考研图书全国知名品牌
全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试

数学全程预测100题

理工类

SHUXUE QUANCHENGYUCE 100TI (LIGONGLEI)

主编 李永乐

●70题模拟 囊括所有基本解题技巧
3套预测 权威把握命题方向

●赠《数学重要公式与法则》

2007

新华出版社

考研图书全国知名品牌
全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试

数学全程预测100题

理工类

SHUXUE QUANCHENGYUCE 100TI (LIGONGLEI)

主编：李永乐

编者：清华大学 刘庆华
北京大学 刘西垣
北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京交通大学 赵达夫
东北财经大学 龚兆仁
（按姓氏笔画排序）

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据
数学全程预测 100 题．理工类 / 李永乐主编．—北京：新华出版社，2004.9
（全国硕士研究生入学考试）
ISBN 7—5011—6815—6

Ⅰ.考...　Ⅱ.李...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题　Ⅳ.013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094763 号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，请读者注意识别。

数学全程预测 100 题(理工类)

主　　编：李永乐
责任编辑：白云覃
装帧设计：金榜图文设计室
出版发行：新华出版社
地　　址：北京石景山区京原路 8 号
邮　　编：100043
经　　销：新华书店
印　　刷：北京云浩印刷有限责任公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：10.25
字　　数：239 千字
版　　次：2006 年 9 月版
印　　次：2006 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5011-6815-6/G・2481
定　　价：15.00 元

若有印装质量问题，请与印厂联系(010)82570560

第四版前言

全国硕士研究生入学统一考试是国家选拔硕士研究生的重要途径，在教育类全国统一考试项目中(不含博士生招生考试)，就考试水准和层次来说，目前是我国最高水平的考试。

针对近两年命题趋势是难度总体下降且理工类与经济类试题有趋同现象，但 2006 年数学一平均分 83.03，数学二平均分 91.41，数学三平均分 81.21，数学四平均分 85.26，较之往年都有较大提高的背景，也许 2007 年的试题难度会比 06 年略有所提高，因此我们在题目设计上有适当的调整。

编　者

2006 年 9 月

前　言

本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书，适合于数学一至数学四 4 个卷种，内容包括高等数学（微积分）、线性代数、概率论与数理统计。该书是"数学基础过关 660 题"一书的姊妹篇。题型为解答题（含计算题、证明题与应用题）。注意，2004 年卷子结构改变为：6 个填空题，8 个选择题，9 个解答题，其中填空、选择共 56 分，解答 94 分。

硕士研究生入学考试的性质是"具有选拔功能的水平考试"，在强调选拔、强调能力考查的同时，考生除了对大纲中规定的基本概念、基本原理、基本方法深刻理解熟练掌握外，更要不断提高考生解答综合性试题、应用题及证明题的能力。作为研究生入学考试，不能单纯考查数学基础知识，而要在考查三基的基础上注意考查考生的逻辑思维能力、空间想象能力、运算能力，特别是综合应用所学知识的解题能力。所谓综合题（解答题）就是考查多个知识点的试题，一道好的综合题能把考试大纲要求考查的相关知识有机地结合起来。综合题考查的内容可以是同一学科的不同章节，也可以是不同学科的不同章节。

该书预测题全部是解答题。在内容设计上，每题均全新优化设计，涉及两个以上知识点，题型新颖、重点类型突出。几乎涵盖新大纲所有考查知识点。我们相信通过这些试题的训练，一定会尽快提高考生的分析问题和解决问题的能力。

该书每道题都有：分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；解答——该题的详细、规范解题过程；评注——该题所考查的知识点（或命题意图），解题思路归纳总结和延伸，常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

数学离不开计算，考研也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，要提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不

能华而不实，眼高手低，丢三拉四，犯“低级”错误。

我们在认真研究历年试题的基础上，该书对考试的重点、难点通过解答题加以分解剖析，对考生常出的错误归纳整理，我们用化整为零各个击破以及基础与综合相结合的方法，用点面结合，抓住基础突出重点的方法，设计出不同解题思想层次的试题整合成书。同学们在使用本书时，最好能先自己动手想与算，不要急于看解答，评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

