

■ 大学公共课系列教材

高等数学教程 (经管类)

G AODENG SHUXUE JIAOCHENG

李 静◎主 编

DAXUE GONGGONGKE
JIAOCAI



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

014005762
大学公共课系列教材

013-43
348

高等数学教程 (经管类)

G AODENG SHUXUE JIAOCHENG

主 编◎李 静

副 主 编◎郭 军 陈 伟 王 博

参编人员◎ (按姓氏笔画排序)

马秀梅 王彤歌 王雅丽

李瑞娟 张西恩 林距华



013-43

348



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



北航

C1692664

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程/李静主编. —北京:北京师范大学出版社,
2013.11
ISBN 978-7-303-17021-0

I. ①高… II. ①李… III. ①高等数学-高等学校-教材
IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第202462号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com>
电子信箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街19号
邮政编码:100875

印 刷:北京中印联印务有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:170 mm × 230 mm
印 张:26
字 数:480千字
版 次:2013年11月第1版
印 次:2013年11月第1次印刷
定 价:38.00元

策划编辑:胡廷兰 责任编辑:胡廷兰
美术编辑:毛佳 装帧设计:毛佳
责任校对:李菡 责任印制:孙文凯

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话:010-58800697

北京读者服务部电话:010-58808104

外埠邮购电话:010-58808083

本书如有印装质量问题,请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话:010-58800825

内容提要

《高等数学教程》(经济管理类)根据教育部最新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”,考虑知识点的多角度变式和内容水平的阶梯过渡,以教师高效教学和学生高效学习为目标,强调合情理解和演绎推证相结合,统筹接受教学和自主学习,兼顾数学的工具性和素养性,同时力求体现经济、管理专业的专业特点,重点突出数学知识的经济背景,以及对学生数学应用能力,特别是解决经济问题的应用能力的培养.

全书内容包括:函数与极限,一元函数微积分及其应用,无穷级数,多元函数微积分及其应用,微分方程和差分方程.每单元内容后设练习及提示,不同层次的习题,包括一道历年考研数学三真题及解答.

本书可作为高等学校经济管理类专业“高等数学”课程的教材,尤其适合报考研究生的读者以及自学者使用.

前 言

本教材是河北省高等教育教学改革研究重点项目“本原性问题驱动下的高等数学变式教学研究与实践(2012GJJG108)”的一个实践成果。编者基于“数学学习在于学会思考，问题意识有助于专业创新，学生主体性发挥在于问题的启发思考”等理念，根据教育部最新的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，集多年教学经验和教学研究成果，在继承传统优点的基础上，独创性地开辟了本书的编写风格。

(1) 设置本原性问题促使学生学会数学思考

本书每节前设置的“导学思考”中涵盖宏观和微观两类问题。“宏观问题”帮助学生比较粗略地了解或认识“材料内容”，做到以旧带新，激发学习兴趣；“微观问题”帮助学生微观地探究或研究“材料内容”，驱动学生把握数学本质，这些问题给学生指明了高效学习与能力提高的路径，可以帮助教师引领学生课前思考、课上聚焦实质、课后总结反思。问题旨在促进思考，不在乎回答正确与否。

(2) 变式教学思想渗透到认知的全过程

本书根据经管类学生由具体到抽象过渡的思维特点，在背景理解的基础之上，注重知识脉络的梳理、知识之间的合理“过渡”。在继承以往“够用、需要、适合”的工具性理念的基础之上，本书编写顺序充分体现了过程性、阶梯性、合情性的过程变式，同时，注重数学思想方法的本质提炼和学习掌握的概念变式、问题变式，并借用“数学素养”教育理念激发学生在学习数学的热情。

(3) 多类型、多层次例、习题安排促进学生自主发展

本书在例、习题的安排上，遵循“例题是教师搀扶着走，

练习是拄着拐杖走，习题是自己独立走”的基本理念。全书例题过渡的坡度平缓，类型的变式多元多样，逐步凸显解题的思想方法；练习附有提示，以帮助 学生尝试运用所学方法技巧；习题分三个层次设置，以充分照顾程度不同学生的 学习，便于教师进行有针对性的习题作业布置；考研题目是章节内容的深 化，可以激发学生进行更深层次的知识拓展，附有解题思路 and 答案。

