妥和纰漏之处在所难免，恳请读者和同行不吝指正。

作者

2013 年 5 月

目 录

第 1 章	引论	1
1.1	Voronoi 图概述	1
1.2	相关基础概念	4
第 2 章	离散点集的 Voronoi 图及其应用	8
2.1	定义与性质	8
2.1.1	定义	8
2.1.2	性质	13
2.2	构造方法	15
2.2.1	逐点插入法生成 Voronoi 图	15
2.2.2	扫描线法生成 Voronoi 图	17
2.2.3	基于扫描线的逐点插入法生成 Voronoi 图	20
2.2.4	基于 GPU 生成 Voronoi 图	28
2.2.5	基于网格生长的 Delaunay 三角剖分	29
2.3	应用实例	34
2.3.1	半色调图像生成	34
2.3.2	基于 GPU 的半色调图像生成	43
2.3.3	带状图像的骨架计算	47
第 3 章	多边形的 Voronoi 图及其应用	53
3.1	定义与性质	53
3.1.1	定义	53
3.1.2	性质	56
3.2	构造方法	66
3.3	应用实例	68
3.3.1	两个凸多边形的求交计算	68
3.3.2	两个分离凸多边形的距离计算	70

3.3.3	简单多边形中的最短路径计算	87
3.3.4	复杂多边形中的可见性计算	95
3.3.5	虚拟室内场景设计与漫游系统	106
第 4 章	约束 Delaunay 三角剖分及其应用	107
4.1	定义与性质	107
4.2	构造方法	110
4.3	应用实例	114
4.3.1	带状图像的骨架计算	114
4.3.2	在线手写体识别	117
4.3.3	点定位	126
4.3.4	简单多边形中的最短路径与可见性计算	128
4.3.5	复杂多边形中的可见性计算	135
第 5 章	重心 Voronoi 图及其应用	143
5.1	定义与性质	143
5.1.1	定义	143
5.1.2	性质	144
5.2	构造方法	145
5.2.1	Lloyd 方法	145
5.2.2	MacQueen 方法	145
5.2.3	牛顿法	146
5.3	应用实例	147
5.3.1	基于无向图的重心 Voronoi 图的骨架匹配 与模型分割	147
5.3.2	基于流线重心 Voronoi 图的流场可视化	152
	参考文献	158

第1章 引 论

本章主要对Voronoi图 (Voronoi Diagram) 的起源、类型及其应用等进行概述, 并介绍后面章节涉及到的一些基本概念和知识。

1.1 Voronoi 图概述

计算几何 (Computational Geometry) 作为一门学科, 起源于20世纪70年代, 经过近四十多年的发展, 其研究内容不断扩大, 涉及Voronoi图、三角剖分、凸包、直线与多边形求交、可见性、路径规划、多边形剖分等内容。据相关统计, 在数以千计的相关文章中, 约有15%是关于Voronoi图及其对偶图——Delaunay三角剖分 (Delaunay Triangulation) 的研究。由于Voronoi图具有最近性、邻接性等众多性质和比较系统的理论体系, 如今已经在计算机图形学、机械工程、地理信息系统、机器人、图像处理、大数据分析与管理、生物计算以及无线传感网络等领域得到了广泛应用, 同时也是解决碰撞检测、路径规划、可见性计算、骨架计算以及凸包计算等计算几何所涉及的其他问题的有效工具[WangJY2011, Okabe2000, Gold2006, Chen2004, Fan2010, Held1991, Aurenhammer1991等]。

Voronoi图的起源最早可以追溯到17世纪。1644年, Descartes用类似Voronoi图的结构显示太阳系中物质的分布[Descartes1644]。数学家G. L. Dirichlet [Dirichlet1850]和M.G.Voronoi[Voronoi1908]分别于1850年和1908年在他们的论文中讨论了Voronoi图的概念, 所以Voronoi图又叫Dirichlet tessellation。在其他领域, 这个概念也曾分别独立地出现, 如生物学和生理

学中称之为中轴变换 (Medial Axis Transform) 或骨架 (Skeleton), 化学与物理学中称之为 Wigner-Seitz Zones, 气象学和地理学中称之为 Thiessen 多边形 [Thiessen1911] (Voronoi 图最早由 Thiessen 应用于气象观测站中随机分布的研究) 等。由于 M.G.Voronoi 从更通用的 n 维情况对其进行研究和定义, 所以 Voronoi 图这个名称为大多数人所使用。