研究生考试科目从2003年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了50%，因此与往年相比，数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要，同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历年来相关较大，这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此，希望考生们要根据考试大纲认真踏实全面系统地复习，心态要平和，戒浮燥，要循序渐进，不断积累步步提高，面对激烈的竞争，望有志者抓紧抓细抓早。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时的参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003年10月

目　　录

一、最后冲刺模拟试题

(1) 高 等 数 学

1 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{n}{1-f(\frac{1}{n})}}$$

【分析】 直接求数列的极限不易求，由已知的条件，可通过求函数的极限得到所求数列的极限.

【解】 考虑极限

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\sin x\right]^{\frac{1}{x[1-f(x)]}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\sin x-x}{x}\right]^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^2[1-f(x)]}}$$

只需求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2[1-f(x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2[1-f(x)]}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{1-f(x)}=\frac{1}{6f'(0)}=\frac{1}{12}.$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\sin x\right]^{\frac{1}{x[1-f(x)]}}=e^{\frac{1}{12}}$. 进而

$x-\sin x=\frac{1}{6}x^3$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{n}{1-f(\frac{1}{n})}}=e^{\frac{1}{12}}.$$ $\triangle\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^n)$

2 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\[2ex] \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$

求 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

【分析】 求分段函数的间断点，首先要判断分段接口点是否间断，然后再看各段

中的初等函数是否有间断点，例如分母为 0 的点，但要注意这些点是否在对应的分段中.

【解】 首先考查分段点 $x=0$ 是否间断

$$\because \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2-4}{(\cos\pi x)\pi}=\frac{-4}{\pi}$$

$\therefore \quad x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

再看 $f(x)$ 的其他间断点.

$\because \quad x<0$ 时，$\sin\pi x=0$，即 $x=-1,-2,-3,\cdots$ 时，$f(x)$ 无定义，

$\therefore \quad x=-1,-2,-3,\cdots$ 是 $f(x)$ 的间断点，记 $k=-1,-2,-3,\cdots$.

$$又\because \quad \lim_{x\to k} f(x)\xlongequal{x<0}\lim_{x\to k}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=\begin{cases}\infty, & k(k^2-4)\neq 0\\ “\dfrac{0}{0}”, & k(k^2-4)=0\end{cases}$$

$k(k^2-4)\neq 0\Rightarrow k\neq 0, k\neq \pm 2$

$\therefore \quad k\neq -2$，即 $k=-1,-3,-4,-5,\cdots$ 时，$x=k$ 是 $f(x)$ 的第二类无穷型间断点.

而 $k=-2$，$\because \quad \lim\limits_{x\to k} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}\xlongequal{“\frac{0}{0}”}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-4}{(\cos\pi x)\pi}=\dfrac{8}{\pi}$

$\therefore \quad x=k=-2$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

最后当 $x>0$ 时，$\because \quad x^2-1=0$，即 $x=1$ 时，$f(x)$ 无定义，$\therefore \quad x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

$\because \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)\xlongequal{x>0}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\infty$ 故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类无穷型间断点.

【评注】 本题考查的内容是：(1) 间断点及其类型的概念；(2) 分段函数的极限；(3) 左、右极限的概念；(4) 洛必达法则．主要考查内容(1).

3 已知 $f(x)=3x^2+ax^{-3}(a>0)$，若 $x>0$ 时，总有 $f(x)\geqslant 45$ 成立，试求 a 的

取值范围.

【分析】 本题实质是求 a 为何值时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值大于或等于 45.