(4) 教师教和学生学的有机统一

本书是从使学生会学数学思考的角度设计的，这样的设计有助于学生开展 有效、高效的学习，有助于年轻教师有效地研究教学内容，更快地适应学生的 学习状态与规律，进而得到学生的认可。基于此，本教材确定书名为《高等数 学教程》，即它是学生会学和教师教有机融合的程式或教学范式。

书中加“※”号的内容，可以根据教学需要和学时安排进行取舍或略 去不讲。

本书由廊坊师范学院数学与信息科学学院李静任主编，廊坊师范学院郭 军、陈伟和西北大学王博任副主编；全书的结构框架和书中各章的“导学思考” 内容由李静设计。编写分工如下：第 1 章和第 4 章，王雅丽，廊坊师范学院； 第 2 章和第 3 章，李静；第 5 章，李瑞娟，廊坊师范学院；第 6 章，王彤歌， 廊坊师范学院；第 7 章，马秀梅，廊坊师范学院；第 8 章，张西恩，廊坊师范 学院；第 9 章和第 10 章，林距华，廊坊师范学院。每章初稿均由主编修改、 完善和定稿，最后由主编李静，副主编郭军、陈伟和王博统稿。感谢北京师范 大学出版社编辑胡廷兰老师及同人对本书的帮助和支持。

本书是廊坊师范学院数学与信息科学学院数学与应用数学重点专业的建设 教材，得到了廊坊师范学院副院长李士杰教授以及教务处的大力支持，在此表 示衷心的感谢！

由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不足之处，望广大读者 和同行专家批评指正。

编 者

2013 年 10 月

目 录

第 1 章 函数/1

1.1	集合	1
1.1.1	集合的概念	1
1.1.2	集合的表示法	2
1.1.3	全集、空集、子集、相等	2
1.1.4	集合的运算	3
1.1.5	集合的笛卡儿乘积	6
	习题 1-1	7
1.2	实数集	8
1.2.1	实数与数轴	8
1.2.2	绝对值	8
1.2.3	区间	9
1.2.4	邻域	10
	习题 1-2	11
1.3	函数关系	12
1.3.1	函数关系	12
1.3.2	函数的表示法	16
	习题 1-3	19
1.4	函数关系的建立	20
	习题 1-4	22
1.5	函数的几种简单性质	23
1.5.1	函数的奇偶性	23
1.5.2	函数的周期性	24
1.5.3	函数的单调性	25
1.5.4	函数的有界性	26
	习题 1-5	27
1.6	反函数与复合函数	29

1.6.1	反函数	29
1.6.2	复合函数	31
	习题 1-6	32
1.7	初等函数	33

第 2 章 极限与连续 /37

2.1	数列的极限	37
2.1.1	数列	37
2.1.2	数列的极限	38
	习题 2-1	40
2.2	函数的极限	41
2.2.1	当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	41
2.2.2	当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	43
2.2.3	左极限与右极限	45
2.2.4	函数极限的定理	46
2.2.5	变量的极限	47
	习题 2-2	48
2.3	无穷大量与无穷小量	49
2.3.1	无穷大量	49
2.3.2	无穷小量	50
2.3.3	无穷小量与无穷大量的关系	52
2.3.4	无穷小量的比较	52
	习题 2-3	54
2.4	极限的运算法则	56
	习题 2-4	60
2.5	变量极限存在准则	62
2.5.1	单调有界数列必有极限定理	62
2.5.2	“迫敛性”定理	63
	习题 2-5	65
2.6	两个重要极限	66
2.6.1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	66
2.6.2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	67
	习题 2-6	71
2.7	等价无穷小量	73

习题 2-7	75
2.8 函数的连续性	77
2.8.1 函数连续的概念	77
2.8.2 函数的间断点	79
习题 2-8	82
2.9 连续函数的运算及性质	84
2.9.1 连续函数的运算	84
2.9.2 闭区间上连续函数的性质	85
习题 2-9	87