Voronoi 图是计算几何中一种仅次于凸包的重要几何结构, 也是计算几何的重要研究内容之一。它按照站点 (Site) 集合中元素的最近邻属性将空间划分成许多单元区域, 即 Voronoi 区域。Voronoi 区域与其生成站点一一对应且互不重叠, 构成空间的一个划分。根据站点的 Voronoi 区域是否邻接, 就可以定义站点间的邻接关系。

早期的研究工作更多地集中在离散点集的 Voronoi 图。 n 个平面上的离散点, 按照最近邻原则划分平面, 每个点与它的最近邻区域相关联。Delaunay 三角形是由与相邻 Voronoi 多边形共享一条边的相关点连接而成的三角形。Delaunay 三角形的外接圆圆心是与三角形相关的 Voronoi 多边形的一个顶点。Voronoi 图是 Delaunay 三角形的对偶图。

在不同应用背景下, 根据生成空间、测量距离以及生成站点等条件的不同, Voronoi 图有着各种各样的定义 [WangJY2011, Okabe2000]。例如, 根据空间可分成二维、三维以及更高维 Voronoi 图。最远点 Voronoi 图则是由到一个离散点距离最远的点构成的 Voronoi 区域 (如图 1.1 所示)。又如, 同时到离散点集中的两个点的距离最小的点构成的区域, 称之为二阶 Voronoi 图 (如图 1.2 所示)。或者更一般地, 定义一个 k 阶 Voronoi 图: 对于一个有 n 个点的点集, 给定整数 $k(0 < k < n)$, 同时到点集中 k 个点距离最小的点所划分的区域构成了 k 阶 Voronoi 图。另外, 通过给每个站点赋予不同的权值, 可得到加权的 Voronoi 图 (如图 1.3 所示), Power 图是其中的一种。在路径规划、机械加工、模式识别、虚拟现实、生物计算等领域, 将站点从离散点扩展到线段、圆弧等生成 Voronoi 图的方式也是非常常见的 (如图 1.4 所示)。目前也有不少

研究工作是关于PSLG (Planar Straight Line Graph, 平面直线图) 的Voronoi图及其应用。PSLG的Voronoi图有不同的称谓, 如线状Voronoi图、多边形的中轴或骨架等。因此, 有人认为多边形的Voronoi图起源于1967年Blum关于中轴(骨架)的工作(Blum首先用中轴表示连续平面图形)[Blum1967]。

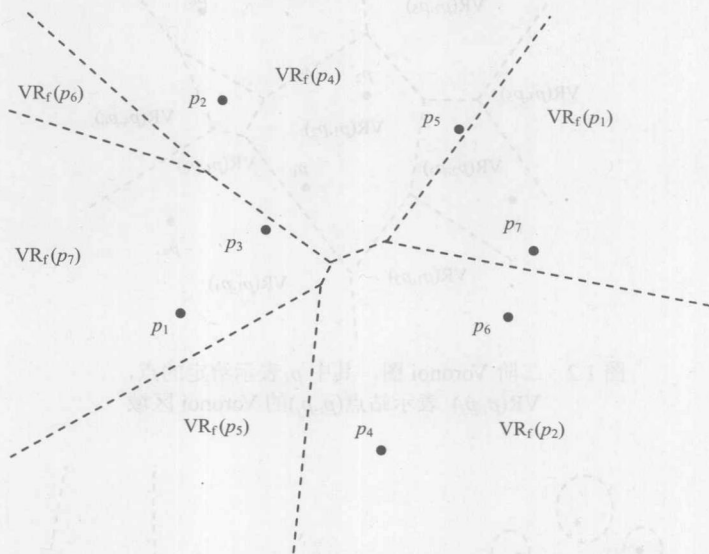


图1.1 最远点Voronoi图, 其中 $VR_f(p_i)$ 表示 p_i 的Voronoi区域

目前, 有关Voronoi图的专门的国际会议为每年举行一次的ISVD会议(International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering), 它已有十年的历史。有关Voronoi图的专著主要包括文献[Wang JY2011, Okabe2000, Cai2010, Edelsbrunner2001, Hjelle2006, Sack2000, O'Rourke1994, Preparata1991, Berg2000, Goodman2004, YangQ2005, Zhou2008, Li2010]等。计算几何算法库(Computational Geometry Algorithms Library, CGAL)提供了一些关于Voronoi图和Delaunay三角剖分的算法软件[CGAL]。

