普通高等教育“十二五”规划教材

微分方程（组）边值问题的变分原理及MATLAB求解

李海春　张志霞　黄蕊　何群　编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材

微分方程（组）边值问题的变分原理及MATLAB求解

李海春　张志霞　黄蕊　何群　编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书共有6章：第1章简单介绍C空间、L^p空间和Sobolev空间及其性质，讨论这些空间的积空间和对偶空间；第2章介绍变分引理、F. Riesz表示定理、Lax - Milgram定理和Lion定理等；第3章建立微分方程（组）对应泛函，研究微分方程（组）与其对应泛函最小值之间的等价关系，进而研究微分方程（组）边值问题弱解的存在性和唯一性；第4章给出微分方程（组）周期边值问题解的估计式；第5章运用Ritz方法，应用MATLAB软件，求各种微分方程（组）边值问题的近似解，并给出程序；第6章运用Galerkin方法，应用MATLAB软件，求各种微分方程（组）周期边值问题的近似解，给出程序。

本书借鉴已有研究成果，可作为数学系相关专业和理工科学生教材。对于没有基础人员也可直接研究最后两章，学会应用Ritz方法和Galerkin方法求解微分方程边值问题等。一些重要的定义、内容和证明是作者给出或引用的，疏漏和错误在所难免，真诚欢迎读者批评指正。

图书在版编目（CIP）数据

微分方程（组）边值问题的变分原理及MATLAB求解 / 李海春等编著. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2014.1
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-1657-1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①Matlab软件—应用—微分方程—边值问题—高等学校—教材 Ⅳ. ①O175.8-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第008724号

书　　名	普通高等教育“十二五”规划教材 **微分方程（组）边值问题的变分原理及MATLAB求解**
作　　者	李海春　张志霞　黄蕊　何群　编著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E - mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京时代澄宇科技有限公司
印　　刷	三河市鑫金马印装有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　14印张　332千字
版　　次	2014年1月第1版　2014年1月第1次印刷
印　　数	0001—2000册
定　　价	**29.00元**

前言

现代科学、技术和工程中大量数学模型都可以用微分方程（组）来描述，解释或预见各种自然现象，取得显著的成效。但遗憾的是绝大多数微分方程（组）（特别是偏微分方程）定解问题的解不能以解析解的形式给出。

微分方程的创立是数学最伟大的成就之一。数学家应用微分方程（组）解决诸多物理问题时，形成一个解决数学物理问题的数学分支——变分法。变分法的基本内容是建立泛函的极值问题和微分方程（组）边值问题两者之间联系。变分法有很多直接手段，如 Ritz 方法和 Galerkin 方法。随计算机技术的迅猛发展，基于变分法发展起来的有限元法，在物理、力学和工程技术中得到广泛运用，已经成为计算数学的一个重要分支学科。

近些年，近代变分法得到重大发展，本书属于古典变分法的范畴，它突破变分法未在微分方程组中应用的限制，将该方法深入到方程组等相互作用的系统中，使变分法理论趋于完善。通过对微分方程组边值问题的求解，显示该方法有很大的可行性和正确性，这种方法将促使很多领域迅猛发展，特别是在人工智能（机器人）、航空、航天、土木、机械、水文和原子能等领域。

本书在编写过程中得到中国水利水电出版社等大力支持，在此对他们的工作表示感谢。参与编写的有沈阳农业大学李海春、张志霞、黄蕊和东北大学何群等。

编　者

2013 年 8 月

目录

第 1 章　广义空间和广义（偏）导数

1.1　线性空间和线性算子

度量空间是泛函分析的基础，是现代数学最重要的概念。函数空间 C 和 L^p 是最基本的度量空间，它们在泛函分析、微分方程（组）边值问题的弱解等研究中起着极为重要的作用。

1.1.1　空间 C 及其性质

定义 1.1.1.1　连续函数空间 $C(\Omega)$

有界区域 Ω（$\in R^n$）上的一切连续函数的全体，称连续函数空间，记 $C(\Omega)$，具有下列性质：

定理 1.1.1.1　空间 $C(\Omega)$ 是完备。

定理 1.1.1.2　空间 $C(\Omega)$ 是 Banach 空间。

定理 1.1.1.3　空间 $C(\Omega)$ 是可分的。

闭区域 Ω 上的一切具有 k 阶导数和偏导数的连续函数全体所形成的线性空间，记作 $C^k(\Omega)$。一切具有导数和偏导数的连续函数全体所形成的线性空间，记作 $C^\infty(\Omega)$。$C_0^\infty(\Omega)$和 $C_0^k(\Omega)$ 表示紧支集函数组成空间。

以上空间在常微分方程（组）和椭圆型方程（组）中可用到，下面介绍抛物型方程（组）和双曲型方程（组）中用到的带有时间的连续函数空间 $C([a, b]; \Omega)$。