第 3 章 导数与微分 /88

3.1 导数的概念	88
3.1.1 变量的变化率——导数的概念	88
3.1.2 导数的几何意义	91
3.2 导数的概念(续)	93
3.2.1 左、右导数	93
3.2.2 可导与连续	93
习题 3-2	96
3.3 导数运算法则	98
习题 3-3	103
3.4 导数运算法则(续)	105
3.4.1 复合函数求导	105
3.4.2 隐函数求导	107
3.4.3 参数式求导	108
3.4.4 其他求导法	108
3.4.5 基本初等函数的导数公式	110
习题 3-4	111
3.5 高阶导数	113
习题 3-5	115
3.6 微分	116
3.6.1 微分的概念	116
3.6.2 微分的几何意义	117
3.6.3 微分的运算公式	118
3.6.4 微分的应用	120
习题 3-6	121

第4章 中值定理与导数的应用 /123

4.1	中值定理	123
4.1.1	罗尔中值定理	123
4.1.2	拉格朗日中值定理	125
4.1.3	柯西中值定理	128
	习题 4-1	129
4.2	洛必达法则	131
4.2.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式的极限	131
4.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	133
4.2.3	其他类型的未定式的极限($\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0)	134
	习题 4-2	137
4.3	函数的增减性	139
	习题 4-3	141
4.4	函数的极值	142
	习题 4-4	147
4.5	最大值与最小值及极值在经济上的应用	149
4.5.1	最大值与最小值	149
4.5.2	极值在经济上的应用举例	151
	习题 4-5	154
4.6	曲线的凹向与拐点	156
	习题 4-6	160
4.7	函数图形的作法	161
4.7.1	曲线的渐近线	161
4.7.2	函数图形的作法	163
	习题 4-7	166
4.8	相对变化率在经济中的应用*——弹性	167
4.8.1	相对变化率——弹性	167
4.8.2	需求、供给的函数与弹性	169
4.8.3	总收益的需求弹性分析	173
	习题 4-8	174

第5章 不定积分 /176

5.1	不定积分的概念和性质	176
-----	------------	-----

162	5.1.1	原函数的概念	176
162	5.1.2	不定积分的概念	177
162	5.1.3	不定积分的性质	179
162	5.1.4	不定积分的几何意义	179
162		习题 5-1	180
162	5.2	基本积分公式	181
162		习题 5-2	184
	5.3	换元积分法	185
	5.3.1	第一换元积分法(凑微分法)	185
012	5.3.2	第二换元积分法	189
012		习题 5-3	193
212	5.4	分部积分法	196
212		习题 5-4	199
212	5.5	综合杂例	201
212		习题 5-5	204

第 6 章 定积分 / 205

222	6.1	定积分的概念	205
172	6.1.1	两个实例	205
172	6.1.2	定积分的定义	208
162	6.1.3	定积分的存在定理	209
162		习题 6-1	211
162	6.2	定积分的基本性质	212
162		习题 6-2	215
162	6.3	微积分基本定理	217
162	6.3.1	积分上限函数及其导数	217
162	6.3.2	牛顿—莱布尼茨公式	218
162		习题 6-3	220
012	6.4	定积分的换元积分法与分部积分法	222
012	6.4.1	定积分的换元法	222
012	6.4.2	定积分的分部积分法	224
012		习题 6-4	225
012	6.5	定积分的应用	227
162	6.5.1	平面图形的面积	228
	6.5.2	旋转体和已知平行截面面积的立体的体积	230

6.5.3	定积分在经济中的应用	231
	习题 6-5	232
6.6	广义积分与 Γ 函数	234
6.6.1	无限区间上的广义积分	234
6.6.2	无界函数的广义积分	235
6.6.3	Γ 函数	237
	习题 6-6	238