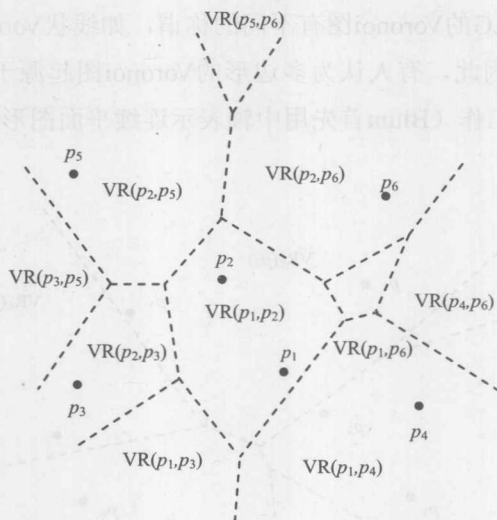


图 1.2 二阶 Voronoi 图, 其中 p_i 表示给定的点, $VR(p_i, p_j)$ 表示站点 (p_i, p_j) 的 Voronoi 区域

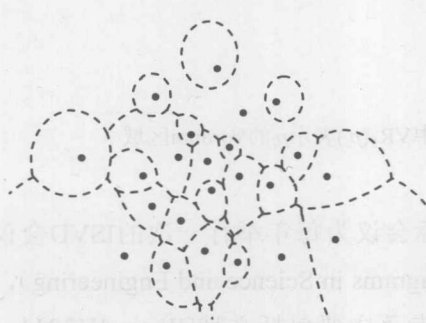


图 1.3 乘法加权 Voronoi 图

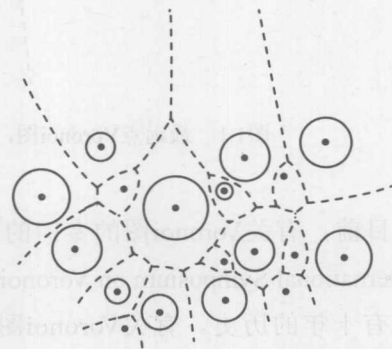


图 1.4 圆的 Voronoi 图

1.2 相关基础概念

定义1.1 在二维欧氏空间 E^2 中的一个多边形是用一个有限线段的集合 L 来定义的, L 中每一线段的每一个端点是 L 中两条线段且仅是这两条线段

的公共端点, L 中任两条线段上的点均可通过集合 L 中的线段连通。构成多边形的线段称为多边形的边, 边的端点称为多边形的顶点。

图1.5中的线段集合构成多边形, 但图1.6中的线段集合不构成多边形。由多边形定义可知, 多边形是线段集合的一个有序的排列。有公共端点的两条边被称为相邻边。在本书的后面章节会讨论类似图1.6 (b) 中图形所围成的区域, 为了区分, 我们将这样的图形称为多边界多边形。

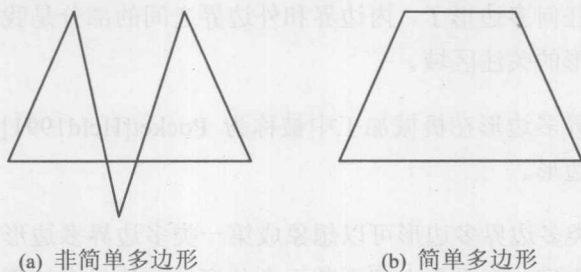


图 1.5 多边形

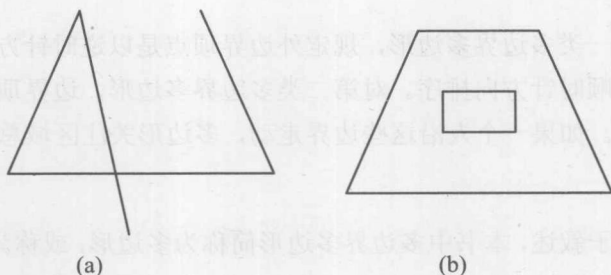


图 1.6 非多边形的例子, (a) 和 (b) 都不是多边形

定义 1.2 如果一个多边形的任何不相邻的两条边均不相交, 则称这个多边形为简单多边形。一个简单多边形只有一条边界, 我们也称之为单边界多边形。图 1.5 (a) 是多边形但不是简单多边形, 图 1.5 (b) 是简单多边形。