定义 1.1.1.2　时空间 $C([a, b]; \Omega)$

所有满足 $\{f \mid \| f \|_{C([a,b];\Omega)} = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} | f(x, t) | < \infty\}$ 连续函数的全体，记为时空间：$C([a, b]; \Omega)$

很容易验证，空间 $C([a, b]; \Omega)$ 具有以下性质：

定理 1.1.1.4　空间 $C([a, b]; \Omega)$ 是完备的。

定理 1.1.1.5　空间 $C([a, b]; \Omega)$ 是 Banach 空间。

定理 1.1.1.6　空间 $C([a, b]; \Omega)$ 是可分的。

这些定理证明在一般泛函分析书籍中都可找到，略。

1.1.2　L^p 空间及其性质

一切 p 次幂可积的函数构成一个函数类，称为空间 L^p（$p\geqslant 1$）。特别地，当 $p=2$，L^2 是 Hilbert 空间，它在微分方程（组）研究中起着重要作用。它利用代数中剩余类的思

想，把 L^p 中函数进行分类处理，视同一个类中任意两个函数在其定义域上几乎处处相等(或看作同一个元)，而属于不同类的函数则几乎处处不相等。本书考虑都是完备化后的 L^p（Ω）空间和空间 L^p（0，T；Ω）。

定义 1.1.2.1 空间 L^p（Ω）

设 $p\geqslant 1$，函数 f（x）是定义在 Ω 上的 Lebesgue 可测函数。若 $|f(x)|^p$ 可积，称 f（x）是 p 次幂可积的。一切 p 次幂可积的函数构成一个函数类，称为 L^p（Ω）空间，简称 L^p 空间，即：

$$L^p(\Omega)=\left\{f(x)\left|\left|\int_{\Omega}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right|<\infty,x\in\Omega\right.\right\}$$

定义在 Ω 上的几乎处处相等的函数 f（x）和 g（x），记为 f（x）$=g$（x）$a.e.$ 可运用 Young 不等式、Holder 不等式和 Minkowski 不等式证明线性空间 L^p（Ω）具有下列性质：

定理 1.1.2.1　空间 L^p（Ω）（$p\geqslant 1$）是赋范线性空间。

定理 1.1.2.2　空间 L^p（Ω）（$p\geqslant 1$）是 Banach 空间。

定理 1.1.2.3　空间 L^p（Ω）（$p\geqslant 1$）是可分的。

定理 1.1.2.4　空间 L^p（Ω）是 Hilbert 空间。

定理 1.1.2.5　如果 $1\leqslant p<\infty$，则空间 L^p（Ω）是自反的。

定理 1.1.2.6　若 $1\leqslant p<\infty$，则 C_0（Ω）在 L^p（Ω）中稠密，空间 C_0^∞（Ω）在空间 L^p（Ω）中稠密。

定义 1.1.2.2　空间 L^p（a，b；Ω）

设 $p\geqslant 1$，函数 f（x，t）是定义在 Ω_T 上的 Lebesgue 可测函数。若 $|f(x,t)|^p$ 可积，称 f（x，t）是 p 次幂可积的。一切 p 次幂可积的函数构成一个函数类，称为 L^p（a，b；Ω)空间，也简称 L^p 空间，即：

$$L^p(a,b;\Omega)=\left\{f(x,t)\left|\left|\iint_{\Omega_T}|f(x,t)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|<\infty,(x,t)\in Q_T=\Omega\times[a,b]\right.\right\}$$

根据上述定义，很容易验证下列性质：

定理 1.1.2.7　空间 L^p（a，b；Ω）（$p\geqslant 1$）是赋范线性空间。

定理 1.1.2.8　空间 L^p（a，b；Ω）（$p\geqslant 1$）是 Banach 空间。

定理 1.1.2.9　空间 L^p（a，b；Ω）（$p\geqslant 1$）空间是可分的。

定理 1.1.2.10　空间 L^p（a，b；Ω）是 Hilbert 空间。

1.1.3　有界线性算子与泛函

由一个线性空间到另一个线性空间的映射，通常称为算子。如果算子的值域是数域(实或复数域)，则称为泛函。这里简单阐述线性空间上线性算子及其性质。

定义 1.1.3.1　线性算子与泛函

设 X、Y 是实（复）线性空间，D 是 X 的线性子空间，T 是 D 到 Y 的映射。如果对任何 x，$y\in D$ 及数 $\alpha\in R$，有：

$$T(x+y)=T(X)+T(Y);\ T(\alpha x)=\alpha T(x)$$

称映射 T 是 D 到 Y 上的线性算子，D 称为 T 的定义域，记为 $D(T)$。$T(D)$ 称为 T 的值域，记为 $R(T)$。若 T 为实（或复）数域时，则称算子 T 为线性泛函。

如果由可微函数构成的集合，通过微分运算，可使其变成另外的函数集合，则称这种微分运算是可微函数上的一种算子，称为微分算子。或简单地说，所有带有导数符号或微分符号的算子都可称为微分算子。