【解】 $f'(x)=6x-3ax^{-4}$，由 $f'(x)=6x-3ax^{-4}=0$，得 $x=\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{1}{5}}>0$（因为 $a>0$）. 又

$f''(x)=6+12ax^{-3}$，有 $f''(\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{1}{5}})=6+12a\left[\frac{a}{2}\right]^{-1}=30>0$，所以 $x=\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{1}{5}}>0$ 是 $f(x)=3x^2+ax^{-3}(a>0)$，在 $(0,+\infty)$ 上的唯一极值点，故

$$f(\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{1}{5}})=3\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{2}{5}}+a\left[\frac{a}{2}\right]^{-\frac{3}{5}}=\frac{5}{\sqrt[5]{4}}\sqrt[5]{a^2} \quad =5\left[\frac{a}{2}\right]^{\frac{2}{5}}$$

是 $f(x)=3x^2+ax^{-3}(a>0)$，在 $(0,+\infty)$ 内的最小值.

令 $\frac{5}{\sqrt[5]{4}}\sqrt[5]{a^2}\geqslant 45$，得 $a\geqslant 486$.

故当 $a\geqslant 486$ 时有 $f(x)\geqslant 45(x>0)$.

4 **【证明】** $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1(n>1)$，在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 令 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，证明 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点 x_n. 再证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，最后求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证明】 设 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1,(n>1)$.

显然 $f_n(0)=-1,f_n(1)=n-1>0$. $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由闭区间上连续函数的零点定理，$f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点，记为 x_n. 即 $f_n(x_n)=0$.

又因为

$$f'_n(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+1>0.$$

故 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，故零点唯一，所以方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根.

下面求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 因为

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1 \tag{1}$$

另解：$x_n=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_n^i}$ 级数问题，

$$x_{n-1}^{n-1}+x_{n-1}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}=1 \tag{2}$$

(1)－(2)： $x_n^n+(x_n-x_{n-1})Q=0$

由于 Q 内均是正项，故 $Q>0$，又 $x_n^n>0$. 所以 $x_n-x_{n-1}<0$，$x_n<x_{n-1}$，$0<x_n<1(n=2,3,\cdots)$.

数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由(1)式

$\cancel{\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1}$，两边取极限有：

$$\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$$

$$\frac{a}{1-a}=1.\quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

【评注】 证明函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一零点，一般由连续函数零点定理先证明存在性，再由 $f'(x)>0$(或 <0) $x\in(a,b)$. 得到 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单调增加(或减少)，即可证明。

本题第二步证明，即为求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在性，是本题的一个难点，我们由数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有界得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。在求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 过程中，用到等比数列前几项和的公式。?

0 **5** 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有二阶导数，且 $f(a+1)=0$，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 求证：在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$. $f(a)=0$

【分析】 寻找条件使 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的某个子区间上满足罗尔定理.

【证明】 由已知 $f(a+1)=0$，若 $(a+1,+\infty)\subset(a,+\infty)$ 内，$f(x)\equiv0$，则 $f''(x)=0$，$\forall x\in(a+1,+\infty)$ 都可取作 ξ，使 $f''(\xi)=0$，结论自然成立.

若在 $(a+1,+\infty)\subset(a,+\infty)$ 内，$f(x)\neq0$，则至少存在 $x_1\in(a+1,+\infty)$，使 $f(x_1\neq0)$.

不妨设 $f(x_1)>0$.

由于 $f(a+1)=0$，所以存在 x_2，满足 $a+1<x_2<x_1$ 时，$f(x_2)<f(x_1)$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，所以存在 x_3，当 $x_1<x_3<+\infty$ 时，$f(x_3)<f(x_1)$.

由拉格朗日中值定理：存在 $\xi_1\in(x_2,x_1)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0.$$

又存在 $\xi_2\in(x_1,x_3)$，使

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}<0.$$

由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 连续，故存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$ 使 $f'(\xi_3)=0$.

补充定义 $f(a)=0$，又知 $f(a+1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[a,a+1]$ 上满足罗尔定理. 于是存在 $\xi_4\in(a,a+1)$，使 $f'(\xi_4)=0$.

由 $f'(x)$ 在区向 $[\xi_4,\xi_3]$ 上满足罗尔定理，故存在 $\xi\in(\xi_4,\xi_3)\subset(a,+\infty)$，使 $f''(\xi)=0$.