定义 1.3 简单多边形把平面分割成内部和外部两个不连通的区域。如果一个简单多边形的内部是凸集, 则这个简单多边形是凸的, 称为凸多边形。

定义 1.4 我们将由多条简单的、封闭的、不相交的曲线围成的平面区域称为多边界多边形。这些曲线都是它的边界。一个多边界多边形有多个边界。

一般地，多边界多边形有下面两种类型。

(1) 第一类多边界多边形是一些分离的单边界多边形的集合被另一个单边界多边形所包围，这一个最外面的边界称之为外边界，其他的单边界多边形都在它的内部，我们称之为内边界。根据单边界多边形的定义，这些多边形内部不存在任何多边形了。内边界和外边界之间的部分是我们感兴趣的部分，称为多边形的关注区域。

这类多边界多边形在机械加工中被称为 Pocket[Held1991]，在数学上被称为多连通多边形。

(2) 第二类多边界多边形可以想象成第一类多边界多边形的外边界被不断放大并移向无穷，在平面上留下若干个分离的单边界多边形的集合。这些多边形的外部并延伸至无限的部分则是我们感兴趣的部分，为多边形的关注区域。

对于第一类多边界多边形，规定外边界顶点是以逆时针方向排序，内边界顶点是以顺时针方向排序。对第二类多边界多边形，边界顶点都是以顺时针方向排序。如果一个人沿这些边界走动，多边形关注区域总是位于前进方向的左侧。

为了便于叙述，本书中多边界多边形简称为多边形，或称为复杂多边形。

定义 1.5 对于多边形的一条边界上的一个顶点，令它的两个关联边的夹角为 α 。该夹角的大小是计算扫过多边形的关注区域的角度，如果 $\alpha > 180^\circ$ ，则称该顶点为（向外）凹顶点，也称为内尖点；如果 $\alpha < 180^\circ$ ，则称该顶点为（向外）凸顶点；如果 $\alpha = 180^\circ$ ，则称该顶点为切顶点。

定义 1.6 在一个简单多边形 P 中，如果存在这样一个点 z ，对 P 内任意一点 p ，都使线段 zp 完全位于 P 内，则称 P 为星形多边形。

定义 1.7 图论中的图 $G=(P, E)$ 是由顶点集合 P 和边集合 E 组成的。若能把 P 的所有顶点映射到一个平面上, 对 E 中的每条边的端点在该平面上的两个映像点, 都有平面上的一条对应的简单曲线连接, 如果除了在顶点处外, 这些简单曲线之间不再有交点, 则这个图 $G=(P, E)$ 称为可嵌到平面上。可嵌到平面上的图称为平面图。边为直线的平面图称为平面直线图 (PSLG)。

第 2 章 离散点集的 Voronoi 图及其应用

2.1 定义与性质

2.1.1 定义

对于平面上任意 n 个位置互异的离散点的集合 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 其 Voronoi 图存在几种等价的解释与定义, 包括最近距离聚类法、通过 Delaunay 三角剖分计算对偶图法、半平面法、波传播法、圆锥投影法、凸包投影法等。

1. 最近距离聚类法

该方法将平面上的所有点按照它们到所给离散点 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的欧氏距离的远近进行聚类, 分别得到每个离散点 $p_i (1 \leq i \leq n)$ 的最近点的集合:

$$VR(p_i) = \{q \mid |qp_i| \leq |qp_j|, \forall j \neq i, p_i, p_j \in P\}$$

其中, $|qp_i|$ 表示 q 和 p_i 两点间的欧氏距离[WangJY2011]。

P 的 Voronoi 图为:

$$VD(P) = \bigcup_{i=1}^n VR(p_i)$$

这里, 为了避免与平面上任意一点混淆, 我们称 $p_i (1 \leq i \leq n)$ 为站点, 并称 $VR(p_i)$ 为 p_i 的 Voronoi 区域(或 Voronoi 多边形、Voronoi 单元)。将 Voronoi 区域的边称之为 Voronoi 边, Voronoi 区域的顶点称之为 Voronoi 顶点, 每个