定义 1.1.3.2　零空间（或核）

设 T 是线性空间 X 上非零的线性泛函，集合 $\ker T=\{x \mid T(x)=0\}$，称为泛函 T 的零空间（或核）。很明显，它是 X 的线性子空间。

定理 1.1.3.1

设 T 是赋范线性空间 X 上的线性算子（或泛函），如果 T 在某一点 $x_0\in X$ 处连续，那么 T 在 X 上处处连续。

证明： 对任意的 $x\in X$，设 $x_n\in X$ 当 $x_n\to x$，有 $x_n-x+x_0\to x_0$。由于 T 在 x_0 处连续。所以：

$$T(x_n)-T(x)+T(x_0)=T(x_n-x+x_0)\to T(x_0)\ (n\to\infty)$$

因此：

$$T(x_n)\to T(x)$$

由 X 的任意性知，T 在 X 上处处连续。

证明完毕。

因此，欲验证线性算子（或泛函）T 是连续的，只需验证 T 在 $x=0$ 处连续即可。

定义 1.1.3.3　有界线性算子

设 T 是线性空间 X 的子空间 $D(T)$ 到线性空间 Y 的线性算子，如果存在 $M>0$，使得

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,\ \forall x\in X$$

则称 T 是有界的。如果不存在这样的 M，则称 T 是无界的。

定义 1.1.3.4　线性算子的范数

设 T 是赋范线性空间 X 的子空间 $D(T)$ 到赋范线性空间 Y 的线性算子，则称：

$$\|T\|=\sup_{x\in D,x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为算子 T 的范数。显然，如果 T 是有界线性算子，则 $\|T\|$ 是有限实数。反之，若 $\|T\|<\infty$，则有 $\|Tx\|<\|T\|\cdot\|x\|$。

线性算子连续性与有界性有下面等价关系定理。

定理 1.1.3.2

设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子，则 T 是连续的充要条件是 T 有界。

证明： 充分性：设 T 有界，则存在 $M>0$ 使得对一切 $x\in X$ 有：

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$$

从而对任意的 $x_n\in X$ $(n=1,2,\cdots)$，当 $x_n\to x$ 时，有：

$$\|Tx_n-Tx\|=\|T(x_n-x)\|\leqslant M\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$$

所以 $Tx_n \to Tx$，即 T 是连续的。

必要性：假设 T 连续，且无界，则对于每一个自然数 n，必有 $x_n \in X$（$x_n \neq 0$）使得：

$$\| Tx_n \| \geqslant n \| x_n \|$$

令 $y_n = \dfrac{x_n}{n \| x_n \|}$，则 $\| y_n \| = \dfrac{1}{n}$，即 $y_n \to 0$（$n \to \infty$）。

因为 T 连续，故有 $Ty_n \to 0$（$n \to \infty$）。另一方面，有：

$$\| Ty_n \| = \left\| \frac{Tx_n}{n \| x_n \|} \right\| \geqslant \frac{n \| x_n \|}{n \| x_n \|} = 1 \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

引出矛盾，故 T 必有界。

证明完毕。

很显然，有限维赋范空间上的线性有界泛函也都是连续的。

定义 1.1.3.5　有界线性子空间

赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的一切有界线性算子全体组成的集合，记为B（X，Y）。

规定算子 T_1、T_2 加法和数乘运算如下，对 $\forall x \in X$ 及数 $\alpha \in R$ 有：

$$(T_1 + T_2)\ x = T_1 x + T_2 x; \qquad (\alpha T_1)\ x = \alpha\ (T_1 x)$$

显然 $T_1 + T_2$ 和 αT_1 都是线性算子，称 $T_1 + T_2$ 为 T_1 与 T_2 的和，称 αT_1 为数 α 与 T_1 的积。容易验证，按照上述运算，B（X，Y）是一个线性空间，且按照算子范数运算构成一个赋范线性空间，称 B（x，y）为有界线性算子空间，简称线性算子空间，一般来说，B（X，Y）未必是完备的。

定理 1.1.3.3

设 X 为赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，则 B（X，Y）也是 Banach 空间。

证明：设 $\{T_n\}$ 是 B（X，Y）的基本列，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 n，$m > N$ 时，有：

$$\| T_n - T_m \| < \varepsilon$$

即对于每一个 $x \in X$ 有：

$$\| T_n x - T_m x \| = \| \ (T_n - T_m)\ x \| \leqslant \| \ (T_n - T_m)\ \| \cdot \| x \| \to 0\ (n,\ m \to \infty)$$