【评注】 本题证明过程中应用了连续函数的介值定理，二次拉格朗日中值定理和二次罗尔定理，是一道综合的证明题. 但是证明思路清楚，就是创造条件使 $f'(x)$ 在某个区间上满足罗尔定理.

证明的难点是如何由 $f(a+1)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，寻找本题的 $\xi_3\in(a+1,+\infty)$，使 $f'(\xi_3)=0$.

建议考生见到这类问题，画出函数 $f(x)$ 的图形草图，这样便于启发思路寻找所要证明的点 ξ.

6 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可导（其中 $a>0$ 常数），且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2f(x)+f'(x)]=1$.

求证：（Ⅰ）$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}f(x)=+\infty$.

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

【分析】 由 $[e^{2x}f(x)]'=e^{2x}[2f(x)+f'(x)]$，可得到 $e^{2x}f(x)$ 与 $2f(x)+f'(x)$ 的关系.

【证明】 (Ⅰ)因为$[e^{2x}f(x)]' = e^{2x}[2f(x)+f'(x)]$,由已知$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)] = 1$,可得$\lim\limits_{x\to+\infty}[e^{2x}f(x)]' = +\infty$.

记$g(x) = e^{2x}f(x)$.由极限性质知:存在$x_0 > a$,当$x > x_0$时,$g'(x) > 1$.从而当$x > x_0$时,由拉格朗日中值定理得:存在$\xi \in (x_0, x)$使得

$$g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0) > x - x_0.\text{进而得}$$

$$g(x) > g(x_0) + x - x_0.$$

两端取极限得

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,即$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}f(x) = +\infty$.

(Ⅱ)由题设,若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,则

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[2f(x) + f'(x)] - 2\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 - 2\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.从而$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$,只需证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{2e^{2x}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2f(x)+f'(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

7 设$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$,又对任意的$x, y \in (-\infty, +\infty)$有$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$.

(Ⅰ)证明:若$f(x)$在$x = 0$连续,则$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续;

(Ⅱ)若$f(x)$在$x = 0$可导,则$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上可导;

(Ⅲ)设$f(x)$在$x = 0$可导,求$f(x)$的表达式.

【证明】 (Ⅰ)因为$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$.

令$x = y = 0$有$f(0+0) = f(0)e^0 + f(0)e^0 = 2f(0)$,所以$f(0) = 0$.

若$f(x)$在$x = 0$连续,则$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$有

$$\begin{aligned}\lim_{\triangle x\to 0} f(x_0 + \triangle x) &= \lim_{\triangle x\to 0}[f(x_0)e^{\triangle x} + f(\triangle x)e^{x_0}]\\ &= f(x_0)e^0 + f(0)e^{x_0} = f(x_0).\end{aligned}$$

所以$f(x)$在x_0连续,由x_0的任意性,$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续.

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，则 $\forall x_0 \in (-\infty,+\infty)$ 有

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0)\mathrm{e}^{\triangle x}+f(\triangle x)\mathrm{e}^{x_0}-f(x_0)}{\triangle x}$$

$$=f(x_0)\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\triangle x}-1}{\triangle x}+\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x)-f(0)}{\triangle x}\mathrm{e}^{x_0}$$

$$=f(x_0)+f'(0)\mathrm{e}^{x_0}.$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=f(x_0)+f'(0)\mathrm{e}^{x_0}$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=f(x)+f'(0)\mathrm{e}^{x}$，记 $a=f'(0)$，则有方程：

$y'-y=a\mathrm{e}^x$. 求解得 $y=cx+ax\mathrm{e}^x$.

由 $y(0)=0$. 得 $c=0$. 所以 $f(x)=ax\mathrm{e}^x$. 其中 $a=f'(0)$.

8 设 $f(x)$ 为非负连续函数且 $f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\sin^4 x$，求 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的平均值.