Voronoi 顶点 v 所连接的边数称为 v 的度。每条 Voronoi 边 e 被且只被 2 个站点的 Voronoi 区域所共享，我们将这 2 个站点称之为 e 的关联站点。Voronoi 顶点的度一般为 3，当度大于 3 时便认为是退化情况（为了叙述简洁，若不做特别说明，本书后面部分不再涉及退化情况），这些共享同一个 Voronoi 顶点 v 的 Voronoi 区域的站点被称为 v 的关联站点。图 2.1 给出了 11 个离散点（黑色实点）的 Voronoi 图，其中实线边为 Voronoi 边。

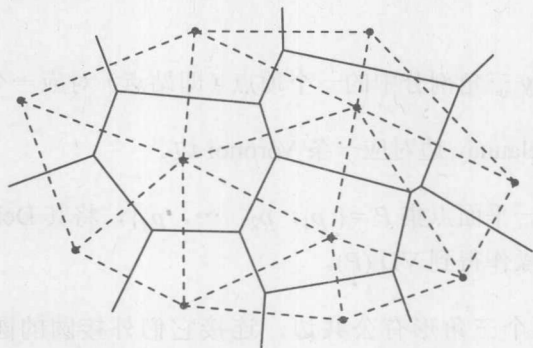


图 2.1 平面离散点集（黑色实点）的 Voronoi 图（实线部分）及其 Delaunay 三角剖分（虚线部分）

对于一个给定的点集，设其中的若干点为站点，可根据类似前面的 Voronoi 区域的定义计算出到每个站点距离最近的点，从而实现该点集的聚类。

2. 对偶图—Delaunay 三角剖分法

对任一个平面点集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ，它的 Voronoi 图用 $VD(P)$ 表示，我们将每条 Voronoi 边的两个关联站点（即两个站点的 Voronoi 区域有共享边）都用直线段（如图 2.1 中虚线所示）连接在一起，就可得到 P 的 Voronoi 图的对偶图——Delaunay 图。在退化情况下，即存在四点共圆时，Delaunay 图中存在不是三角形的面；在非退化情况下，即 P 中不存在四点共圆时，Delaunay 图成为一个三角剖分，称为 Delaunay 三角剖分，用 $DT(P)$ 表示。退化情况下的 Delaunay 图可以比较容易地转化为 Delaunay 三角剖分。我们将

Delaunay 三角剖分中的每个三角形称之为 Delaunay 三角形。每个 Delaunay 三角形中的每条边称之为 Delaunay 边，每个顶点是其相对边的 Delaunay 顶点[WangJY2011]。

平面离散点集的 Voronoi 图与其 Delaunay 三角剖分存在如下关系。

- (1) 每个 Delaunay 三角形对应一个 Voronoi 顶点，其外接圆的圆心是一个 Voronoi 顶点；
- (2) Delaunay 三角剖分中的一个顶点（即站点）对应一个 Voronoi 区域；
- (3) 每条 Delaunay 边对应一条 Voronoi 边。

因此，对任一平面点集 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ，将其 Delaunay 三角剖分后，可通过如下操作得到 VD (P)。

(1) 如果两个三角形有公共边，连接它们外接圆的圆心可得到一条 Voronoi 边。

(2) 如果一个三角形的一条边没有相邻的三角形，由其外接圆的圆心开始做一射线，方向与三角形的这一条边垂直，可得到一条半开放的 Voronoi 边。

3. 半平面法

对于平面上的两个点 p_i 和 p_j ，用 $h(p_i, p_j)$ 表示 p_i 所在的半平面。平面上一点 $q \in h(p_i, p_j)$ 当且仅当 $|qp_i| \leq |qp_j|$, $j \neq i$, $p_i, p_j \in P$ 。

一个 Voronoi 区域 $VR(p_i)$ 也可以看作是 p_i 与其他所有站点所产生的半平面的交集。因此，可以用半平面交的方法描述每个站点 p_i 的 Voronoi 区域：

$$VD(P_i) = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} h(p_i, p_j)$$

基于这种定义，对于每一个站点 p_i ，我们计算出 p_i 与其他站点的半平面，然后求交集即可得到 $VR(p_i)$ ，从而得到整个点集的 Voronoi 图[WangJY2011]。