所以 $\{T_n x\}$ 是 Y 中基本列。由 Y 的完备性可知，存在某 $Tx \in Y$ 使得：

$$\lim_{n \to \infty} T_n \to Tx$$

现在来证明 Y 是有界的，且 $\| T_n - T \| \to 0$。因为当 n，$m > N$ 时，有：

$$| \| T_N \| - \| T_m \| | \leqslant \| T_n - T_m \| < \varepsilon$$

故 $\{ \| T_n \| \}$ 是基本列，从而 $\{ \| T_n \| \}$ 有界，即存在 M 使得：

$$\| T_n \| \leqslant M\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

于是，对每一个 $x \in X$ 都有：

$$\| Tx \| = \lim_{n \to \infty} \| T_n x \| \leqslant \ (\lim_{n \to \infty} \| T_n \|)\ \leqslant M \| x \|$$

所以 T 是有界算子。另外由 T 的定义，知 T 是线性算子，故 $T \in$ B（X，Y）。又因 $\{ \| T_n \| \}$是基本列，故对任意的 $x \in X$，当 n，$m > N$ 时，有：

$$\| T_n x - T_m x \| \leqslant \| \ (T_n - T_m)\ \| \cdot \| x \| < \varepsilon \| x \|$$

令 $m\to\infty$ 对于固定的 $n>N$ 有：

$$\| T_n x - Tx \| = \lim_{m\to\infty} \| T_n x - T_m x \| < \varepsilon \| x \|$$

于是，当 $n>N$ 时，有：

$$\| T_n - T \| = \sup_{\|x\|=1} \| (T_n - T) x \| < \varepsilon$$

由 ε 的任意性，得 $\| T_n - T \| \to 0$ $(n\to\infty)$，因此 B（X，Y）完备，即 B（X，Y）是 Banach空间。

证明完毕。

定义 1.1.3.6　对偶（共轭）空间

设 X 是赋范线性空间，K 是数域，记 $X'=$B（X，Y），称 X' 为 X 的对偶（共轭）空间，即 X 上所有有界线性泛函全体构成的赋范线性空间。

如果定义线性泛函的加法和数乘运算：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)；(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \ (\forall f, g\in L', \alpha\in C)$$

容易验证：$\| f+g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$；$\| \alpha f \| = |\alpha| \| f \|$；$\| f \| = 0$ 以及 $\| f \| = 0$ 的充分必要条件是 $f=0$，因此，X 的对偶（共轭）空间 X' 按照上述运算及范数成为赋范线性空间，不仅如此，还有下面定理。

定理 1.1.3.4

赋范线性空间 X 的共轭（对偶）空间 X' 是完备的 Banach 空间。

证明：设 $\{f_n\}$ 是线性空间 X 中的基本列，那么对任意 $\varepsilon>0$ 存在正整数 N，使得对任意的 n，$m>N$，有 $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$。由此，对于任意 $x\in X$ 有：

$$\| f_n(x) - f_m(x) \| \leqslant \| f_n - f_m \| \cdot \| (x) \| < \varepsilon \| (x) \|$$

即对任意的 $x\in X$ 数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛。

令 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，现在验证 f 是线性连续泛函。线性性质可直接验证。

因为对任意 x，$y\in X$，α，β 是实数，有：

$$f(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to\infty} \alpha f_n(x) + \lim_{n\to\infty} \beta f_n(y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

为证明泛函 f 的连续性，返回到不等式 $\| f_n(x) - f_m(x) \| < \varepsilon \| x \|$，并在不等式中，令 $m\to\infty$ 取极限，得 $\| f(x) - f_n(x) \| < \varepsilon \| x \|$。由此推出泛函 $f-f_n$ 有界。于是泛函 $f=(f-f_n)+f_n$ 有界，这意味着 f 连续。由上面不等式推出对所有的 $n>N$，$\| f-f_n \| < \varepsilon$ 即 $\{f_n\}$ 收敛于 f。因此，对偶（共轭）空间 X' 是 Banach 空间。

证明完毕。

注：这个定理成立与原来空间是否完备无关。如果赋范线性空间 X' 不完备，而 $\overline{X}$ 是 X 的完备化空间，则空间 X' 与 $\overline{X}'$ 同构。

定义 1.1.3.7　共轭（伴随）算子

设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 中的有界线性算子，对任意 x 算子 $T^*\in Y'$ 满足 $(T^* f)(x) = f(Tx)$，$\forall x\in X$，则称 T^* 是 T 的共轭算子（或伴随算子）。有界线性算子 T 的共轭算子 T^* 具有以下基本性质：

（1）T^* 是有界线性算子，并且 $\| T^* \| = \| T \|$，$T\in$B（X，Y）。

（2）对于任意 $\alpha\in K$，$(\alpha T)^* = \alpha T^*$，$T\in$B（$X$，$Y$）。

(3) $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$，T_1，$T_2\in B(X, Y)$。

(4) $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$，$T_1\in B(X, Y)$，$T_2\in B(X, Y)$。

(5) 设 T 有有界线性逆算子，则 T^* 也有有界逆算子，并且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$。