第 7 章 无穷级数 / 240

7.1	无穷级数及其性质	240
7.1.1	无穷级数的概念	240
7.1.2	无穷级数的基本性质	242
	习题 7-1	245
7.2	正项级数	247
7.2.1	正项级数收敛的充要条件	247
7.2.2	比较判别法	247
7.2.3	比值判别法与根值判别法	250
	习题 7-2	252
7.3	任意项级数	254
7.3.1	交错级数收敛性的判定	254
7.3.2	绝对收敛与条件收敛	255
	习题 7-3	257
7.4	幂级数	259
7.4.1	幂级数及其收敛性	259
7.4.2	幂级数的性质	264
	习题 7-4	266
7.5	函数展开成幂级数	268
7.5.1	泰勒级数	268
7.5.2	几个初等函数的幂级数展开式	270
	习题 7-5	276
7.6	函数幂级数展开式的应用	277
7.6.1	近似计算	277
7.6.2	欧拉公式	280
	习题 7-6	281

第 8 章 多元函数/282

8.1 空间解析几何简介	282
8.1.1 空间直角坐标系	282
8.1.2 空间任意两点间的距离	283
8.1.3 曲面与方程	284
8.2 多元函数的概念	287
8.2.1 平面区域	287
8.2.2 二元函数的概念	288
8.2.3 二元函数的定义域	288
8.2.4 二元函数的几何意义	289
习题 8-2	290
8.3 二元函数的极限和连续	291
8.3.1 二元函数的极限	291
8.3.2 二元函数的连续性	292
习题 8-3	293
8.4 偏导数与全微分	294
8.4.1 偏导数	294
8.4.2 高阶偏导数	297
8.4.3 全微分	298
习题 8-4	302
8.5 多元复合函数微分法与隐函数微分法	304
8.5.1 多元复合函数微分法	304
8.5.2 隐函数的微分法	307
习题 8-5	310
8.6 二元函数的极值	311
8.6.1 二元函数极值及其求法	311
8.6.2 二元函数的最大值与最小值	313
8.6.3 多元函数的条件极值	315
习题 8-6	316
8.7 二重积分的概念与性质	318
8.7.1 二重积分的概念	318
8.7.2 二重积分的性质	321
习题 8-7	323
8.8 二重积分的计算与应用	324
8.8.1 二重积分的计算	324

8.8.2 二重积分的应用	332
习题 8-8	333

第 9 章 微分方程简介 /336

9.1 微分方程的基本概念	336
9.1.1 微分方程模型的建立	336
9.1.2 微分方程的基本概念	337
习题 9-1	338
9.2 一阶微分方程	340
9.2.1 可分离变量的微分方程	340
9.2.2 齐次微分方程	341
9.2.3 一阶线性微分方程	342
习题 9-2	345
9.3 二阶微分方程*	346
9.3.1 几种二阶微分方程	346
9.3.2 二阶线性微分方程	348
习题 9-3	353
9.4 微分方程的应用	355
习题 9-4	357

第 10 章 差分方程初步* /359

10.1 差分及差分方程的基本概念	359
10.1.1 差分的定义及性质	359
10.1.2 差分方程	360
习题 10-1	361
10.2 一阶常系数线性差分方程的解法	362
10.2.1 一阶常系数线性齐次差分方程的解	362
10.2.2 一阶常系数线性非齐次差分方程的特解和通解	362
习题 10-2	365

部分习题答案与提示 /366

参考文献 /401

第1章 函数

初等数学中集合和函数的基本知识,是高等数学学习的基础.本章将对集合、实数和函数等一些基本概念和基本性质进行回顾,并介绍一些常用的数学符号.

1.1 集合

导学思考

(1) 作为“一定属性”和“一定数量”的集合,关系性质有哪些?运算性质有哪些?

(2) 笛卡儿乘积是一种集合元素的构成方法吗?这有何意义?

1.1.1 集合的概念

“集合”是数学中的一个重要概念,它在现代数学的发展中起着非常重要的作用.一般说来,集合是具有某种属性的事物或对象的全体,或者说是一些确定对象的汇总.构成集合的事物或对象,称为集合的**元素**.

下面举几个集合的例子.

例 1 中国古代四大发明.

例 2 12 的所有正约数.

例 3 全体有理数.

例 4 圆 $x^2 + y^2 = 2$ 内部(不包含圆周)所有的点.