【分析】 这是一个积分方程，要算导数$(\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t)'_x$. 含参数的定积分（设积分变量为 t，参数为 x）对参数求导，需要掌握的内容有：(1) 当被积函数不含有参数 x 时，只需利用变上限求导法和复合函数求导法；(2) 当被积函数含有参数 x 时，有两种方法可供选择：① 利用换元将参数 x 换到积分限上去，具体到本题就是令 $x-t=u$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$. ② 利用定积分的线性性将 x 提到积分号外再求导，例如

$$\int_0^x (u+x)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u+x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

此外要注意积分方程一般自带初始条件.

【解】 令 $x-t=u$，则$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$.

原式变为 $f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin^4 x$. 因为$(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u)'=f(x)$，所以

$$(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u)'\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin^4 x,\quad \frac{1}{2}[(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u)^2]'=\sin^4 x,$$

$$\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)^2 = 2\int \sin^4 x\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + c.$$

当 $x=0$ 时,左边为 0,则 $c=0$. 故有

$$\left(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x.$$ 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{8}\pi}.$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值为

$$\overline{f(x)} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x}{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$$

另一方法:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\mathrm{d}x,$$所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \frac{3\pi}{16}$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16},\quad \text{所以}\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3\pi}{8}}.$$

所以 $\overline{f(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x \Big/ \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$

【评注】 本题考查的内容是:(1) 是定积分的换元法;(2) 变上限函数与被积函数的关系;(3) 化积分方程为微分方程;(4) 变量可分离方程;(5) 三角函数有理式的积分;(6) 函数的平均值. 主要考查(1) 与(2).

9 设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$,并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【分析】 求解此题的思路中的几个关键点:(1) 为求 $\varphi'(x) = \left(\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}x\right)'_x$ 想到

用换元 $u=xt$ 把 x 换到积分限上后再求导；(2) 讨论 $\psi'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性，要计算 $\lim\limits_{x\to 0}\psi'(x)$ 和 $\psi'(0)$，并看它们是否相等. (3) 计算 $f(0)$ 时，要想到利用 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 和 f 连续.

【解】 因为 $\psi'(x)=(\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t)'_x$，所以令 $u=xt$，得

$$\psi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}(x\neq 0)$$

$$\psi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}(x\neq 0)$$

$$\psi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

其中 $\psi(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=f(0)=0$，是因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$f(x)$ 连续.

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=A\cdot 0=0$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\psi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\psi'(0)$$

所以 $\psi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

10 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式 $f'(x)+f(x)-$

$\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$.

(Ⅰ) 求 $f'(x)$

(Ⅱ) 证明:当 $x \geqslant 0$ 时,$\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

【分析】 先求 $f'(x)$ 是解微分方程问题,求出 $f'(x)$ 后再求出 $f(x)$,之后估计不等式.

【解】 (Ⅰ) 由 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$ 得

$$[f'(x)+f(x)](x+1)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$$

上式两边同时对 x 求导得:

$[f''(x)+f'(x)](x+1)+f'(x)=0$,令 $p(x)=f'(x)$,则 $(p'+p)(x+1)+p=0$,化简得:

$\frac{p'}{p}=\frac{-(x+2)}{x+1}$,两边积分有 $p=\frac{c_1\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

因为 $f'(0)+f(0)=0$,$f(0)=1$,所以 $f'(0)=-1$,$c_1=-1$,$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

(Ⅱ) 因为 $f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$,$f(0)=1$,所以 $f(x)-1=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ $=-\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t$,即 $x\geqslant 0$ 时,$0\leqslant 1-f(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-x}$,故 $x\geqslant 0$ 时,$\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

【评注】 本题考查知识点(1) 可降阶微分方程求解;(2) 当 $x\geqslant 0$ 时,$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}<0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减,即 $x\geqslant 0$ 时,$1-f(x)=f(0)-f(x)\geqslant 0$.

11 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,且 $|f'(x)|\leqslant M$.

证明:$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$,其中 $n\in N$.

【分析】 不等式左边变形,注意到