下面介绍共轭（伴随）算子的等价定义。

定义 1.1.3.7*　共轭（伴随）算子

设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 中的有界线性算子，T^* 满足对偶积 $\langle Tx, y\rangle=\langle x, T^*y\rangle$，$\forall x\in X$，则称 T^* 是 T 的共轭（或伴随）算子。共轭（或伴随）算子的概念在线性微分方程理论和应用中扮演很重要的角色。对于微分算子来说，还有以下等价定义和结论，特别是二阶微分算子。

定义 1.1.3.7　共轭（伴随）算子**

设 L 为任意阶线性微分算子，线性微分算子 L^* 称为 L 的共轭（或伴随）算子，如果对任意的 u，v 有：

$$vLu-uL^*v=D_i(P^i)\equiv \mathrm{div}P$$

成立，其中 $p=(p^1, p^2, \cdots, p^n)$ 是 $p^i(x)$ 组成的向量场。方程 $L^*v=0$ 称为方程 $Lu=0$ 的伴随方程。

定理 1.1.3.5　共轭（伴随）算子形式定理

设二阶线性微分算子为：

$$L=a^{ij}(x)D_iD_j+b^i(x)D_i+c(x)$$

其中 $a^{ij}(x)=a^{ji}(x)$，则其伴随算子 L^* 唯一确定，并有形式：

$$L^*v=D_iD_j(a^{ij}v)-D_i(b^iv)+cv$$

证明：用 v 乘以算子的两边，得：

$$\begin{aligned}vLu&=va^{ij}D_iD_ju+vb^iD_iu+cuv\\&=D_i(va^{ij}D_ju)-D_i(va^{ij})D_ju+D_i(vb^iu)-uD_i(vb^i)+ucv\end{aligned}$$

此外，将 $-D_i(va^{ij})D_ju$ 写成：

$$-D_i(va^{ij})D_ju=-D_j[uD_i(va^{ij})]+uD_iD_j(a^{ij}v)$$

因为 $a^{ij}(x)=a^{ji}(x)$ 调换右边第一项里的 i 和 j，得：

$$-D_i(va^{ij})D_ju=-D_i[uD_j(va^{ij})]+uD_iD_j(a^{ij}v)$$

因为 $D_ju=u_j$，所以：

$$vLu=u[D_iD_j(a^{ij}v)-D_i(b^iv)+cv]+D_i[a^{ij}vu_j+b^iuv-uD_j(a^{ij}v)]$$

因此：

$$L^*v=D_iD_j(a^{ij}v)-D_i(b^iv)+cv$$

并且满足：

$$vLu-uL^*v=D_i(P^i)\equiv \mathrm{div}P$$

这里有：

$$p^i=a^{ij}vu_j+b^iuv-uD_j(a^{ij}v)$$

证明完毕。

定义 1.1.3.8　自共轭（或自伴）算子

对任意的函数 $u(x)$，如果算子 L 满足 $Lu=L^*u$，则称算子 L 是自共轭（或自伴）

算子。同时，相应的方程 $Lu=0$ 称为自共轭的（或自伴的）。

定理 1.1.3.6 自共轭算子形式定理

设二阶微分算子为：

$$L=a^{ij}(x)D_i(D_j)+b^i(x)D_i+c(x)$$

其中 $a^{ij}(x)=a^{ji}(x)$。如果 L 是自共轭算子（或自伴算子），当且仅当：

$$b^i(x)=D_j[a^{ij}(x)]\ (i=1,2,\cdots,n)$$

证明：算子 L^* 的表达式为：

$$L^*v=D_iD_j(a^{ij}v)-D_i(b^iv)+cv$$

可写成：

$$L^*v=a^{ji}v_{ij}+[2D_j(a^{ij})-b^i]v_i+[c-D_i(b^i)+D_iD_j(a^{ij})]v$$

将上式代入 $Lu=L^*u$ 并且考虑 $a^{ij}(x)=a^{ji}(x)$，得：

$$2D_j(a^{ij})-b^i=b^i,\ c-D_i(b^i)+D_iD_j(a^{ij})=c$$

因此，$b^i(x)=D_j[a^{ij}(x)]$

证明完毕。

定义 1.1.3.9 算子方程的弱解

设 Ω 是 R^n 中有界区域，如果函数 $u\in L^2(\Omega)$ 满足有界线性算子方程 $Lu=f$，则称 u 是算子方程的古典解。如果对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$u\in L^2(\Omega)$ 满足：

$$(Lu,\varphi)=(f,\varphi)$$

则称 u 是该算子方程的弱解。如果有界线性算子 L 的共轭算子为 L^*，对任意 $v\in L^2(\Omega)$，$u\in L^2(\Omega)$ 满足方程：

$$(Lu,\varphi)=(L^*\varphi,u)=\langle L^*\varphi,u\rangle=\langle\varphi,f\rangle,\ (\forall v\in Y)$$