由有限个元素构成的集合,称为**有限集合**,如例 1、例 2;由无限多个元素构成的集合,称为**无限集合**,如例 3、例 4.

通常,我们用大写字母 A, B, C, D, X, Y 等表示集合,用小写字母 a, b, c, d, x, y 等表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,则记作 $a \in A$,读作 a 属于 A 或 a 在 A 中;如果 a 不是集合 A 的元素,则记作 $a \notin A$,读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中.

例如,对于自然数集合 \mathbf{N} , 1 是 \mathbf{N} 的元素,所以 $1 \in \mathbf{N}$;而 -1 不是 \mathbf{N} 的元素,所以 $-1 \notin \mathbf{N}$.

1.1.2 集合的表示法

1. 列举法

即按任意顺序将集合中的元素一一列出，并用花括号“{ }”括起来.

例 5 自然数集合可表示为

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

例 6 由方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根所构成的集合 A ，可表示为

$$A = \{3, 4\}.$$

注意：用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复.

2. 描述法

即把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法. 一般表示为

$$A = \{a \mid a \text{ 具有的属性}\}.$$

例 7 设 A 为不大于 5 的自然数的集合，可表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 是不大于 5 的自然数}\}.$$

例 8 设 A 为方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根构成的集合，可表示为

$$A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

集合以及集合间的关系可以用图形表示，称为文氏图. 文氏图用一个平面区域表示一个集合，如图 1-1 所示. 集合内的元素以区域内的点来表示.

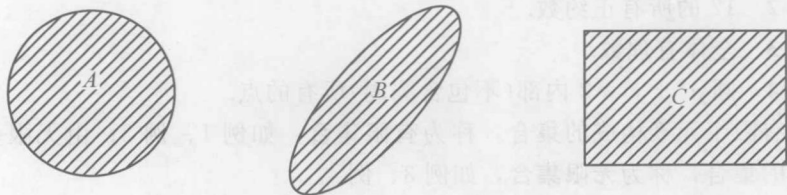


图 1-1

1.1.3 全集、空集、子集、相等

1. 全集

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 U . 全集是相对的，研究的问题不同，所取的全集也不同. 例如，在研究平面解析几何时，可以把整个

坐标平面取作全集；在研究整数问题时，可以把整数集取作全集。

2. 空集

不包含任何元素的集合称为空集，记作 \emptyset 。

例 9 方程 $x^2+8=0$ 的实数根构成的集合为空集。

例 10 在欧几里得几何中，平面上两条平行线的交点构成的集合为空集。

注意： $\{0\}$ 及 $\{\emptyset\}$ 都不是空集，前者含有元素“0”，后者以空集“ \emptyset ”为其元素。

3. 子集

定义 1 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即“如果 $a \in A$ ，则 $a \in B$ ”，则称 A 为 B 的子集。记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ ，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A ，如图 1-2 所示。

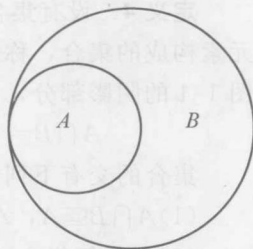


图 1-2

例 11 设 \mathbf{N} 表示全体自然数的集合， \mathbf{Q} 表示全体有理数的集合， \mathbf{Z} 表示全体整数的集合， \mathbf{R} 表示全体实数的集合，则有

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}, \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}, \mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}.$$

例 12 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{2, 4, 5\}$ ，则

$$B \subseteq A.$$

4. 集合的相等

定义 2 设有集合 A 和 B ，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$ 。

例 13 设 $A = \{1, 0\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - x = 0\}$ ，则

$$A = B.$$

关于子集具有下列结论。

- (1) $A \subseteq A$ ，即“集合 A 是其自己的子集”；
- (2) 对任意集合 A ，有 $\emptyset \subseteq A$ ，即“空集是任意集合的子集”；
- (3) 若 $A \subseteq B$ ， $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ ，即“集合的包含关系具有传递性”。

1.1.4 集合的运算

1. 并

定义 3 设有集合 A 和 B ，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 和