其中对偶积：

$$\langle\varphi,f\rangle=\int_\Omega\varphi f\,\mathrm{d}x$$

则称 u 是该算子方程的弱解。

1.2 整数次 Sobolev 空间及其广义导数

本节先介绍一般意义下的广义导数及其整数次 Sobolev 空间。最后将广义导数推广为向量广义导数，形成新的 HL 空间，为以后的研究和推广奠定基础。

1.2.1 Sobolev 空间及其广义导数

为了引进 Sobolev 空间，先给出广义导数（或弱导数）的概念。

定义 1.2.1.1 广义导数（或弱导数）

设 Ω 是 R^n 中开集，$u,v\in L^1_{loc}(\Omega)$，$\alpha\in Z^n_+$，Z_+ 为非负整数集。若对于任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$有：

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x$$

成立，则称 v 是 u 的 α 阶广义导数（或弱导数），记作 $v=D^{\alpha}u$。这种定义方式是将左端对 u 的求导"转嫁"到右端对 φ 求导。如果 φ 存在古典导数，则其必是上述意义下的广义导数。反之，广义导数存在却不能断定古典导数存在。

定理 1.2.1.1　广义导数唯一性

若 u 存在 α 阶广义导数（或弱导数），则其必唯一。

证明：假设 u 存在两个 α 阶广义导数 v_1，$v_2\in L_{loc}^1$（Ω），即对 $\forall\varphi\in C_0^{\infty}$（Ω）有：

$$\int_{\Omega}uD^{\alpha}\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}v_1\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}v_2\varphi\mathrm{d}x$$

于是：

$$\int_{\Omega}(v_1-v_2)\varphi\mathrm{d}x=0$$

由 φ 的任意性及变分引理可知，$v_1=v_2\ a.e.\ \Omega$。即广义导数（或弱导数）是唯一的。

证明完毕。

定义 1.2.1.2　*m* 阶 Sobolev 空间

设有界区域 Ω，$1\leqslant p\leqslant+\infty$，记线性空间：

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\mid D^{\alpha}u\in L^p(\Omega),\ u\in L^p(\Omega),\ \forall\alpha\in Z_{+}^{n},\ |\alpha|\leqslant m\}$$

其中 $D^{\alpha}u$ 为 u 的 α 阶广义导数。

对于 $v\in W^{m,p}$（Ω），定义范数有：

$$\|v\|W^{m,p}(\Omega)=\|v\|_{m,p,\Omega}=\|v\|_{m,p}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^{\alpha}u\|_{0,p}^{p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|v\|_{0,p}=\|v\|_{0,p,\Omega}=\|v\|_{L^p(\Omega)}=\Big(\int_{\Omega}|v|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},1\leqslant p\leqslant+\infty$$

$$\|v\|_{0,\infty}=\|v\|_{0,\infty,\Omega}=\|v\|_{L^{\infty}(\Omega)}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|$$

$W^{m,p}$（Ω）赋以上述范数称为 Ω 上的 m 阶 Sobolev 空间。

如果对 Ω 的任何子集 $\Omega'\subset\Omega$ 都有 $u\in W^{m,p}(\Omega')$，则称 $u\in W_{loc}{}^{m,p}(\Omega)$。

如果对于某个 $1\leqslant p\leqslant+\infty$ 有 $u\in W_{loc}{}^{1,p}(\Omega)$，则称 u 是一个 Sobolev 函数。特别说明，当 $p=2$ 时，记 $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$。当 $m=0$ 时，记 $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$。很容易验证，广义导数有下列性质。

定理 1.2.1.2　广义导数的性质

设 u，$v\in W^{k,p}$（Ω），$|\alpha|\leqslant k$，则：

（1）$D^{\alpha}u\in W^{k-|\alpha|}(\Omega)$，$D^{\beta}(D^{\alpha}u)=D^{\alpha+\beta}u$，$\forall\ |\alpha|+|\beta|\leqslant k$。

（2）$\forall\lambda$，$\mu\in R$，$\lambda u+\mu v\in W^{k,p}(\Omega)$，且 $D^{\alpha}(\lambda u+\mu v)=\lambda D^{\alpha}u+\mu D^{\alpha}v$，$|\alpha|\leqslant k$。

（3）如果 V 是 Ω 的一个开集，则 $u\in W^{k,p}(V)$。

（4）如果 $\xi\in C_0^{\infty}$（Ω），则 $\xi u\in W^{k,p}$（Ω）。且 $D^{\alpha}(\xi u)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}C_{\alpha}^{\beta}D^{\beta}\xi D^{\alpha-\beta}u$，其中 $C_{\alpha}^{\beta}=\dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$。

证明：见文献 [1，31]，略。

定义 1.2.1.3　强收敛

设序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\in W^{m,p}$（Ω），如果存在 $f\in W^{m,p}$（Ω）使得 $\|f_k-f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$（$k\to\infty$），称 $\{f_k\}$ 强收敛于 f，记为 $f_k\to W^{m,p}$（Ω）。

定义 1.2.1.4 广义函数

C_0^∞ (I) $\rightarrow B$ 的一个连续线性映射 f 称为一个 B 值广义函数。F 在 $\varphi \in C_0^\infty$ 取得的值记作 f (φ) $=$ (f, φ)。

定义 1.2.1.5 光滑子

设非负函数 p (x) 满足：

(1) p (x) $\in C_0^\infty$ (R^n)。

(2) $\operatorname{supp} p p$ (x) $\subset B_1$ (0) $=$ $\{x \mid x \in R^n, \ |x| \leqslant 1\}$。

(3) $\int_{R^n} p(x)\mathrm{d}x = 1$ 等价于 $\int_{|x| \leqslant 1} p(x)\mathrm{d}x = 1$，则称 p (x) 为光滑子或磨子。

定义 1.2.1.6 磨光算子

对于函数 $u \in L_{loc}^1$ (Ω)，设 u 在 R^n 上有定义，u 在 Ω 外恒为零。令：

$$J_\varepsilon u(x) = \int_\Omega p_\varepsilon(x - y)u(y)\mathrm{d}y$$

称 J_ε 为磨光算子，$J_\varepsilon u$ (x) 为 u (x) 的磨光，p_ε (x) 为磨光子或磨光核，其作用是将函数磨光，于是有下列定理。

定理 1.2.1.3

设 $\varepsilon > 0$，Ω 是 R^n 中区域，$\Omega_\varepsilon =$ $\{x \mid x \in \Omega, \ dist \ (x, \partial\Omega) > 0\}$

(1) 若 $u \in L_{loc}^1$ (Ω)，则 $J_\varepsilon u \in C^\infty$ (Ω_ε)。

(2) 若 $u \in L_{loc}^1$ (Ω)，则 $\operatorname{supp} u \subset \Omega$，$\varepsilon < dist$ $(\operatorname{supp} u, \ \partial\Omega)$，则 $J_\varepsilon u \in C_0^\infty$ (Ω)。

(3) 若 $u \in L^p$ (Ω) $(1 \leqslant p < \infty)$，则 $J_\varepsilon u \in L^p$ (Ω)，并且：

$$\| J_\varepsilon u \|_{L^p(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^p(\Omega)}, \ \lim_{\varepsilon \to 0+} \| J_\varepsilon u - u \|_{L^p(\Omega)} = 0$$

(4) 若 $u \in C$ (Ω)，$\bar{G} \subset \Omega$，则 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} J_\varepsilon u_{L^p(\Omega)} = u$ (x)。

(5) 若 $u \in C$ $(\overline{\Omega})$，则 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \| J_\varepsilon u$ (x) $\|_{L^p(\Omega)} = u$ (x)。

证明： 见文献 [1, 31]，略。

对于 Sobolev 空间有以下性质。

定理 1.2.1.4

$W^{m,p}$ (Ω) 是 Banach 空间。

推论 1.2.1.1

H^m (Ω) 是 Hilbert 空间。

定理 1.2.1.5

当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时，$W^{m,p}$ (Ω) 是可分的。

定理 1.2.1.6

当 $1 < p < +\infty$ 时，$W^{m,p}$ (Ω) 是自反的。

同样可定义时空的 Sobolev 空间 $W^{m,p}$ $(0, \ T; \ \Omega)$。

对于空间 $W^{m,p}$ $(0, \ T; \ \Omega)$ 也有上述类似性质。

定理 1.2.1.7

$W^{m,p}$ $(0, \ T; \ \Omega)$ 是 Banach 空间。

定义 1.2.1.7　负整数次的 Sobolev 空间

设 m 是自然数，$1<p<+\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，定义 $W^{-m,p'}(\Omega)=[W_0^{-m,p}(\Omega)]'$，即 $W_0^{m,p}(\Omega)$上的所有线性连续泛函全体组成的空间，对于 $T\in W^{-m,p'}(\Omega)$ 可定范数为：

$$\| T \| W^{-m,p'}(\Omega) = \| T \|_{-m,p'} = \sup_{\varphi\in W_0^{m,p}(\Omega)} \frac{|\langle T,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}}$$

式中：$\langle T,\varphi\rangle$ 为对偶积；称 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 为负整数次的 Sobolev 空间。

对任意的 $f\in W^{-m,p'}(\Omega)$ 和 $v\in W_0^{m,p}(\Omega)$ 有：

$$m\,|\langle f,v\rangle| \leqslant \| f\|_{W^{-m,p'}(\Omega)}\cdot \| v\| W_0^{m,p}(\Omega)$$

定理 1.2.1.8

空间 $W^{-m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间。

定理 1.2.1.9

当 $1<p<\infty$时，空间 $W^{-m,p}(\Omega)$ 是可分的。

证明： 见文献 [1，31]，略。

定理 1.2.1.10

当 $1<p<\infty$时，空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是自反的。

证明： 见文献 [1，31]，略。

考虑空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 中元素结构，有下列定理。

定理 1.2.1.11

空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 中任何一个元素 T 都可表示为 $T=\sum_{|\alpha|\leqslant m}D^{\alpha}\widetilde{f}_{\alpha}$或

$$\langle T,u\rangle = T(u) = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\widetilde{f}_{\alpha}D^{\alpha}u\,\mathrm{d}x,\ \forall\, u\in W_0^{m,p}(\Omega)$$

其中$\widetilde{f}_{\alpha}\in L^{p'}(\Omega)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，$1<p<\infty$。反之，若广义函数 T 可表示为上述两种形式，则：

$$T\in W^{-m,p}(\Omega)$$

证明： 见文献 [1，31]，略。

定理 1.2.1.12

当 $1\leqslant p<\infty$时，空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的函数是可逼近的。即对任意 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 存在序列$\{u_k\}_{n=1}^{\infty}\in C^{\infty}(\Omega)\cap W^{m,p}(\Omega)$ 满足：

$$\| u_k-u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \| u_k-u\|_{m,p,\Omega}\to 0\ (k\to\infty)$$

或对 R^n 中有界的开集 Ω，$\partial\Omega\in C^m$，$m\geqslant 1$ 为自然数，对任意 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，存在序列 $\{u_k\}_{n=1}^{\infty}\in C^m(\overline{\Omega})$ 满足

$$\| u_k-u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \| u_k-u\|_{m,p,\Omega}\to 0\ (k\to\infty)$$

证明： 见文献 [1，31]，略。

定理 1.2.1.13

当 $1\leqslant p<\infty$时，空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的函数是可延拓的。即对 R^n 中有界区域 Ω，$\partial\Omega\in C^m$，则存在线性算子：

$$P: W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(R^n)$$

满足：

$$Pu(x) = u(x),\ a.e.\ x \in \Omega$$

并且：

$$\| Pu \|_{W^{m,p}(R^n)} \leqslant \| Pu \|_{m,p,R^n} \leqslant C \| u \|_{m,p,\Omega}$$

式中：$C=C(m, p, \Omega)$；P 为延拓算子，即 Pu 为 u 的一个延拓。

证明：见文献 [1, 31]，略。

设映射 $u \to \tilde{u}$ 表示 u 在区域 $\Omega \subset R^n$ 外的零延拓，记作：

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in R^n - \Omega \end{cases}$$

该映射把 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 等距映射到 $W^{m,p}(R^n)$ 中去，需要下列定理。

定理 1.2.1.14

设 $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$，则对于任意 $|\alpha| \leqslant m$，在广义导数意义下有 $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{(D^\alpha u)}$，从而 $\tilde{u} \in W^{m,p}(\Omega)$，其中 $\tilde{u}$ 表示 u 在区域 Ω 外的零延拓。

证明：见文献 [1]，略。

定义 1.2.1.8　空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包，或 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\| \cdot \|_{m,p,\Omega}$ 意义下的完备化空间，记作 $W_0^{m,p}(\Omega)$。即存在序列 $\{u_k\}_{n=1}^\infty \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足：

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \mid u \in W^{m,p}(\Omega),\ s.t.\ \| u_k - u \|_{m,p,\Omega} \to 0\ (k \to \infty)\}$$

根据上述定义，很容易证明，当 $\Omega = R^n$ 时，$W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$。当 Ω 为有界开集时，$W_0^{m,p}(\Omega) \subset (\neq) W^{m,p}(\Omega)$。对于 R^n 中有界区域 Ω $\partial\Omega \in C^1$，$u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$，则 $u(x)\mid_{x \in \partial\Omega} = 0$ 和 $u \in W_0{}^{1,p}(\Omega)$ 是等价的。

证明：见文献 [1]，略。

1.2.2　Sobolev 空间及广义导数细化

为方便研究边值问题的弱解，现将 Sobolev 空间及其广义导数进行细化。

定义 1.2.2.1　一阶广义导数

设函数 $f(x) \in L^2(a, b)$，如果存在函数 $g(x) \in L^2(a, b)$ 使得：

$$\int_a^b g(x)v(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)v'(x)\mathrm{d}x, \forall v(x) \in C_0^\infty(a,b)$$

则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 一阶广义导数（或弱导数），仍记作：

$$g(x) = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

上式中 $v(x) \in C_0^\infty(a, b)$ 是任意的，称为检验函数或测试函数。

注：这种定义方式是将左端对 $f(x)$ 的求导“转嫁”到右端对 $v(x)$ 的求导。由于 $v(x) \in C_0^\infty(a, b)$，这种求导可以无限进行下去。如果 $f(x)$ 存在古典导数 $f(x) \in L^2(a, b)$，则其必是上述意义的广义导数。反之，广义导数存在却不能断定古典导数存在。广义导数虽然大大推广了古典导数的概念，但是这种推广仍有一定的限制，它要求广